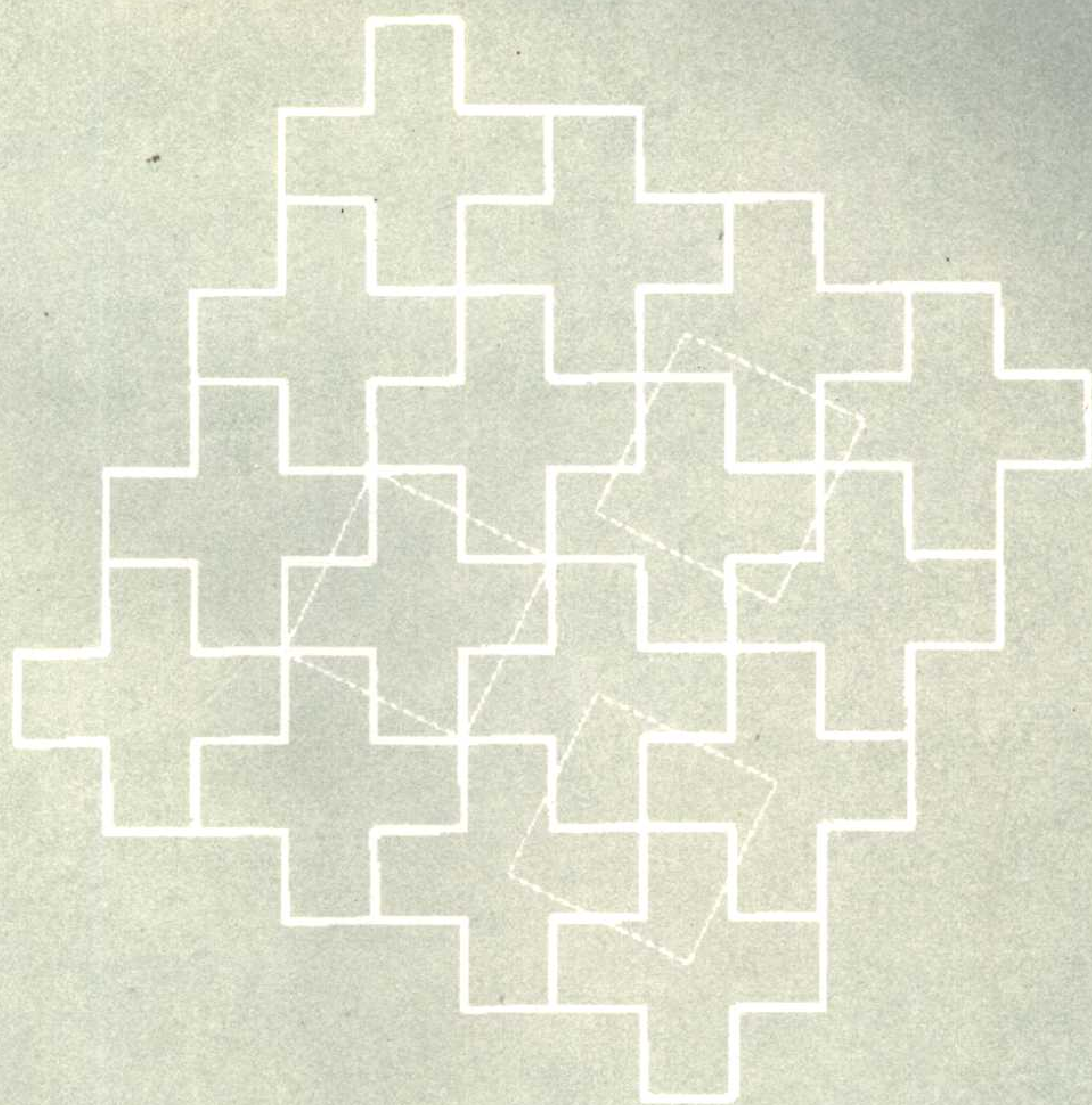
奇妙而有趣的几何

[英] 戴维·韦尔斯 著　余应龙 译 ● 上海教育出版社



David Wells

The Penguin Dictionary of

Curious and Interesting Geometry

Penguin Books

根据企鹅出版公司 1991 年版译出

图书在版编目(CIP)数据

奇妙而有趣的几何 / （英）韦尔斯著；余应龙译.
上海：上海教育出版社，2006.5
（通俗数学名著译丛 / 史树中主编）
ISBN 7-5444-0470-6

Ⅰ.奇... Ⅱ.①韦...②余... Ⅲ.几何学一普及读物 Ⅳ.018-49

中国版本图书馆CIP数据核字（2006）第024066号

通俗数学名著译丛

奇妙而有趣的几何

[英]戴维·韦尔斯 著

余应龙 译

上海世纪出版股份有限公司
上 海 教 育 出 版 社 出版发行

易文网:www.ewen.cc

(上海永福路 123 号 邮政编码:200031)

各地新华书店经销 上海华成印刷装帧有限公司印刷

开本 850×1156 1/32 印张 9.75 插页 4

2006 年 5 月第 1 版 2006 年 5 月第 1 次印刷

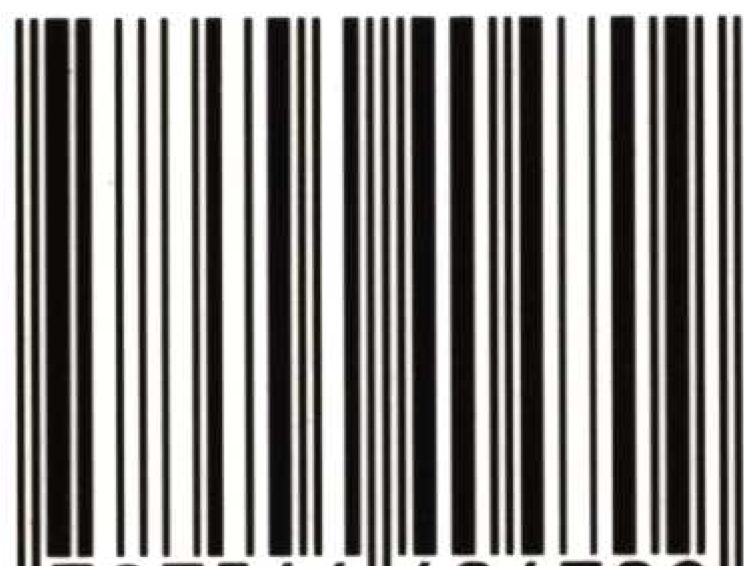
印数 1－5,000 本

ISBN 7-5444-0470-6/O·0008 定价:(软精)17.00 元

(如发生质量问题,读者可向工厂调换)

主编:
史树中　李文林
编委:（按姓氏笔划）
叶其孝　任南衡
赵　斌　胡作玄
袁向东　谈祥柏
惠昌常
顾问:
龚　升　齐民友




ISBN 7-5444-0470-6
9 787544 404709 >
易文网：www.ewen.cc
定　价:（软精）17.00元



本书得到国家自然科学基金
委员会数学天元基金的资助

开創新世紀的
数學文化

陳省身
二千年十一月

译丛序言

数学，这门古老而又常新的科学，已阔步迈进了21世纪.

回顾过去的一个世纪，数学科学的巨大发展，比以往任何时代都更牢固地确立了它作为整个科学技术的基础的地位. 数学正突破传统的应用范围向几乎所有的人类知识领域渗透，并越来越直接地为人类物质生产与日常生活作出贡献. 同时，数学作为一种文化，已成为人类文明进步的标志. 因此，对于当今社会每一个有文化的人士而言，不论他从事何种职业，都需要学习数学，了解数学和运用数学. 现代社会对数学的这种需要，在未来的世纪中无疑将更加与日俱增.

另一方面，20世纪数学思想的深刻变革，已将这门科学的核心部分引向高度抽象化的道路. 面对各种深奥的数学理论和复杂的数学方法，门外汉往往只好望而却步. 这样，提高数学的可接受度，就成为一种当务之急.

一般说来，一个国家数学普及的程度与该国数学发展的水平相应并且是数学水平提高的基础. 随着中国现代数学研究与教育的长足进步，数学普及工作在我国也受到重视. 早在1960年代，华罗庚、吴文俊等一批数学家亲自动手撰写的数学通俗读物，激发了一代青少年学习数学的兴趣，影响绵延至今. 改革开放以来，我国数学界对传播现代数学又作出了新的努力. 但总体来说，我国的数学普及工作与发达国家相比尚有差距. 我国数学要率先赶超世界先进水平，数学普及与传播方面的赶超乃是一

个重要的环节和迫切的任务. 为此，借鉴外国的先进经验是必不可少的.

《通俗数学名著译丛》的编辑出版，正是要通过翻译、引进国外优秀数学科普读物，推动国内的数学普及与传播工作，为我国数学赶超世界先进水平的宏伟工程贡献力量. 丛书的选题计划，是出版社与编委会在对国外数学科普读物广泛调研的基础上讨论确定的. 所选著述，基本上都是在国外已广为流传、受到公众好评的佳作. 它们在内容上包括了不同的种类，有的深入浅出介绍当代数学的重大成就与应用；有的循循善诱启迪数学思维与发现技巧；有的富于哲理阐释数学与自然或其他科学的联系；等等，试图为人们提供全新的观察视角，以窥探现代数学的发展概貌，领略数学文化的丰富多彩.

丛书的读者对象，力求定位于尽可能广泛的范围. 为此丛书中适当纳入了不同层次的作品，以使包括大、中学生；大、中学教师；研究生；一般科技工作者等在内的广大读者都能开卷受益. 即使是对于专业数学工作者，本丛书的部分作品也是值得一读的. 现代数学是一株分支众多的大树，一个数学家对于他所研究的专业以外的领域，也往往深有隔行如隔山之感，也需要涉猎其他分支的进展，了解数学不同分支的联系.

需要指出的是，由于种种原因，近年来国内科技译著尤其是科普译著的出版并不景气. 在这样的情况下，上海教育出版社按照国际版权公约，不惜耗资购买版权，组织翻译出版这套《通俗数学名著译丛》，这无疑是值得称道和支持的举措. 参加本丛书翻译的专家学者们，自愿抽出宝贵的时间来进行这类通常不被算作成果但却能帮助公众了解和欣赏数学成果的有益工作，同样也是值得肯定与提倡的.

像这样集中地翻译、引进数学科普读物，在国内还不多见. 值得高兴的是，这项工作从一开始就得到了数学界许多人士的赞同与支持，特别是数学大师陈省身先生两次为丛书题词，使我

们深受鼓舞．到目前为止，这套丛书已出版了近20种，印数大多逾万，有的已经是第四次印刷，这对编译者来说确是令人欣慰的信息．我们热切希望广大读者继续关心、扶植这项工作，使《通俗数学名著译丛》的出版获得更大的成功．

让我们举手迎接数学科学的新的黄金时代，让公众了解、喜爱数学，让数学走进千家万户！

《通俗数学名著译丛》编委会

2001年8月

前言

圆、长方形、三角形及螺线这些图形在史前艺术和原始人的艺术品和装饰品中就有发现. 即使在人类出现之前,这些图形早就存在于自然界中,数量繁多的晶体就是最好的例证,其几何特征如此完美、神秘,直至今日人们还相信这些晶体的确是依照某种极为重要的原理生成的.

埃及的建筑显示出许多几何形态与特征,希腊早期的艺术因其所显现的样式而被称为是具有几何风格的. 或许是由于希腊人自身的爱好或天才,他们一着手观察几何图形,大量的几何性质就为他们所揭示. 另一方面,毕达哥拉斯三角形(Pythagorean triangle)的出现却远早于毕达哥拉斯(Pythagoras)所处的时代,甚至可追溯到石器时代.

曼尼克模斯(Menaechmus)在切割圆锥时发现了一些几何图形,两千年后人们才证明这些图形是解释行星运动的一个关键. 当阿基米德对许多平行的切片相加后求得了一些立体图形的体积时,他所做的就是积分计算.

数学史中许多最重要的进展是由敏锐的几何洞察力的飞跃所致,但并不排除对司空见惯的事物所起的作用. 具有讽刺意义的是最早以数学的目光对极不显眼的绳结进行观察的是拓扑学家,而绳结与人类的历史同样古老.

当今,分形学和混沌学的研究已揭示了一些图形的新的形态,这些形态如此美丽、神秘、深邃是人们始料不及的,同样,几

何学的思维方法在各门自然科学中正在不断显示其威力.

本书是企鹅辞典中《奇妙而有趣的数》的姊妹篇,但有不同.本书中几何图形的形态变化是如此的丰富,以至任何一本书都不能包含更多的样本.全书涉及的题材无非是镶嵌图案,或者是奇妙的拓扑性质,或者是一些极端的几何性质,这些极端的性质是与丰富的经典几何相比而言的.本书就是从这些丰饶的内容中选取的.

许多条目冠以发现者的人名(由于历史原因这些条目所冠的人名并不总是同一个人!),所有提及的人名可在本书的附录中找到,并在适当之处附以年代和原籍.少量的最新资料可参阅有关的专门杂志或书籍.

进一步的信息以及我很想收入但没能收入的许多条目可在列入文献的书籍中找到.可是,我还想说,我真诚希望读者们无论如何要如饥似渴地拿起笔和纸,亲自研究一下这些有趣的想法,因为这些想法将导致进一步去寻根问底.几何学与数论一样,与所有的数学分支一样,绝不是旁观者的运动!

我对几位版权持有者表示由衷的感谢,他们允许我使用他们在自己的著作或杂志中的插图.致谢如下:

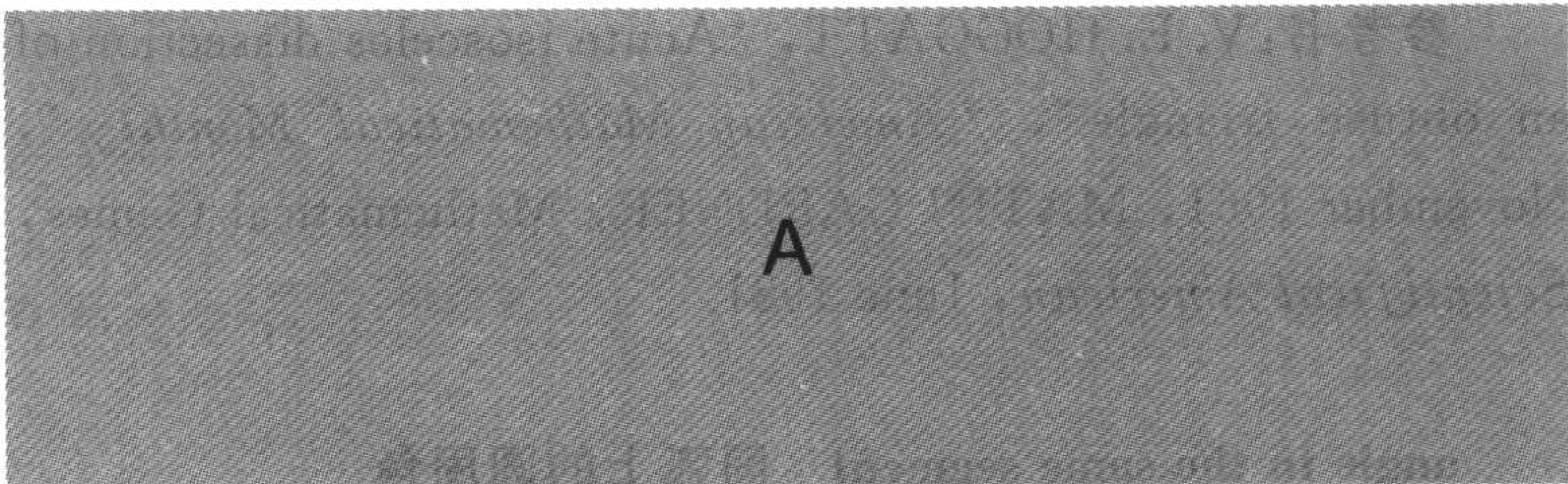
我应该再一次感谢大卫·辛马斯特为我提供了博览群书的机会;感谢彼得·梅厄对我提出了许多有益的建议;感谢约翰·奥德利斯科尔给了我不少亲手画的插图;我还要感谢企鹅书局的拉维·密强旦尼,他热情而耐心地校阅了本书.

最后我还要感谢约翰·夏普,他用计算机为我制作了不少插图,在许多情况下改进了传统的表现方法,还制作了一些以前从未见过的东西.

鸣　　谢

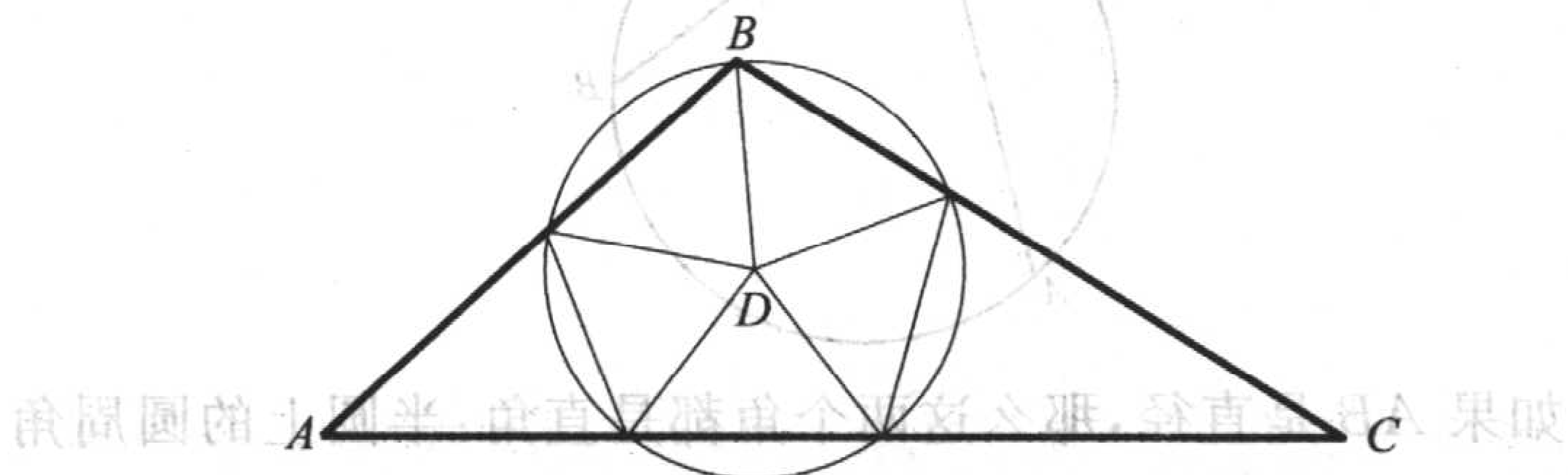
作者和出版商十分感谢以下各位同意本书复制插图：R·笛克松(《数学图集》，第 165～166 页)；巴西尔·布拉克维尔(牛津，1987 年，费尔马螺线及反演条目)；P·杜·卡莫(《曲线和曲面的微分几何》，第 223～224 页)；普赖梯斯·豪和恩格伍特·克利夫(新泽西，1976 年，螺旋面条目)；马丁·加德纳(选自《科学的美国人》的关于数学博弈的第六本书)；W·H·富利曼(旧金山，1971 年，台球在立方体内运动路径条目)；D·希尔伯特和 S·科恩-伏森(《几何与映射》，第 23 页)；切尔西亚出版公司(纽约，1952 年，正交曲面条目)；戴维·韦尔斯(《数学与联想》，第 31 页，剑桥大学出版社，1988 年，多面体的豪易结构条目)；美国数学协会(《数学杂志》1979 年第 52 卷(1)第 13 页，中国对毕达哥拉斯定理的图解)．

目　录

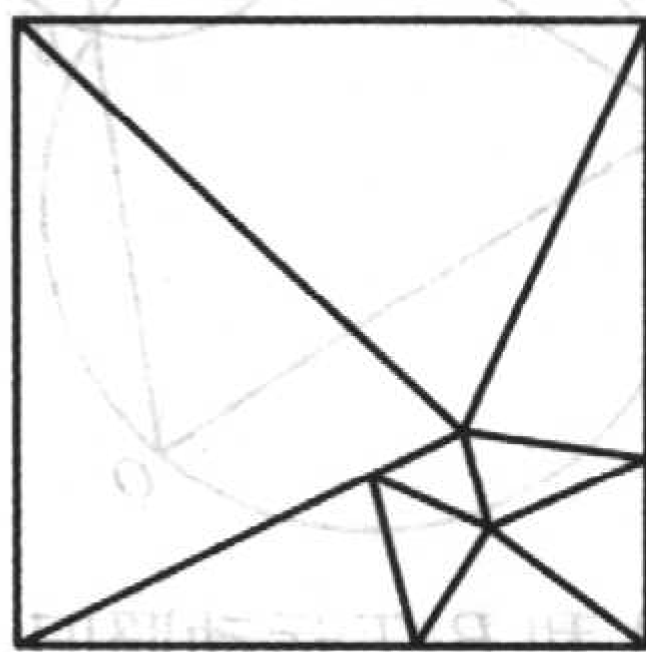


acute-angled triangle dissections　分割成锐角三角形

一个钝角三角形最少能分割成多少个锐角三角形？取该三角形的内心 D，以 D 为圆心，画一个圆经过顶点 B. 如下图，画出各三角形，这样就把原三角形分割成七个锐角三角形.



这一过程只有当 $B>90^\circ$，$B-A<90^\circ$ 且 $B-C<90^\circ$ 时才能进行. 如果这些条件不满足，那么过 B 向 BC 所作的直线割出一个锐角三角形，剩下的又是一个钝角三角形. 即使满足条件，也已共分成八个锐角三角形.



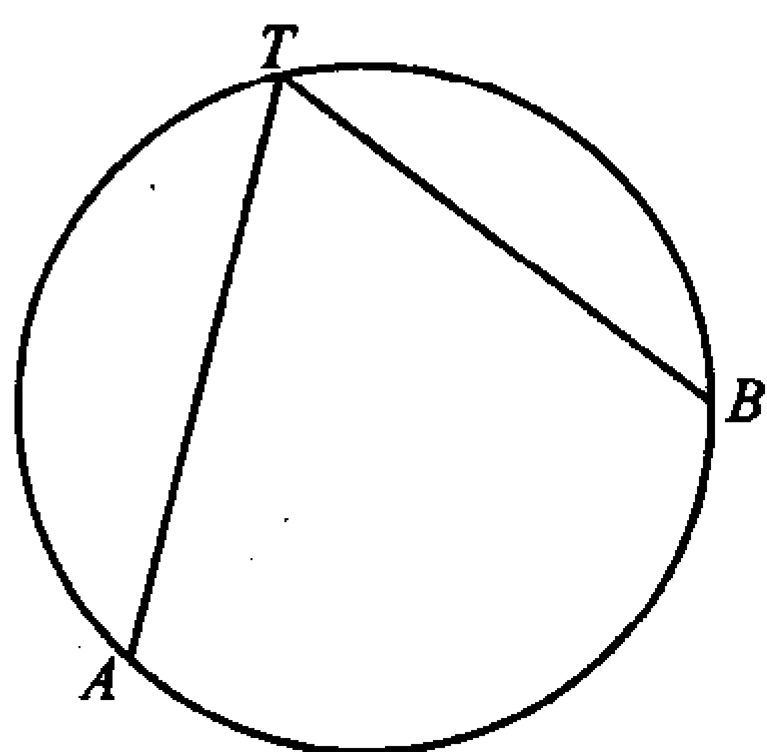
正方形可以分割成九个锐角三角形（如上图），其中有些角

很接近 90°.

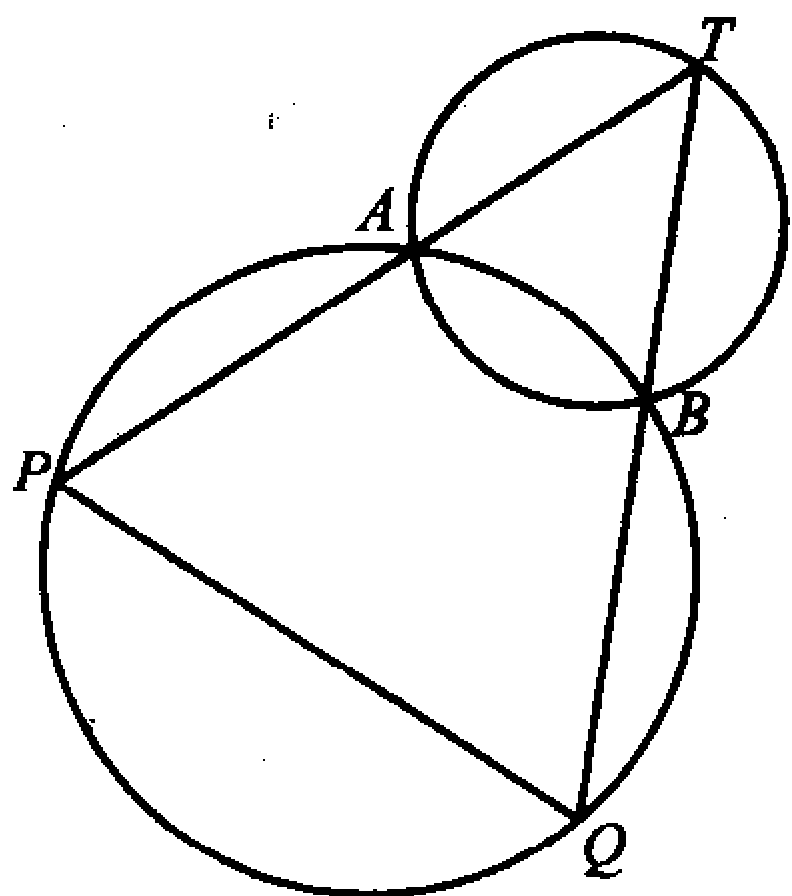
参考书：V. E. HOGGATT，'Acute isosceles dissection of an obtuse triangle'，'*American Mathematical Monthly*'，November 1961；MATIN GARDNER，Mathematical Games，*Scientifical American*，June 1981.

angle in the same segment　同弧上的圆周角

在圆上取两定点 A 和 B，T 是圆上的动点，则 $\angle ATB$ 的大小与 T 在优弧 AB 上的位置无关. 如果动点在劣弧 AB 上，如点 S，那么 $\angle ASB$ 等于 $180° - \angle ATB$.



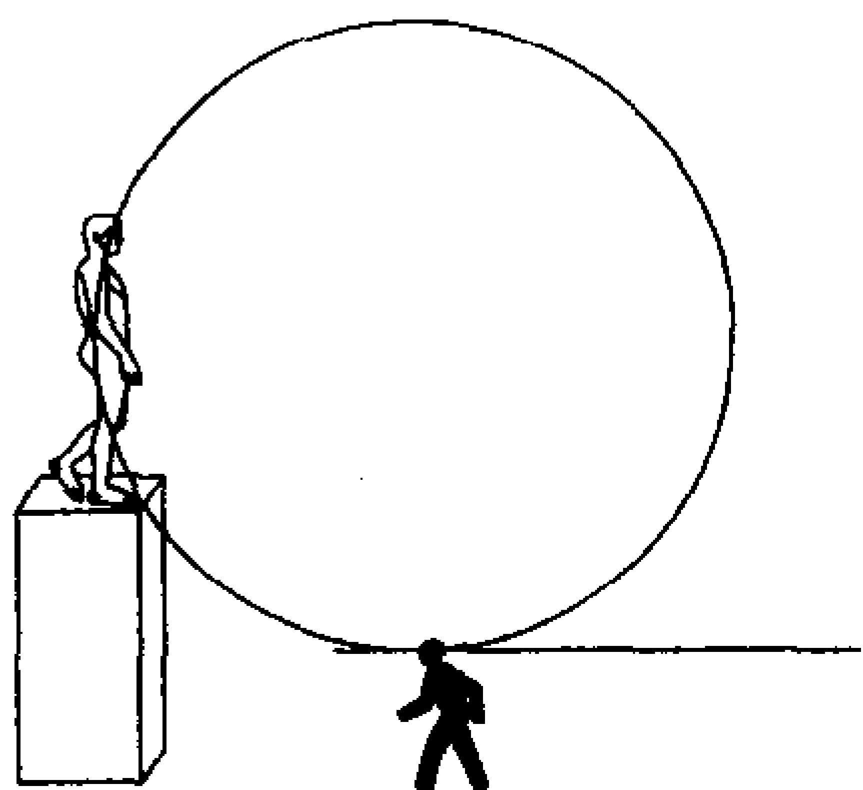
如果 AB 是直径，那么这两个角都是直角：半圆上的圆周角是直角. 这是泰勒斯(Thales)约在公元前 600 年发现的，而巴比伦人早在公元前 2000 年就认识到这一事实了.



如果两个圆相交于 A 和 B，T 运动照旧，那么弦 PQ 的长是常量.

雷基奥蒙塔奴斯(Regiomontanus)曾提出这样的问题：从什么

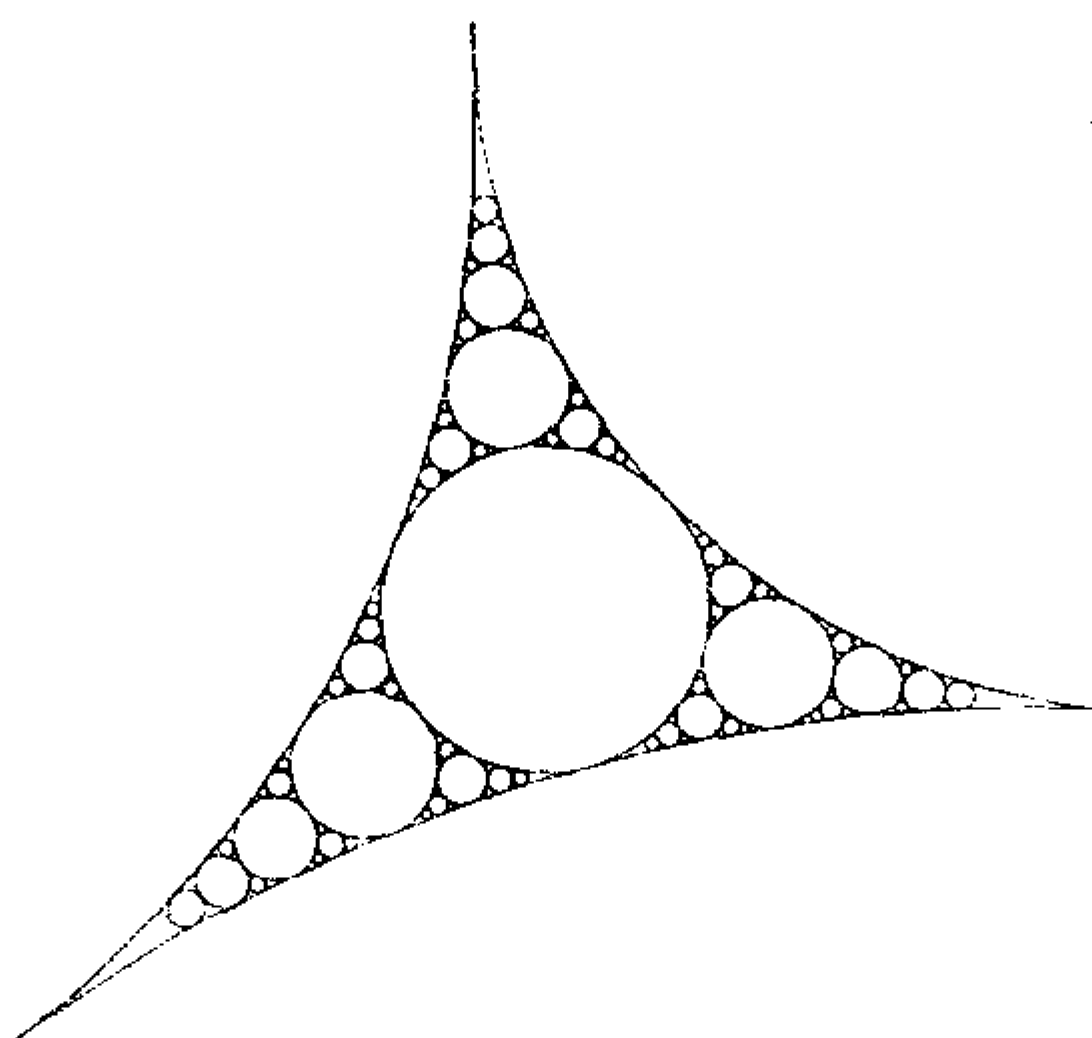
位置看，可使一个雕像显得最大？如果观察者太近，那么雕像显得很小；但是太远，那么雕像又显得小. 雕像对观察者的眼睛的张角最大时，就显得最大. 此时圆也从水平方向经过观察者的眼睛.



此后，这一问题曾被多次重提. 最近的提法是：如果橄榄球运动员在对方立柱间的试射没有得分，那么他应该选择在什么位置上触地得分？根据规则，触地得分的位置必须从与底线得分点起，垂直于球门底线的直线上.

Apollonian gasket *or* packing　阿波罗尼斯垫圆

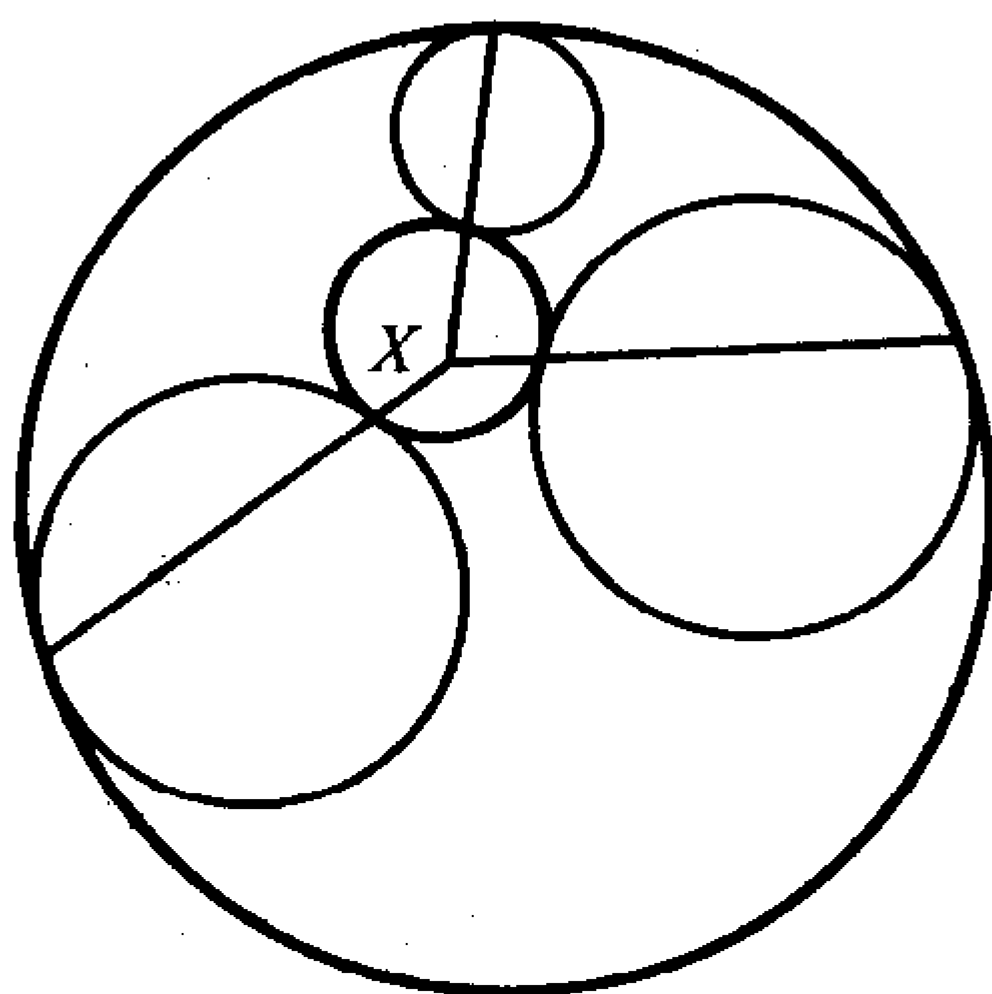
当三个圆两两相切时，它们组成一个曲边三角形. 在这个三角形中，还可以画一个圆与所有这三个圆相切，这样又组成三个曲边三角形. 这个过程可以不断重复. 下图表示在这个曲边三角形中形成阿波罗尼斯垫圆的最初几步.



不在所有这些圆的内部的点形成一个面积为零的集合，可以说它多于一条线，但少于一个面. 因此它的分形维数介于 1 和 2 之间. 虽然还不知道它的精确值，估计约在 1.3 左右.

Apollonius' problem　阿波罗尼斯问题

作一个与三个已知圆都相切的圆这一问题首先由波尔卡城的阿波罗尼斯(Apollonius of Perga)提出并解决. 在最一般情况下有 8 个解：其中一个圆与所有这三个圆相切但不包含任何一圆，一个圆与所有这三个圆相切且包含所有这三个圆，三个圆包含其中一个圆，三个圆包含其中两个圆.（求一个球与四个已知球相切这一类似问题在最一般情况下有 $2\times2\times2\times2=16$ 个解.）



上图中内外两圆都与另外三个圆相切，连接切点所得到的三条直线相交于一点 X. 由此可得，任何一个与其他圆同时内切和外切的圆也有与 X 同一直线的切点.

对于每一组四个相切的圆，都存在着另一组四个相切的圆，这四个相切的圆恰好切于同样的六点.

给出两两相切的三个圆的大小，与这三个圆都相切的各个圆的大小的相关公式是什么？最简单的公式不用每个圆的半径，而用半径的倒数——“曲率”.

法国数学家和哲学家笛卡儿(Descartes)给出了一个公式，

这个公式等价于下列关于彼此相切的四个圆的曲率的一个公式：$2(a^2+b^2+c^2+d^2)=(a+b+c+d)^2$.

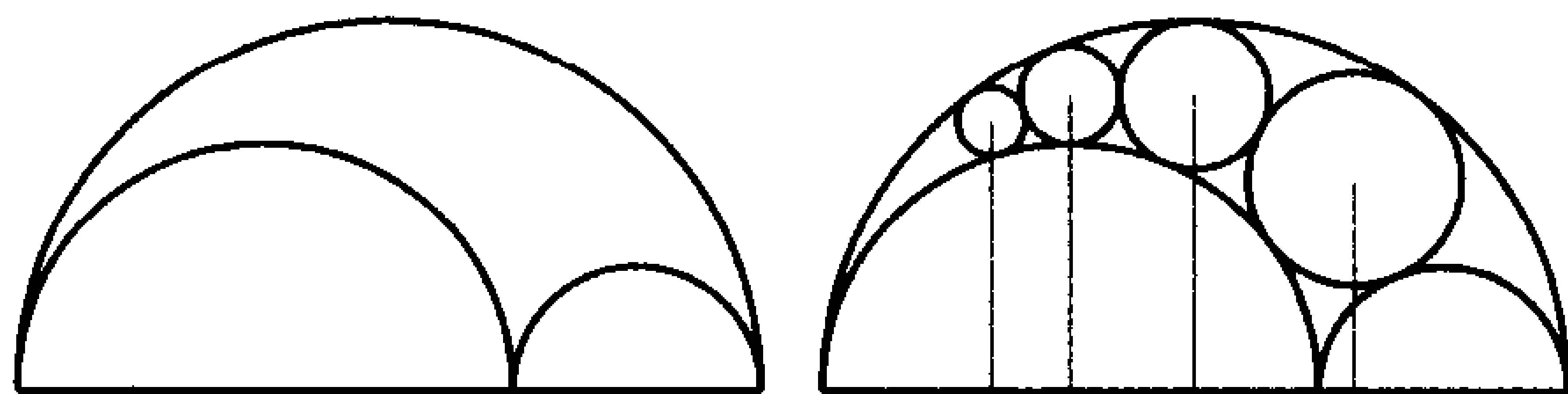
对于八个可能的圆的公式只有一个. 因为如果另外有一个圆与它内切，那么这个圆的曲率可以看作是负的.

这一公式在 1842 年被重新发现，而在 1936 年又被索迪六球定理的（Soddy's hexlet）的发现者弗里德利克·索迪（Fridrick Soddy）爵士重新发现. 这使他非常高兴，写了一首诗给《自然》杂志表示庆贺. 其中间一段是：

四个圆来相吻，
越是小越是弯.
离圆心距离远，
其曲率越是小.
使出小小机谋，
欧氏无言可对.
现已经验勿需：
直线曲率为零，
凹形曲率为负.
所有四圆曲率，
平方相加等于，
和平方的一半.

arbelos　鞋匠刀

由在同一直线上的三个半圆围成的图形被阿基米德（Archimedes）称为 arbelos（希腊语中是鞋匠刀的意思），他求得了与三个半圆都相切的圆的半径.

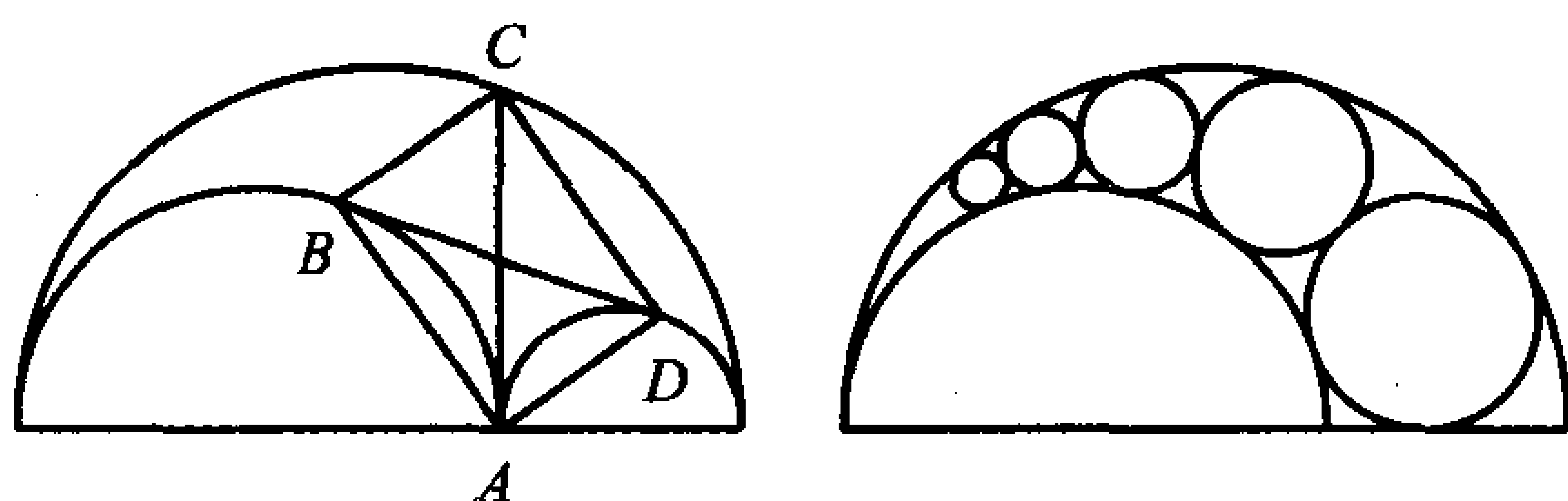


五百年后，帕普斯(Pappus)把以下事实描绘为一个古代问题的结果：如果在鞋匠刀内画一连串相切的圆，那么第 n 个圆的圆心离底线的高度是它的直径的 n 倍.

各圆的圆心在一个椭圆上，该椭圆的长轴是底线，各个切点在同一个圆上.

阿基米德证明了鞋匠刀的面积等于以 AC 为直径的圆的面积. AC 和这两个较小的半圆的另一条切线 BD 一起，给出矩形 $ABCD$.

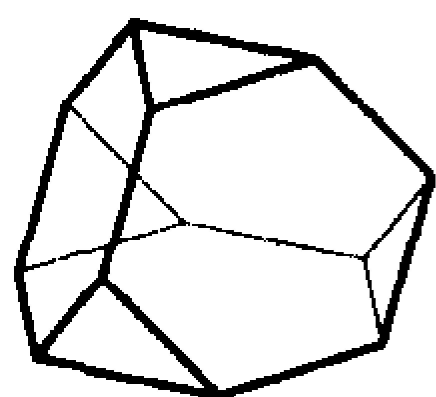
阿基米德还证明：如果鞋匠刀内两个内切圆位于 AC 的两侧，并与 AC 相切，那么这两个圆相等.



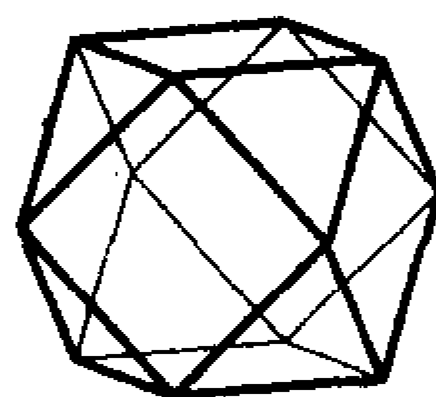
上面的右图中少了一个半圆. 此时第 n 个圆的圆心离底线的高度是相应的圆的半径的 $2n-1$ 倍. 大多数鞋匠刀图是斯坦纳(Steiner)圆链的特殊情况.

Archimedean polyhedra　阿基米德多面体

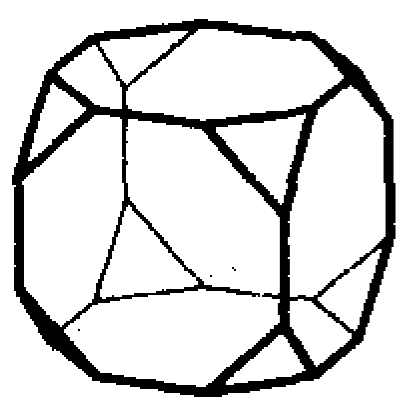
按照帕普斯的说法，阿基米德曾研究过 13 种半正多面体. 它们的面都是正多边形，但是有两种或两种以上，每一个顶点都相同.



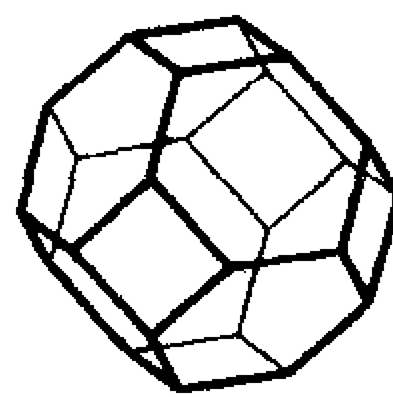
截头正四面体



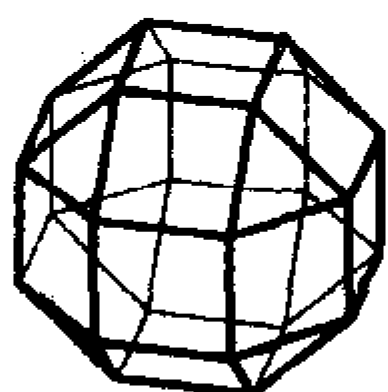
立方正八面体



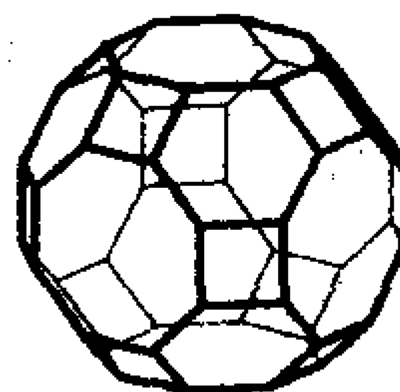
截头正方体



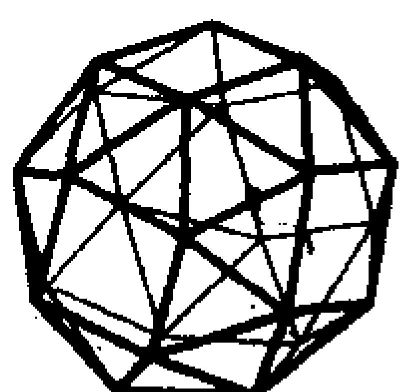
截头正八面体



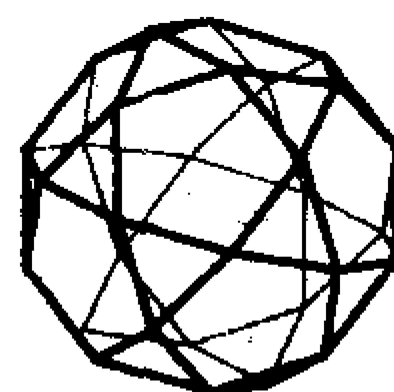
小菱形立方正八面体



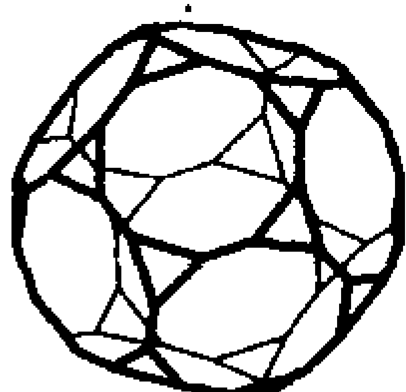
大菱形立方正八面体



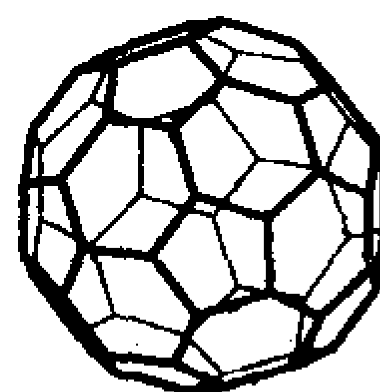
扁鼻正方体



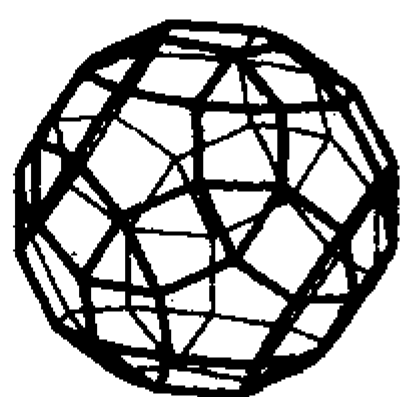
正二十-十二面体



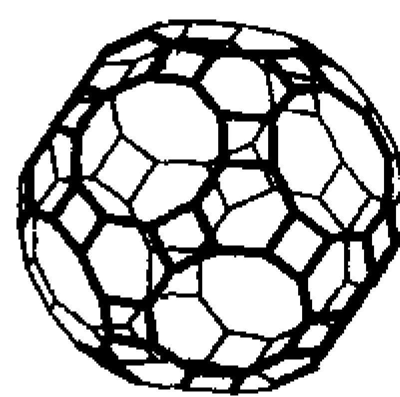
截头正十二面体



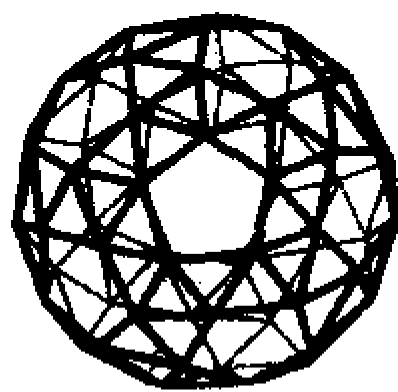
截头正二十面体



小菱形正二十-十二面体



大菱形正二十-十二面体



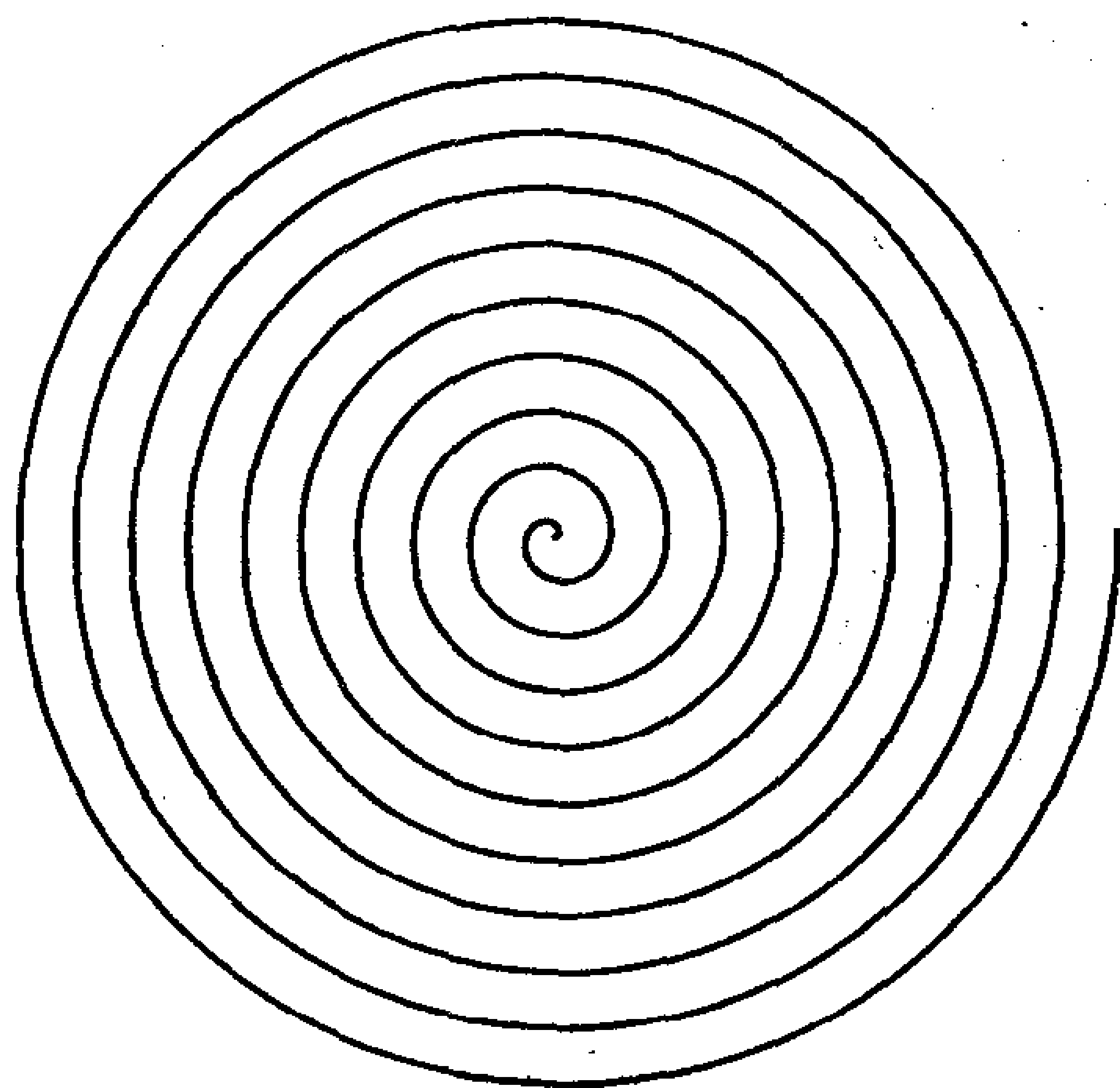
扁鼻正十二面体

这些图形中的十一个可以用截头的方法得到,其中九个是截去正多面体的顶点或者顶点和棱得到的.例如,立方正八面体是一个被截头的正方体,这个正方体被截得很多,使截得的三角形的顶点在原来的棱的中点处相交;其余的都是从前九个中的两个截得的.

扁鼻正方体和扁鼻正十二面体可将正方体或正十二面体的各个面向外移动,然后扭转一下,再用一串串等边三角形填补外移后造成的空缺.由于对于每一个面来说,可以向左扭转,也可以向右扭转,所以它们都有两种形式,这两种形式互成镜对称.

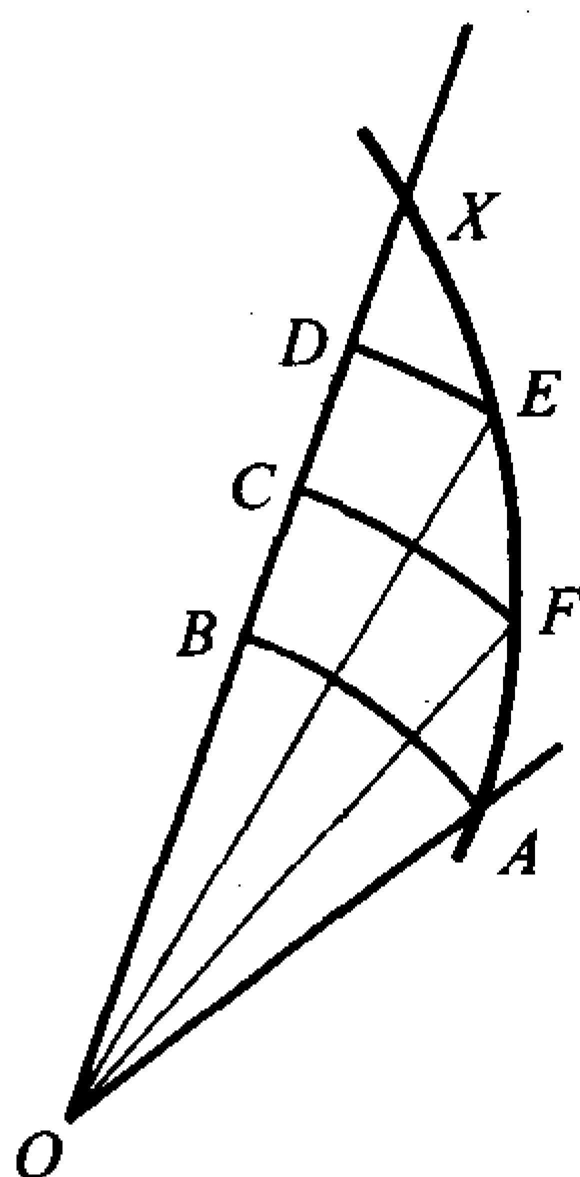
Archimedean spiral　阿基米德螺线

阿基米德在他的《论螺线》一书中所研究过的这条曲线是在以常速转动的直线上离一定点作匀速运动的点的轨迹.



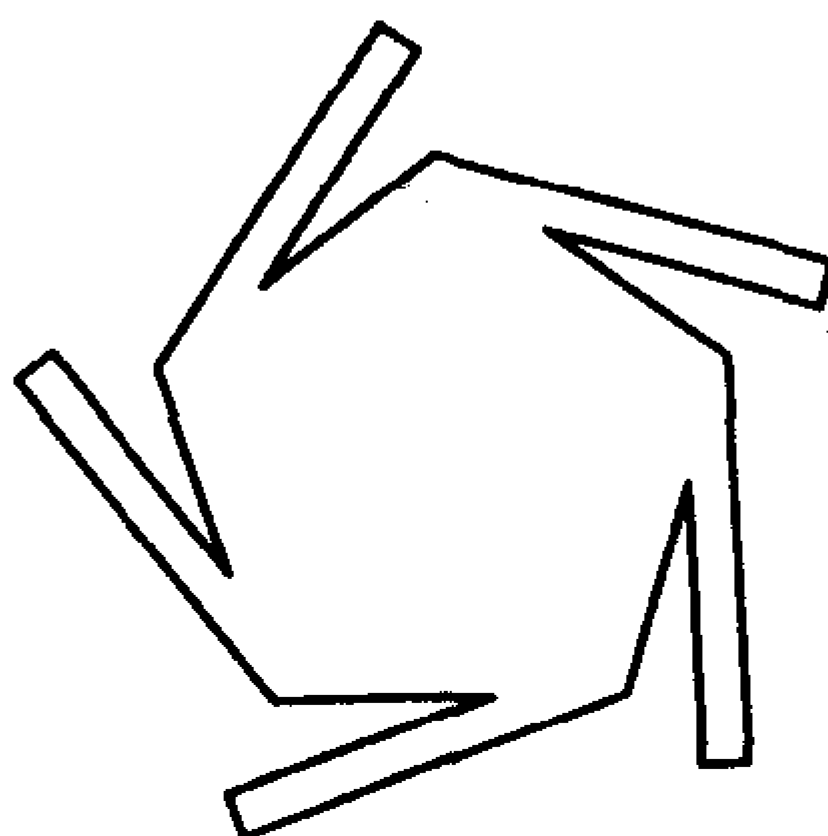
如果该定点是原点,那么螺线的极坐标方程是 $r=a\theta$. 如果 $a>0$,那么点离开原点运动时,它绕原点逆时针转动;如果 $a<0$,那么它绕原点顺时针转动.

阿基米德螺线可以用来三等分任意角，实际上可以任意等分一个任意角. 例如，要三等分$\angle XOA$. 设 $XEFA$ 是阿基米得螺线的一部分. 作 OB 等于 OA，然后把 BX 三等分，得到分点 C 和 D. 再以 O 为圆心，过点 C 和 D 画弧，交螺线于 E 和 F. 于是 OE 和 OF 就三等分$\angle XOA$.



art gallery theorem　艺术画廊定理

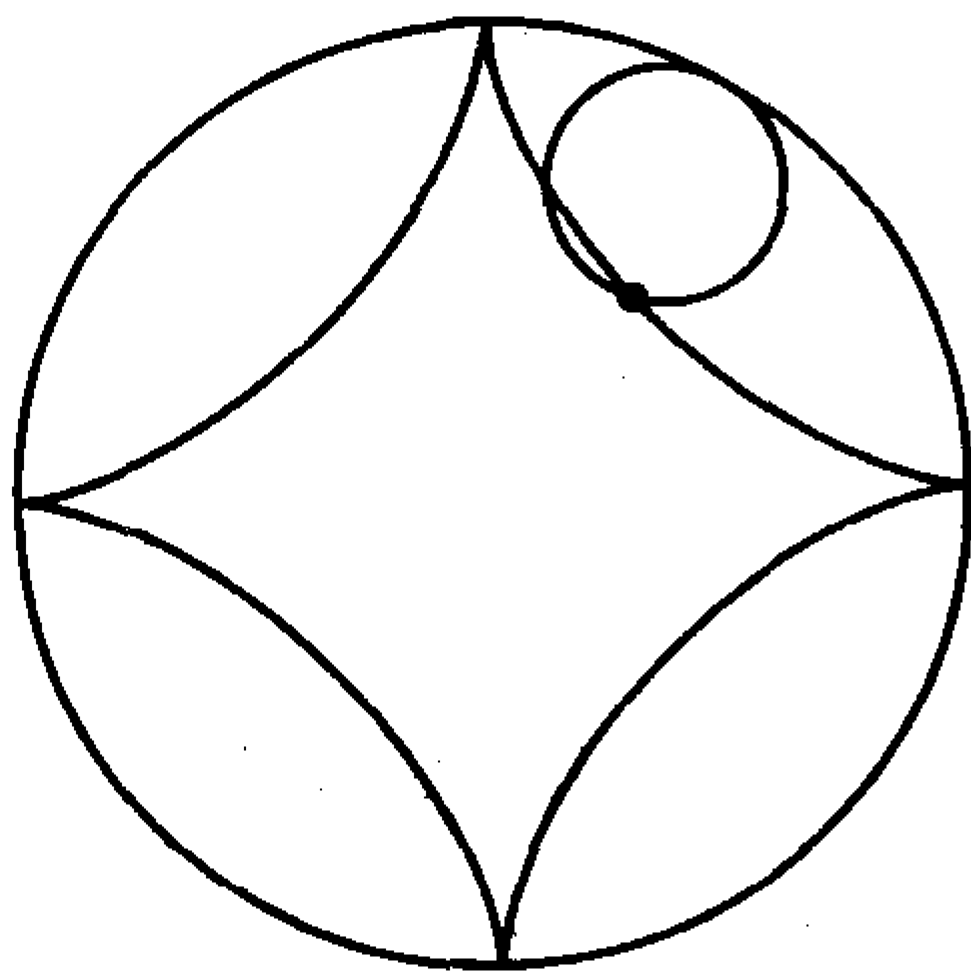
在 1973 年的一次数学大会上，伐塞特·奇伐淘尔（Vaset Chvatal）要维克多·克里（Victor Klee）提供一个有趣的几何问题. 克里提供了一个新奇的问题作为答复：为了不停地监视艺术画廊的所有的墙面，需要多少个卫兵？



如果艺术画廊是一个有 N 个凹顶点的多边形，那么有 N 个卫兵总是够的，有时是必须的. 对于艺术画廊的每一个分叉，一个卫兵就够了(如图所示). 这些卫兵中的任何一个(或几个)也可以监视艺术画廊的中心.

astroid *or* hypocycloid of four cups　星形线或四尖角内摆线

星形线是一个小圆在一个四倍于其直径的圆内滚动时，小圆上一点的轨迹，根据丹尼尔·贝努里(Daniel Bernoulli)的理解，也可以说定圆内有一个直径为其四分之三的小圆在滚动时，小圆上一点的轨迹.



有趣的是除了四个可见的尖角以外，还有两个虚角.

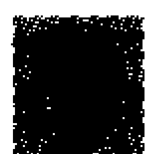
如果一个圆在其直径的两倍的圆内滚动时，那么这个滚动的圆的直径的包络是星形线. 滚动的圆的直径的两端永远位于定圆的一对互相垂直的直径上，所以也是一条定长的线段在两条这样互相垂直的直线上滑动时的包络.

如果定圆的半径是 a，那么星形线的方程是

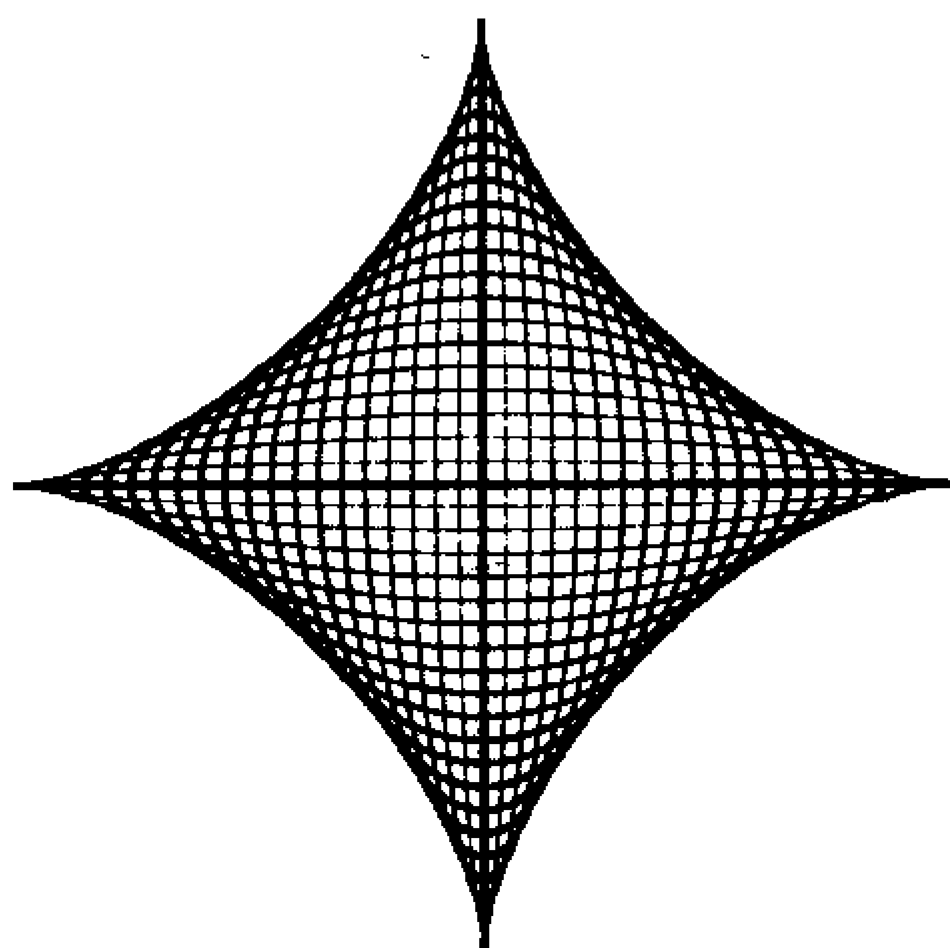
$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}.$$

这一方程出现于莱布尼兹(Leibniz)在 1715 年的信函中.

星形线的面积是其外接圆的面积的八分之三，也是其内切圆的面积的一倍半.

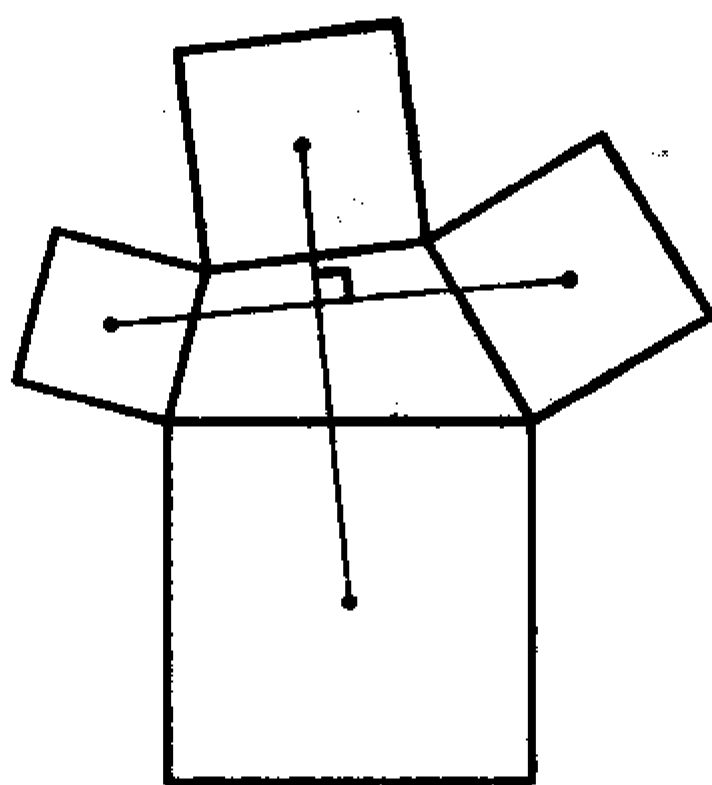


下图表明，星形线是一族椭圆的包络，这些椭圆的两条轴在同一对互相垂直的直线上，长短轴之和是常数.



Aubel's theorem　奥倍尔定理

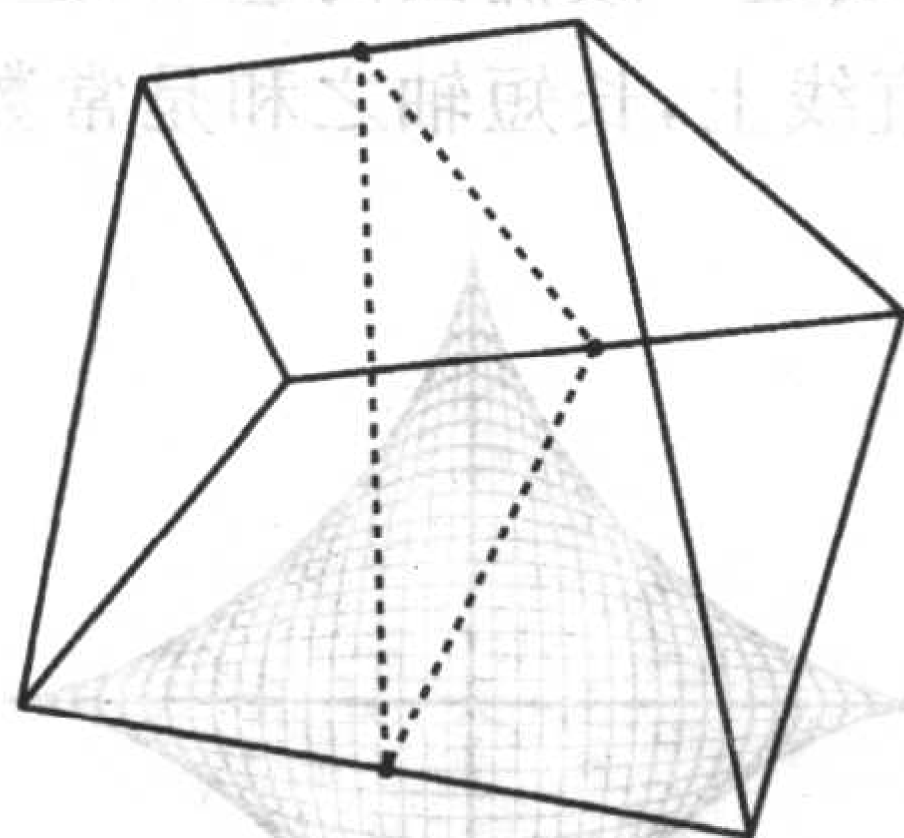
任意画一个四边形，不必是凸的，即使其中一边的长度是零也没有关系. 以它的各边为边在形外各作一个正方形. 连接相对的两个正方形的中心的线段的长度相等且互相垂直.



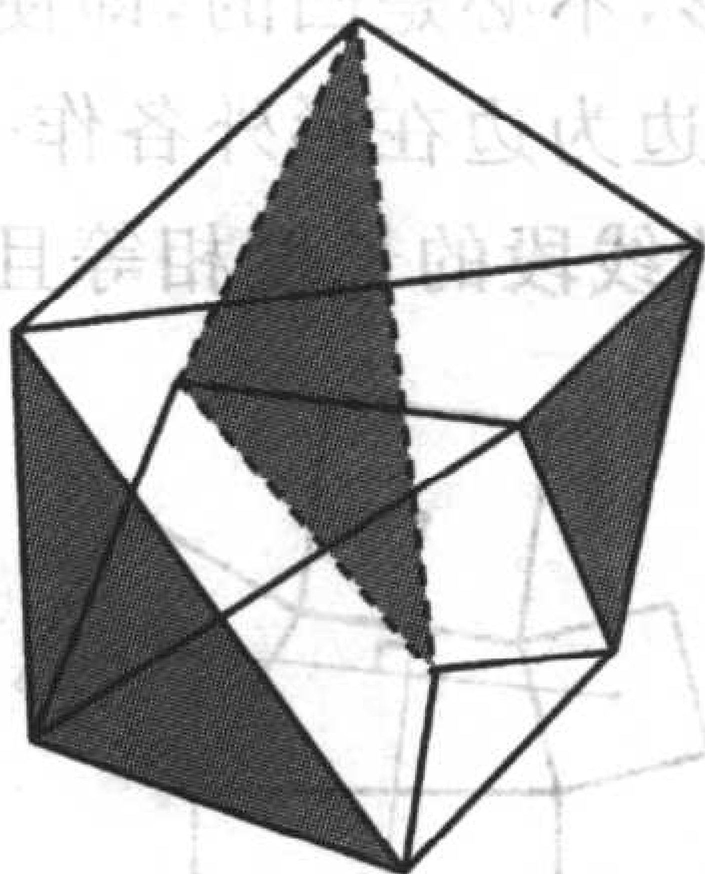
如果反向作这四个正方形，即向里作，那么相对的两个正方形的中心仍可用互相垂直的两条等长线段连接. 此外，这两条较短的线段连同图中两条线段一共只有两个中点，连接这两个中点的线段的中点是原四边形的四个顶点的重心.

average of two polygons　两个多边形的平均多边形

任意画两个同向的相似三角形（其中之一不能翻转）. 连接

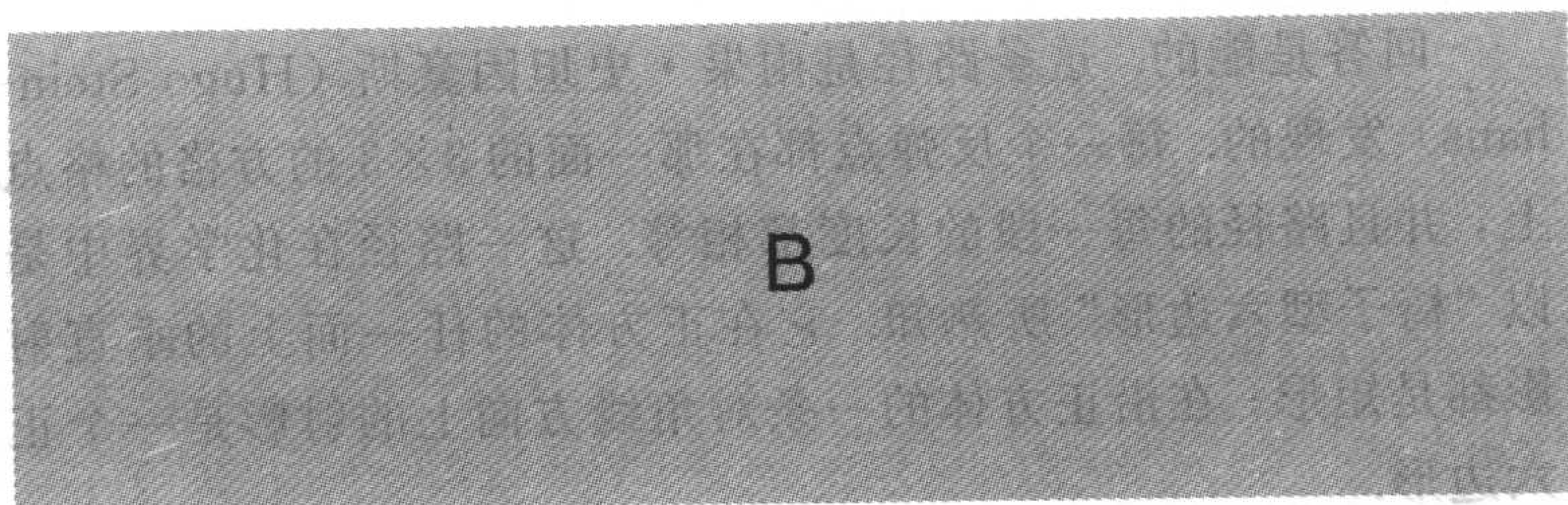


对应顶点的线段的中点组成平均三角形，它与原来的两个三角形相似. 一般地，对于多边形同样的结论也成立. 如果不取各连接对应顶点的线段的中点，而把各线段分成同样的比，结论也成立，也是下图所示的定理的特殊情况：



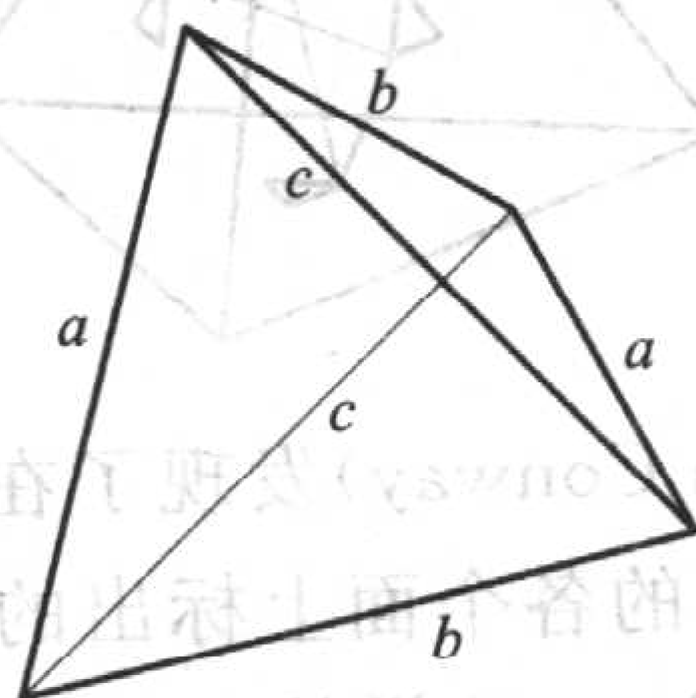
取两个同向的相似三角形，以它们的对应顶点的连线为边再作三个与它们相似的三角形. 这些新三角形的第三个顶点形成一个与原来一对三角形相似的三角形. 一般情况下的拿破仑(Napoleon)图形也是这一定理的特殊情况.

曾被发现过多次的另一种特殊情况是：如果两个正方形 $ABCD$ 和 $XYZD$ 有共同的顶点 D，那么连接线段 AX 和 CZ 的两个中点和两个正方形的中心形成另一个正方形.



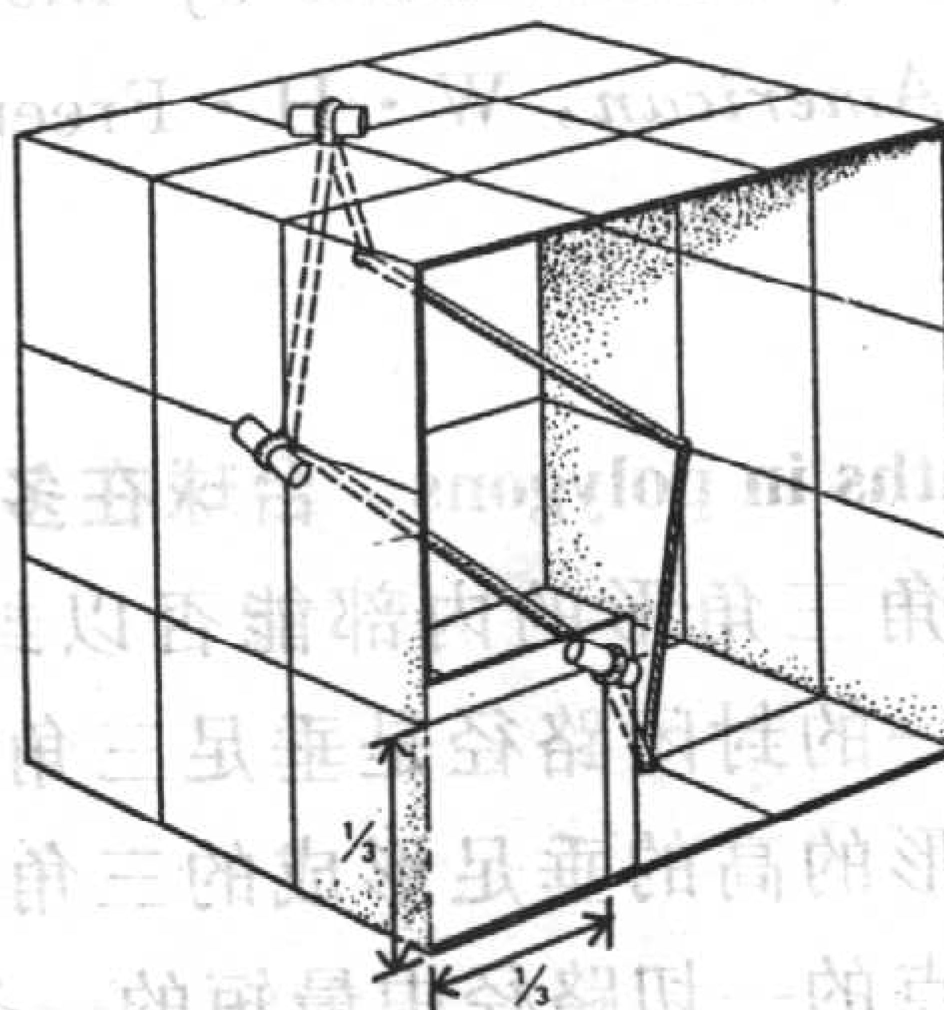
Bang's theorem　彭氏定理

只有当四面体的各个面都是全等的三角形时,它的各个面的周长相等.如果各个面的面积都相等,那么各个面都是全等的三角形.



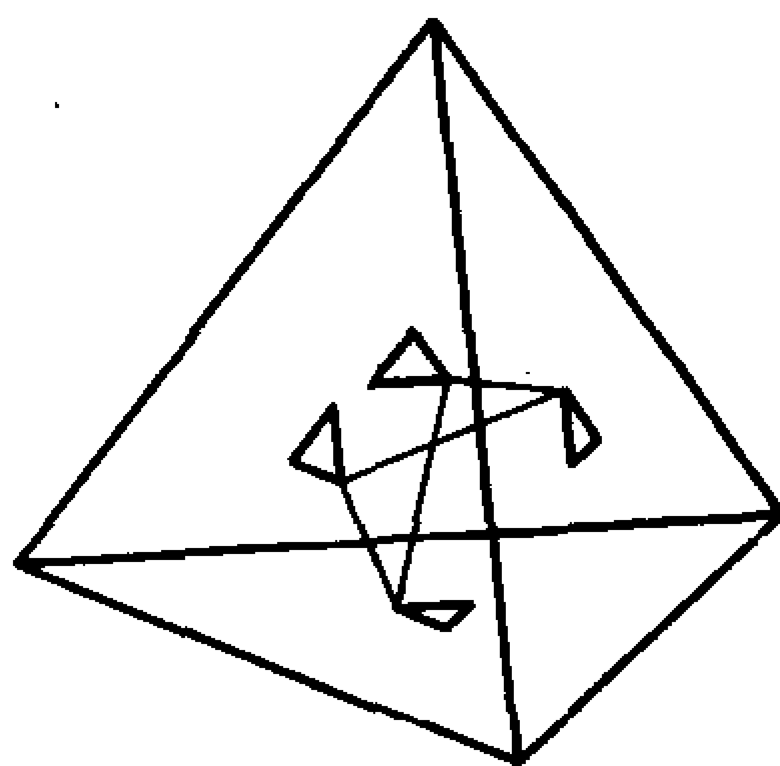
billiad ball path in a cube and a regular tetrahedron　台球在正方体内和在正四面体内运动的路径

一个台球在正方体的内部连续反弹经过一圈后是否总是能



回到出发点？

回答是能的. 这条路径是雨果·史坦因豪斯（Hugo Steinhaus）发现的. 每一个反弹点都在那一面的3×3的方格的格点上，并且路径的每一段的长度都相等. 这一路径在化学界中是以“椅子型六边形”所熟知. 它在正方体的任一面上的垂直射影都是矩形；在沿正方体的一条对角线方向上的射影是一个正六边形.



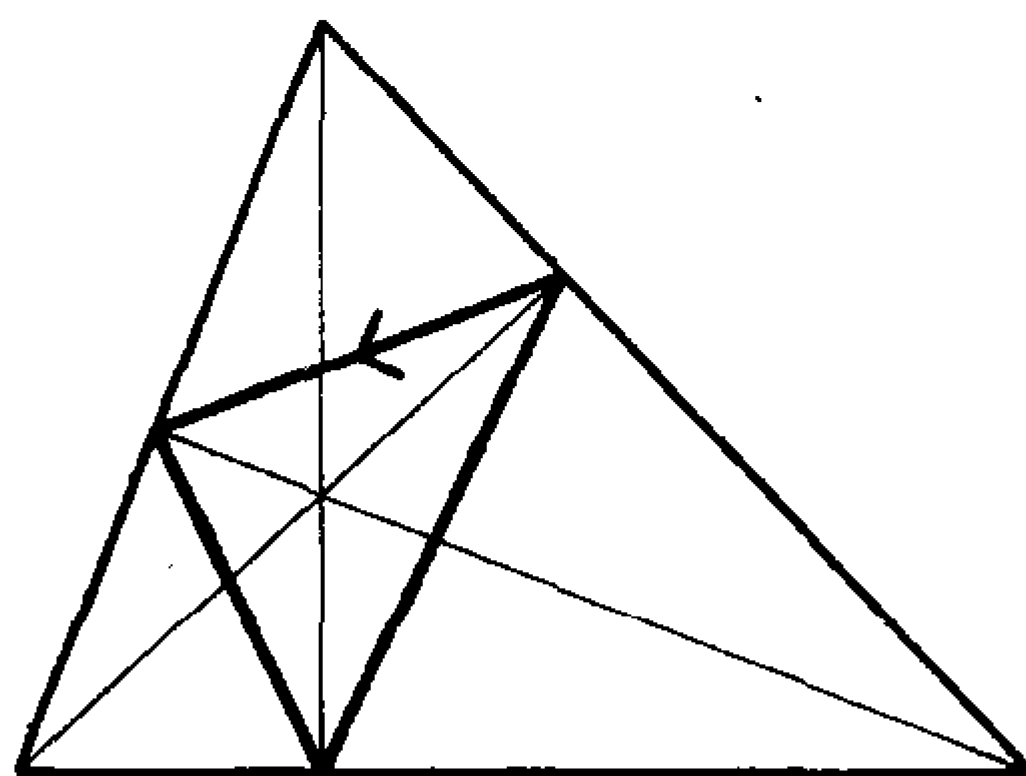
约翰·康威(John Conway)发现了在正四面体内的一条类似的路径. 在正四面体的各个面上标出的小三角形的边长是原三角形的边长的十分之一. 这样的路径有三条，一个小三角形的每一个角都有一条.

参考书：马丁·加德纳（MATIN GARDNER），选自《科学的美国人》关于数学游戏的第六本书，W·H·富利曼出版社，旧金山，1971年（*Sixth Book of Mathematical Games from Scientifical American*，W·H·Freeman，San Francisco，1971）.

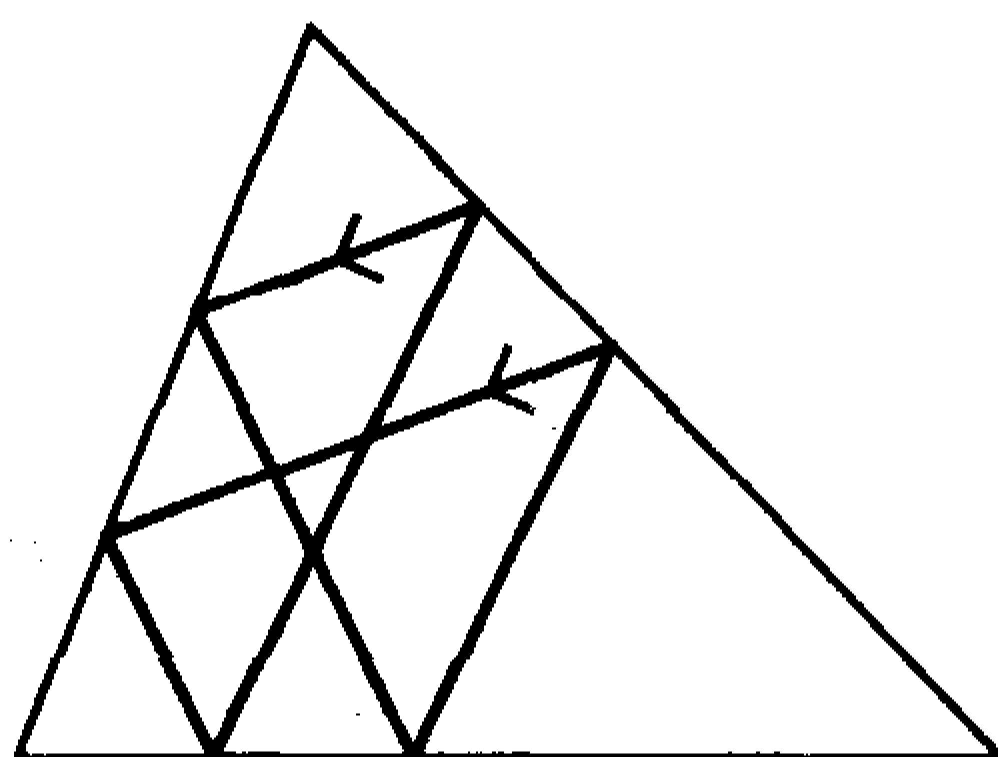
billiard ball paths in polygons　台球在多边形内的运动路径

一个台球在锐角三角形的内部能否以封闭的运动路径反弹？一圈回路的唯一的封闭路径是垂足三角形，所谓垂足三角形指的是连接三角形的高的垂足形成的三角形，它是依次连接三角形的三边上的点的一切路径中最短的一条.

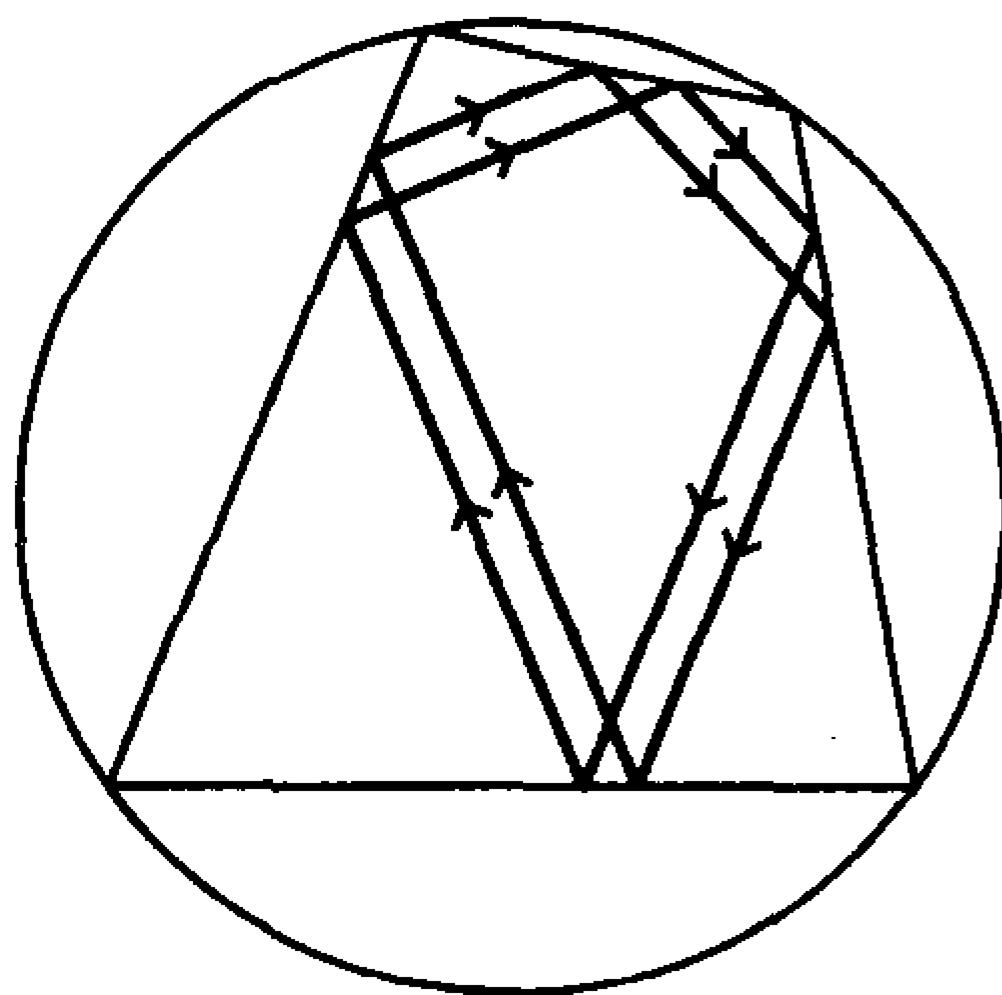




如果球在回到出发点之前可以不止运动一圈，也可以重复，那么无穷多种的回路路径是可能的，但是路径每一段都平行于垂足三角形的边：



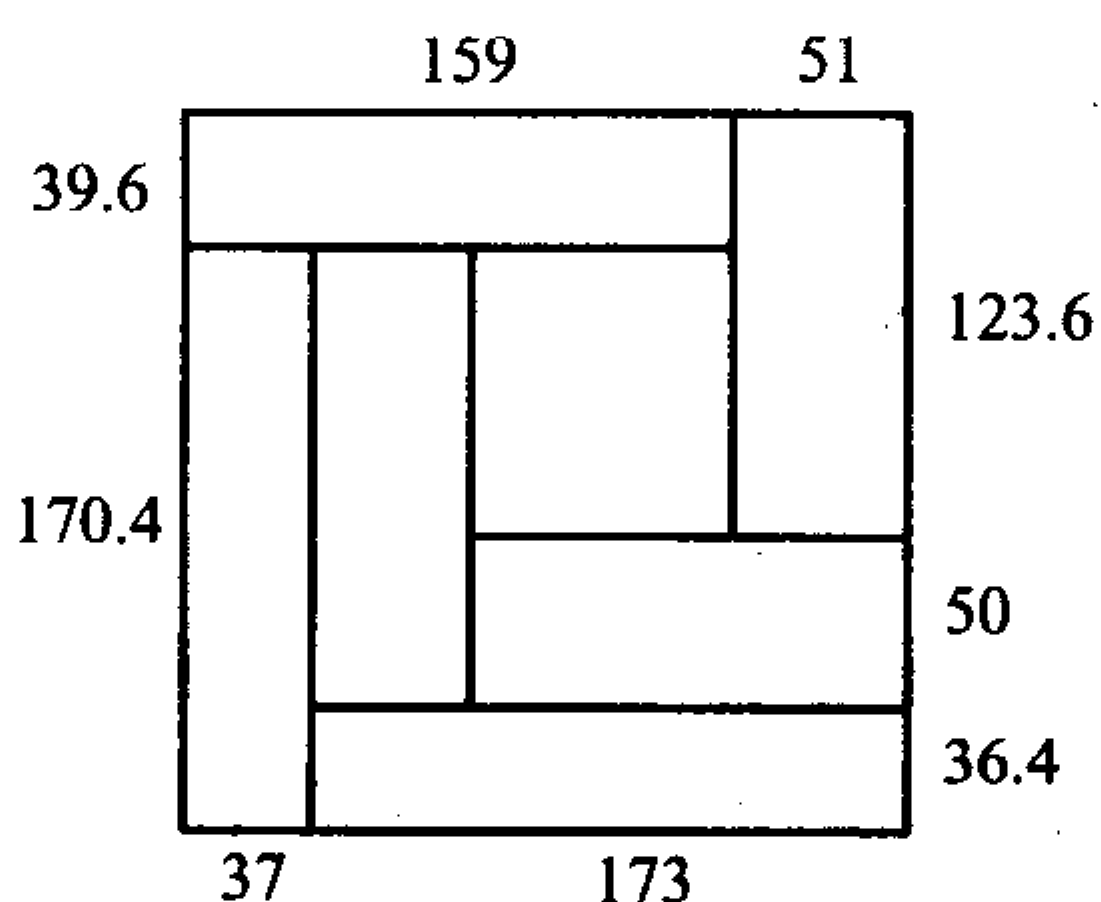
如果一个四边形是圆内接四边形，并且圆心在该四边形的内部，那么封闭的运动路径在四边形中是可能的.



Blanche's dissection　布朗切分割

众所周知，把一个矩形分割成大小各不相同的正方形是一

个相当困难的问题.将这一问题转变为把一个正方形分割成不同大小的矩形就容易了,但能否使这些矩形的面积相同而形状不同呢?

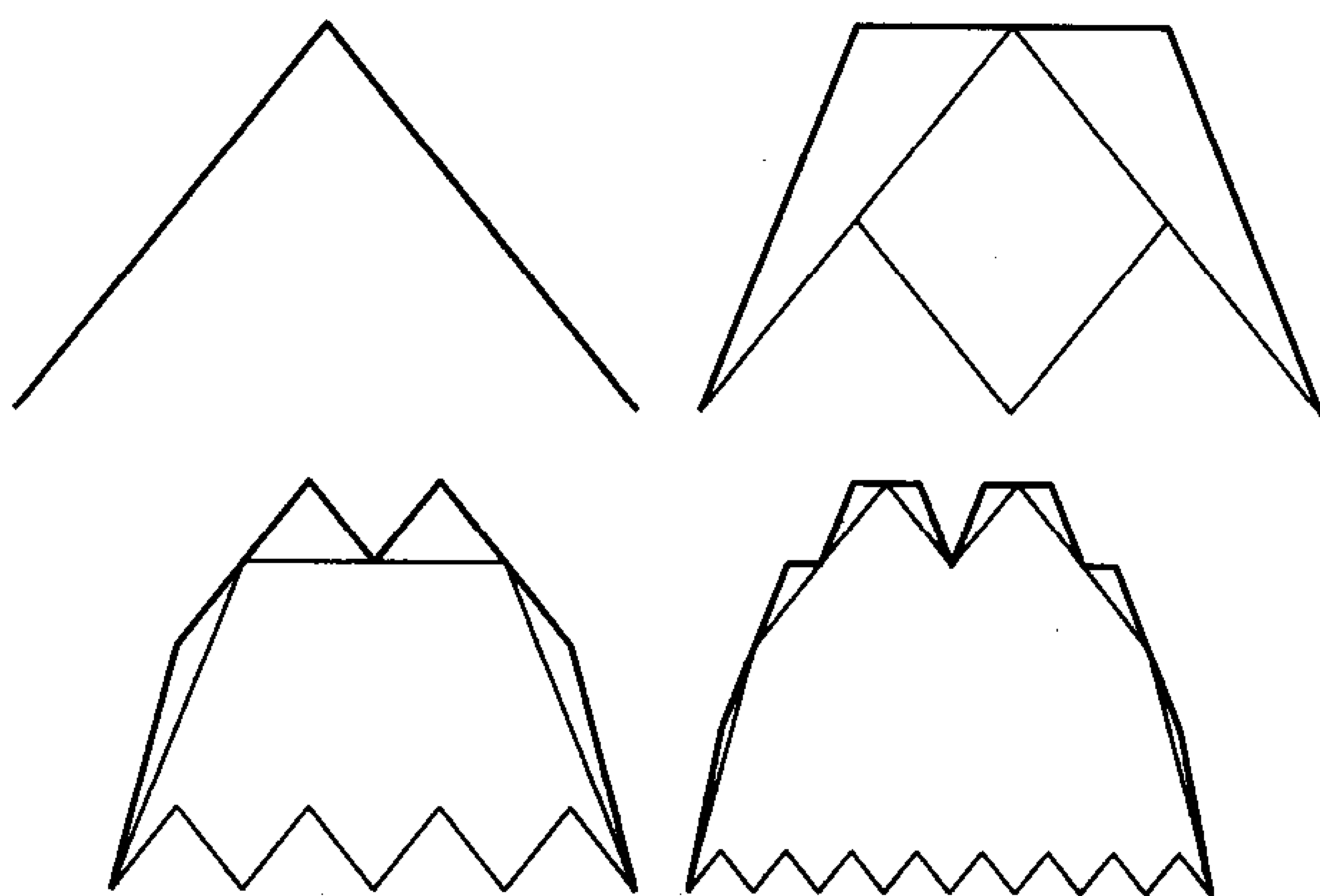


左图是把矩形分成七块的一组的最简单的解,图中可见各矩形的可能尺寸.

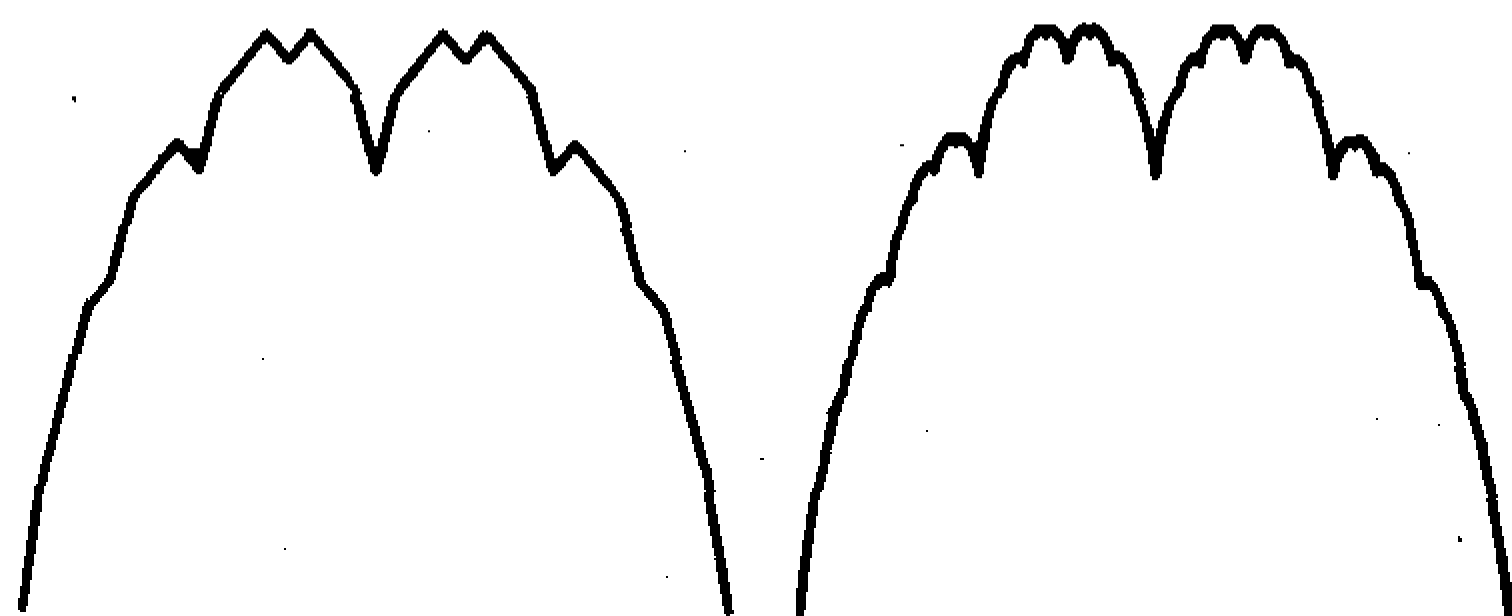
参考书:BLANCHE DESCARTES,把正方形分割成矩形(Division of a square into rectangles), Eureka, No. 34, 1971.

blancmange curve　冻胶曲线

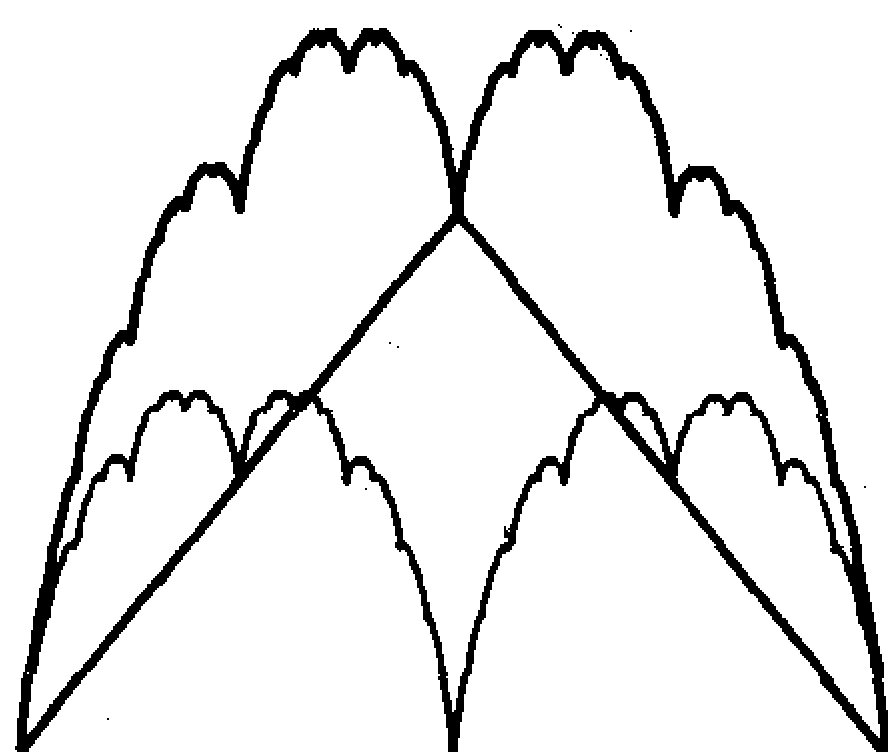
作一连串锯齿状曲线,使每一个的高度都是前一个的一半,锯齿的个数是前一个的两倍.无限地进行这一过程,并把这些曲线迭加起来.结果就得到处处连续但处处没有切线的冻胶曲线.构成它的前四步如下图所示.除了第一个图以外的每一个图中,粗线是前一阶段和新的锯齿状曲线的叠加.



第五步更突出地显示了冻胶曲线的形状;第十八步已经很难区分出该曲线和经过无限步以后所呈现的模样的区别了:

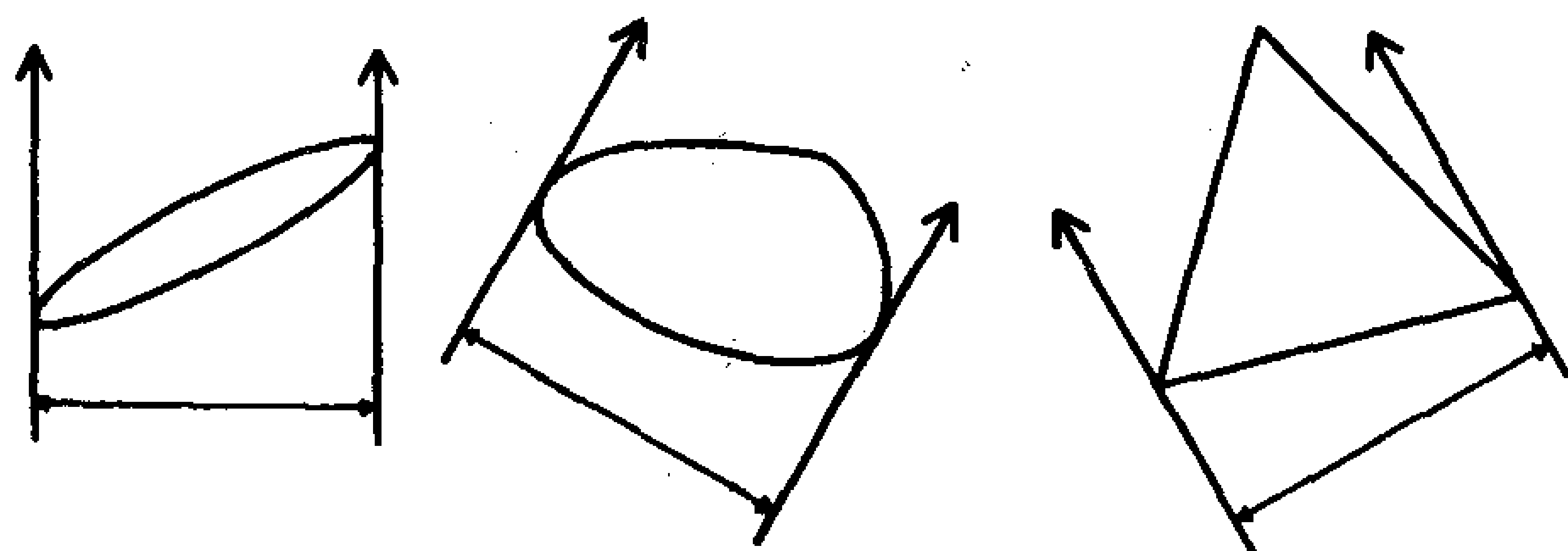


下图表示冻胶曲线的另一个性质.在两个冻胶曲线上作一个45°的锯齿,然后把它们迭加起来:结果是一个单个的,更大的冻胶曲线.



Blashke's theorem　布拉士克定理

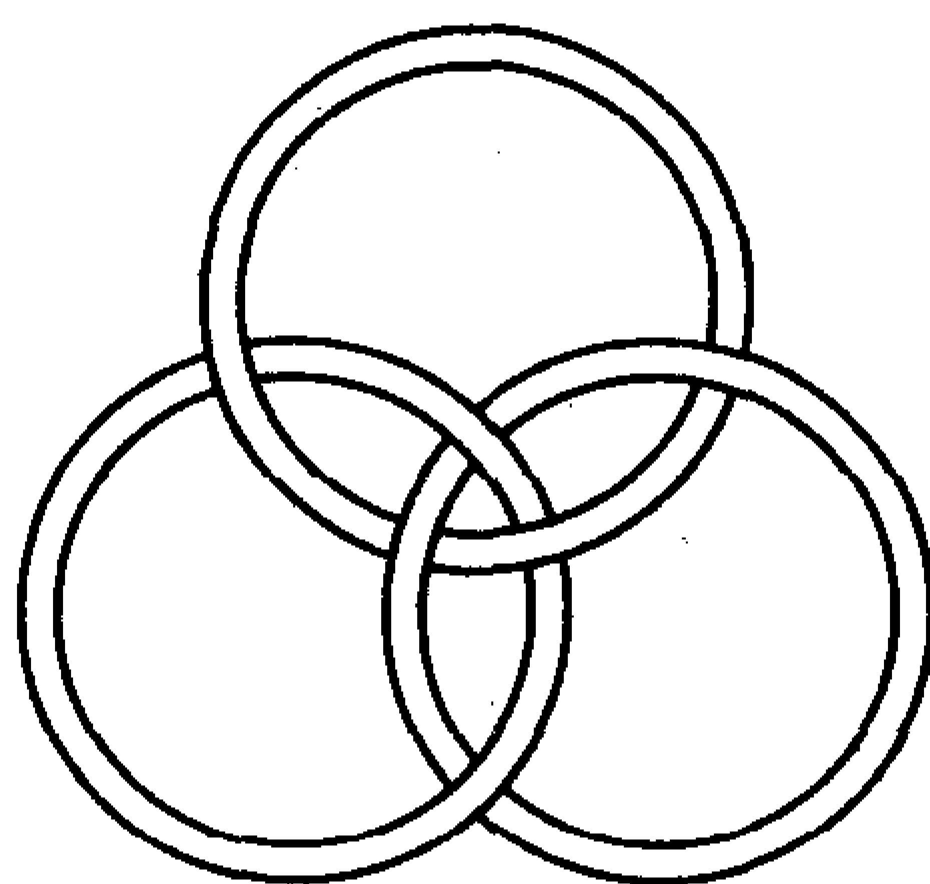
封闭凸曲线在给定方向上的宽度是包含该曲线,且垂直于该方向的两条最靠近的平行线之间的距离.下图表示三条封闭曲线在给定的方向上的宽度.



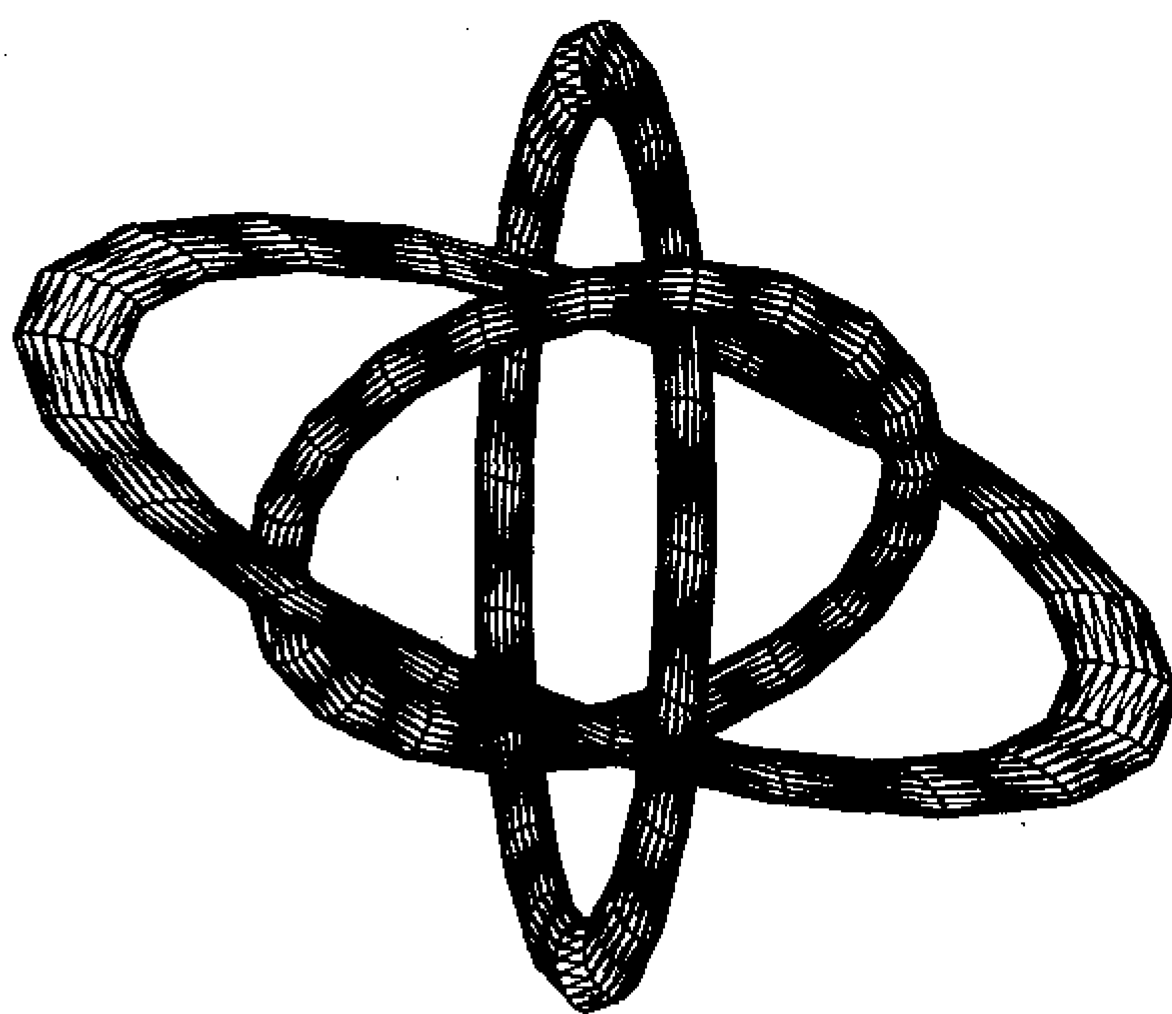
布拉士克(Blashke)曾证明最小宽度不小于1个单位的任何封闭凸曲线能包含直径为$\frac{2}{3}$个单位的圆. 高为1个单位的等边三角形就能包含这样一个圆,所以$\frac{2}{3}$这一极限值是最佳的可能值.

Borromean rings　波罗敏环

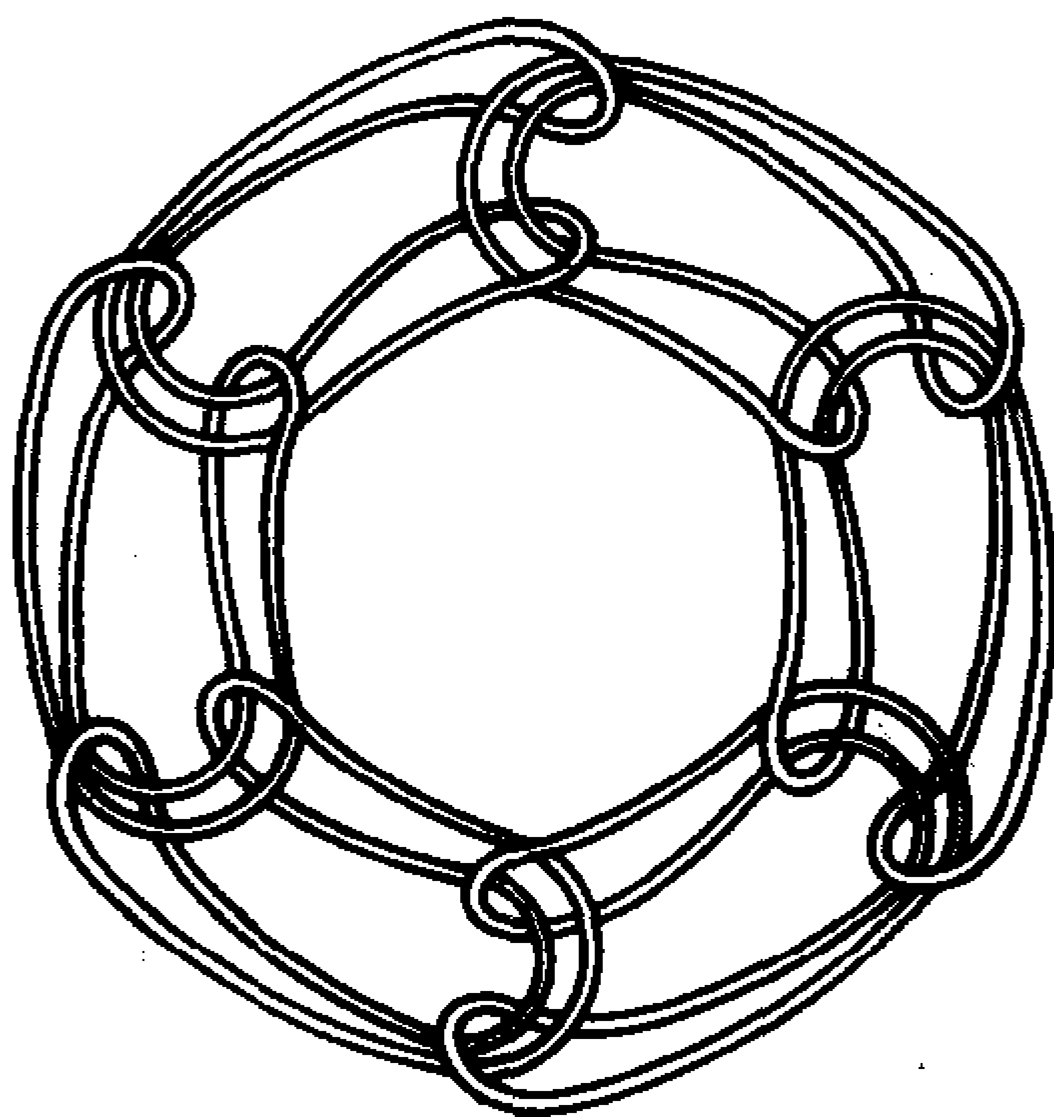
意大利的波罗敏家族的标志是连在一起的三个圆环,虽然每两个圆环都不相连,但所有这三个圆环却不能分开. 美国巴拉丁(Ballantine)啤酒公司和德国克虏伯(Krupp)军工厂都采用同样的图案.



这一图案不分左右,每一个都可以转变为另一个. 下图是三维的情况,它有三个对称平面.

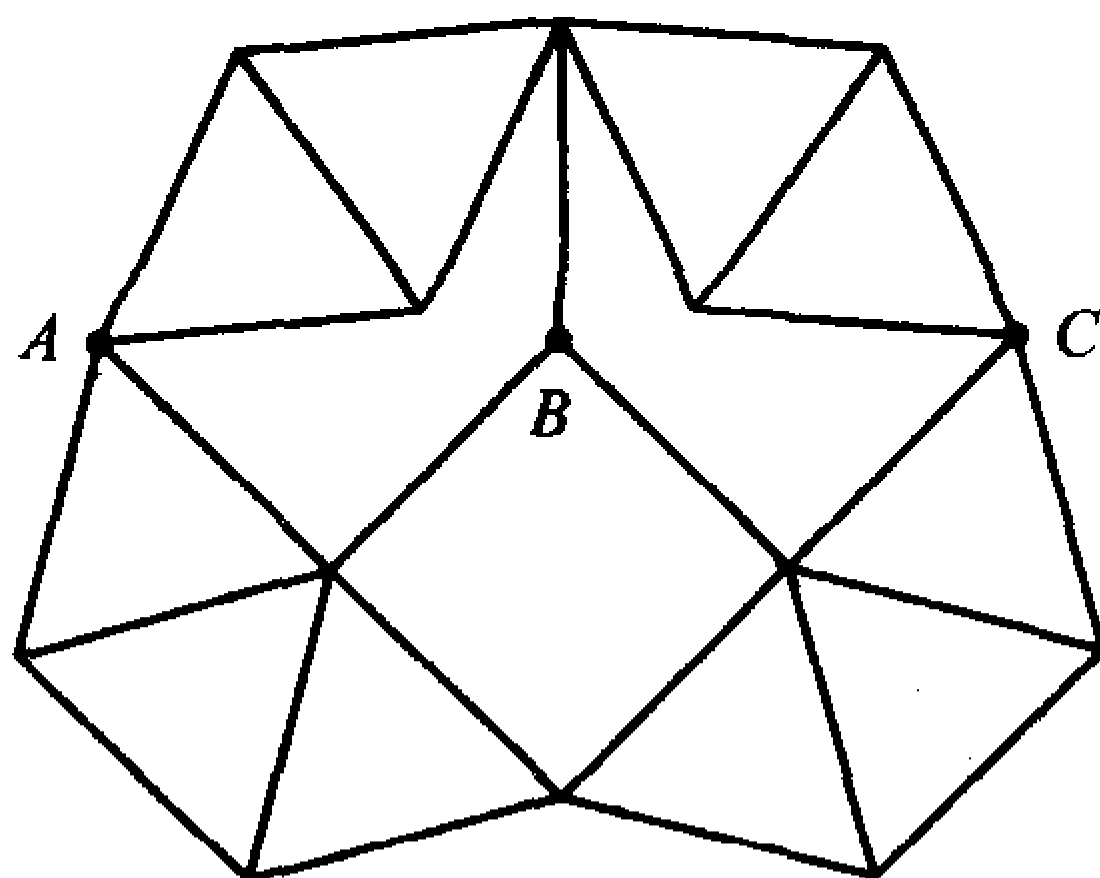


用同样的方式连接任意多个环是简单的.



braced square 撑住正方形

用四根同样长的杆组成一个正方形,角上用铰链连接.在同一平面内,必须再加多少根同样长的,也用铰链连接端点的杆才能使原正方形在这一平面内固定住?



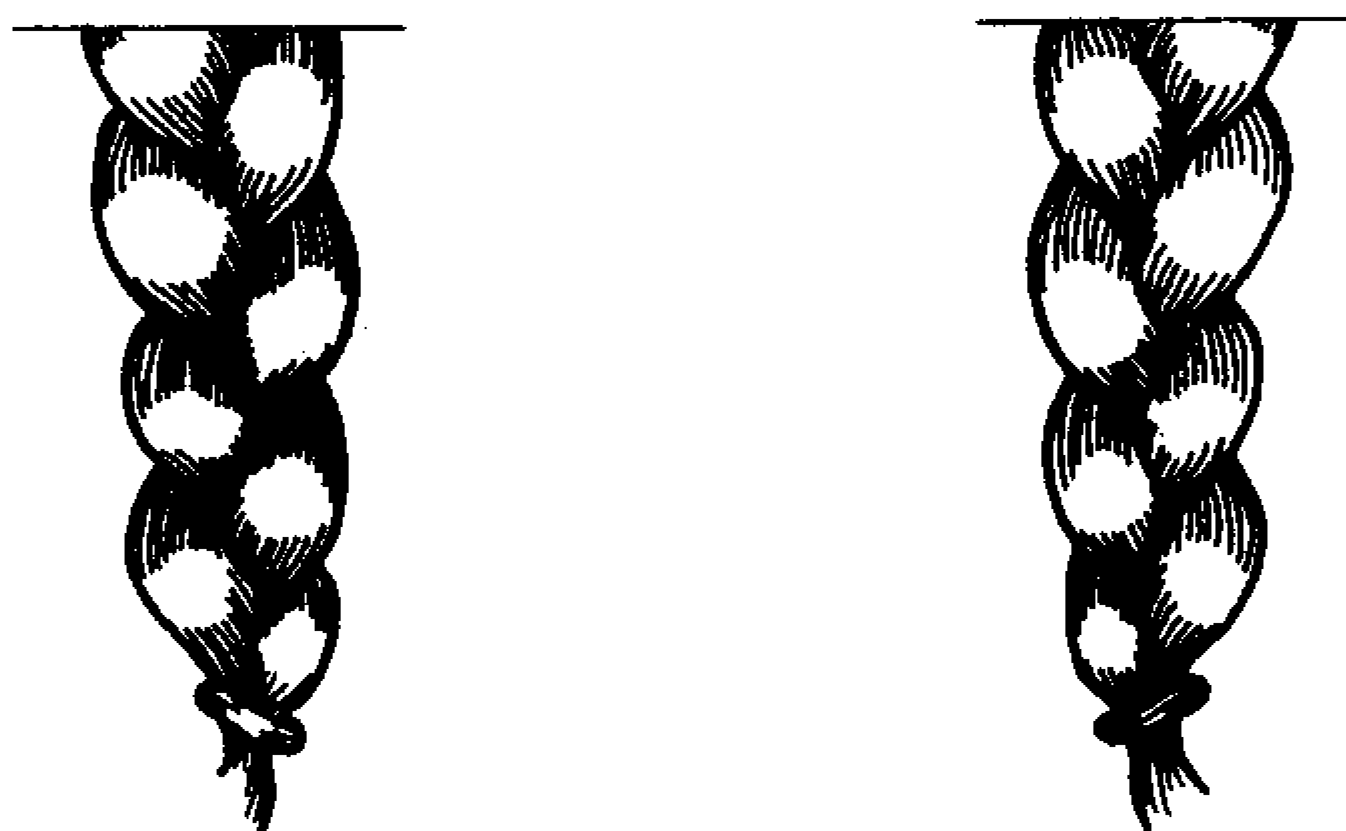
上图是一个最小解,由《科学的美国人》的马丁·加德纳专栏的读者发现的.图中的 A,B,C 三点共线.

参考书:马丁·加德纳,选自《科学的美国人》关于数学游戏的第六本书,W·H·富利曼出版社,旧金山,1971 年(*Sixth Book of Mathematical Games from Scientifical Amer-*

ican, W · H · Freeman, San Francisco, 1971).

braids　辫子

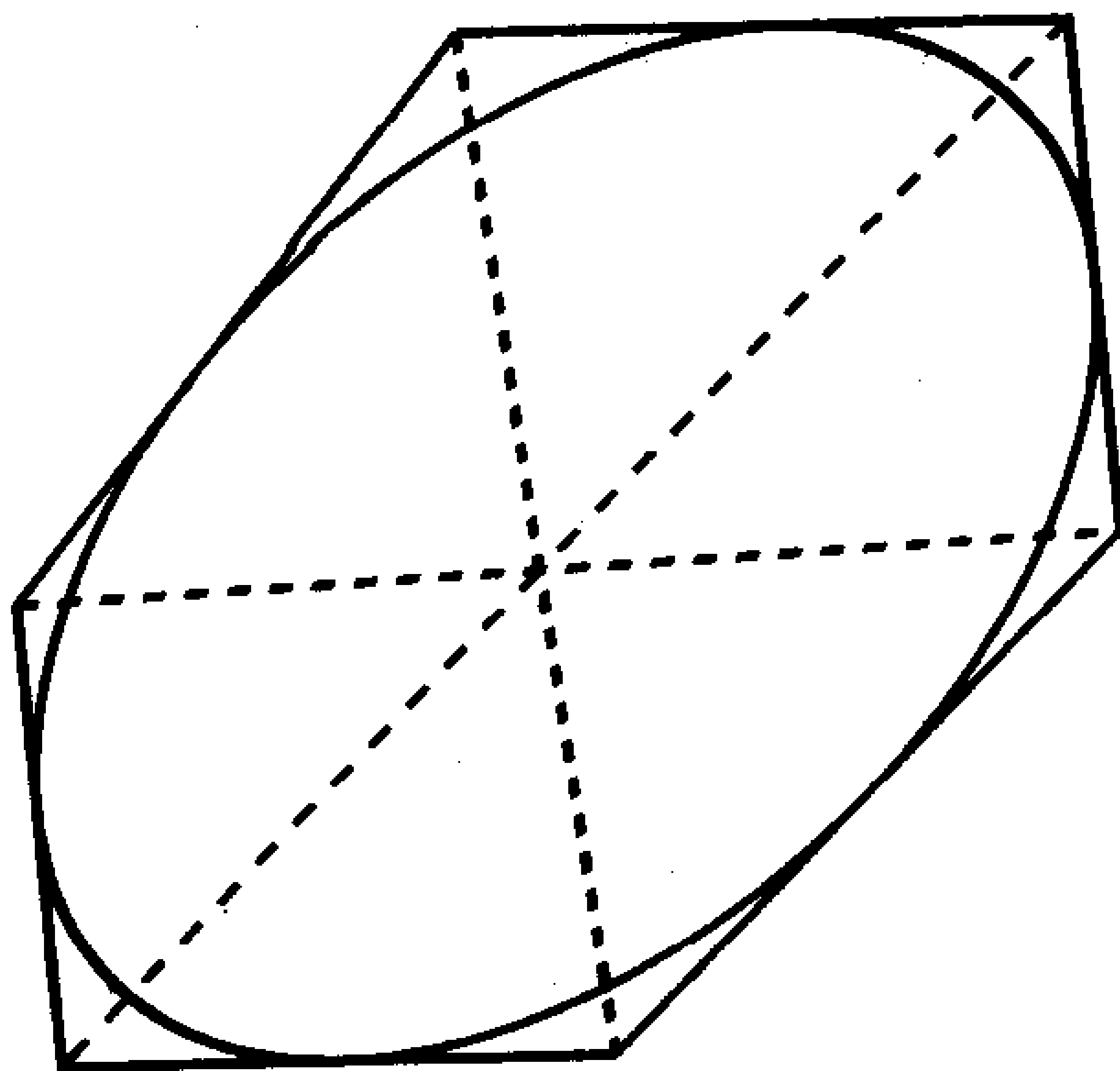
最常见的辫子是对长发重复辫的,它有左向和右向两种形式.



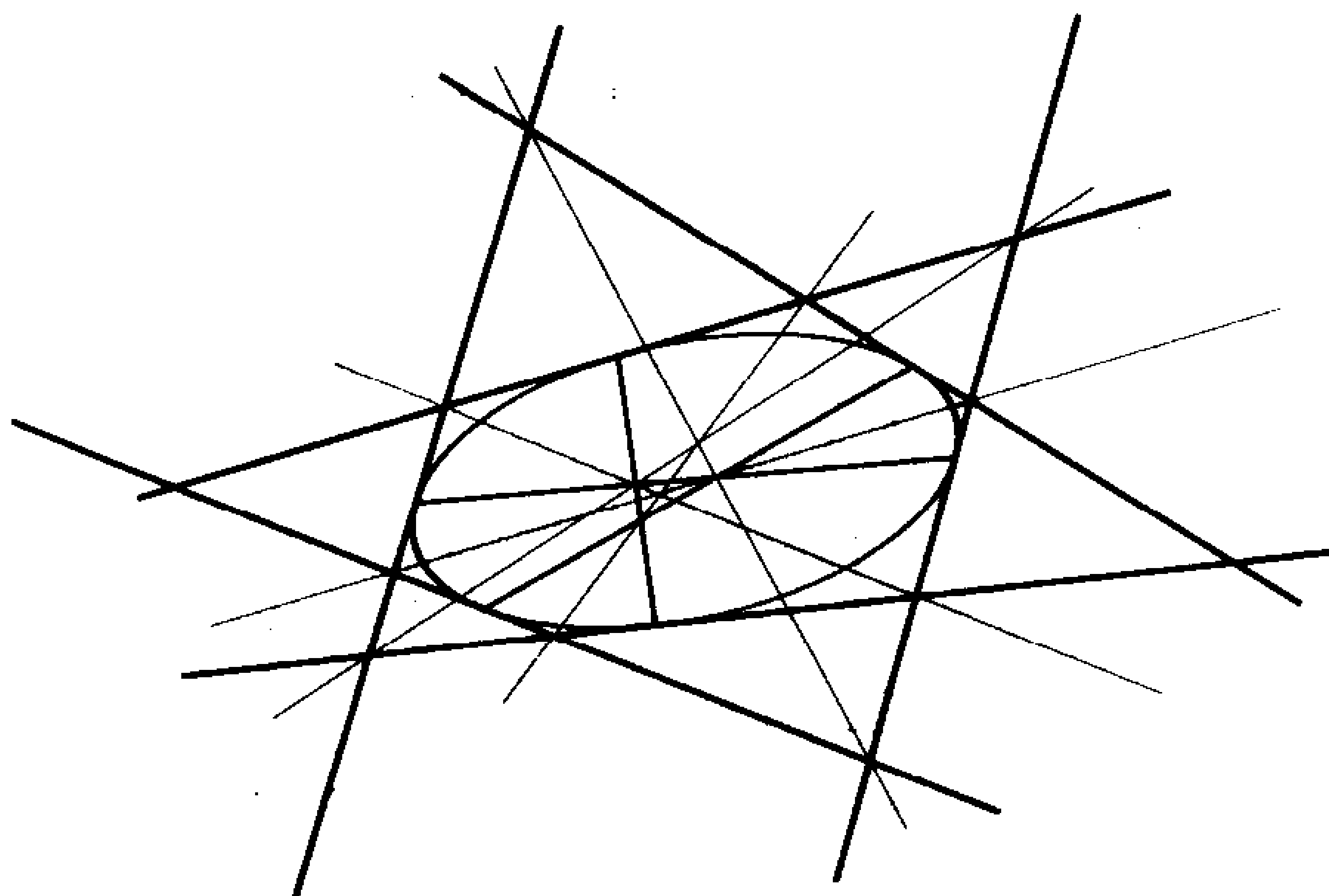
如果在某处辫完后把相应的头接起来,那么结果就得到三个相连的环或者是一个单个的结.

Brianchon's theorem　布列安匈定理

如果一个六边形外切于一条圆锥曲线,或者说,如果一个六边形的每一条边都与该圆锥曲线相切,那么这个六边形的三条主对角线共点.



布列安匈还证明了可以以任何顺序选取外切六边形的边.由切点组成的六边形的主对角线两两相交于原六边形的主对角线上.



布列安匈在1810年发表了他的定理.这一定理是比他早得多的帕斯卡(Pascal)定理的一个对偶定理.只要把直线和点对换,就能从帕斯卡定理得到布列安匈定理:

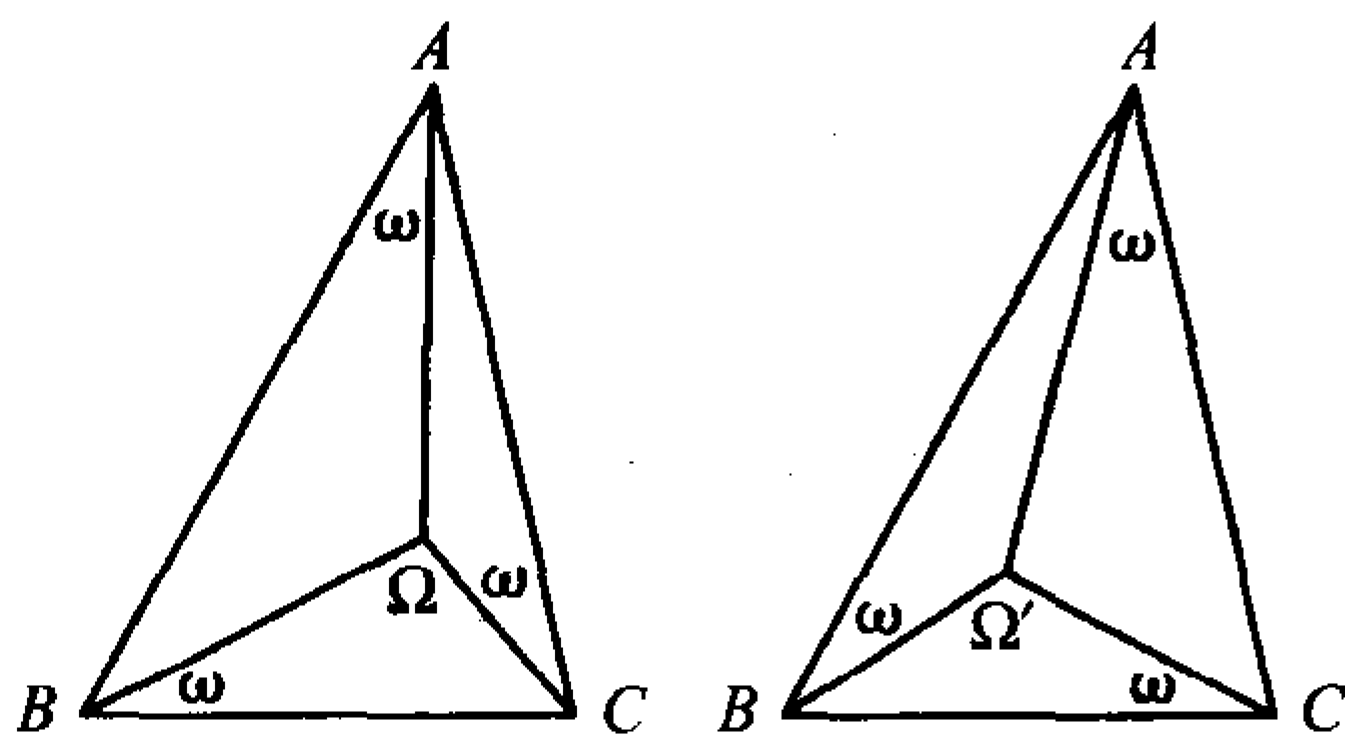
布列安匈定理:	帕斯卡定理:
如果一个六边形外切于一条圆锥曲线,或者说,如果它的每一条边都与这条圆锥曲线相切,那么连接每一对相对的顶点的直线经过同一点.	如果一个六边形内接于一条圆锥曲线,或者说,如果它的每一顶点都在这条圆锥曲线上,那么连接每一对对边的交点在同一直线上.

Brocard points of a triangle　三角形的勃劳卡德点

三角形的勃劳卡德点是以法国军官亨利·勃劳卡德(Henri Brocard)命名的,他在1875年曾描绘过这一事实.但是雅可比(Jacobi)早就研究过了,克里尔(Crelle)在1816年也研究过.这

使克里尔曾宣布说，“像三角形那样简单的图形有如此取之不竭的性质真是奇妙. 然而，其他图形中目前还未知的性质或许不会有这么多吧?”这是一个多么好的预言啊! 整本整本的书谈到了这个图形.

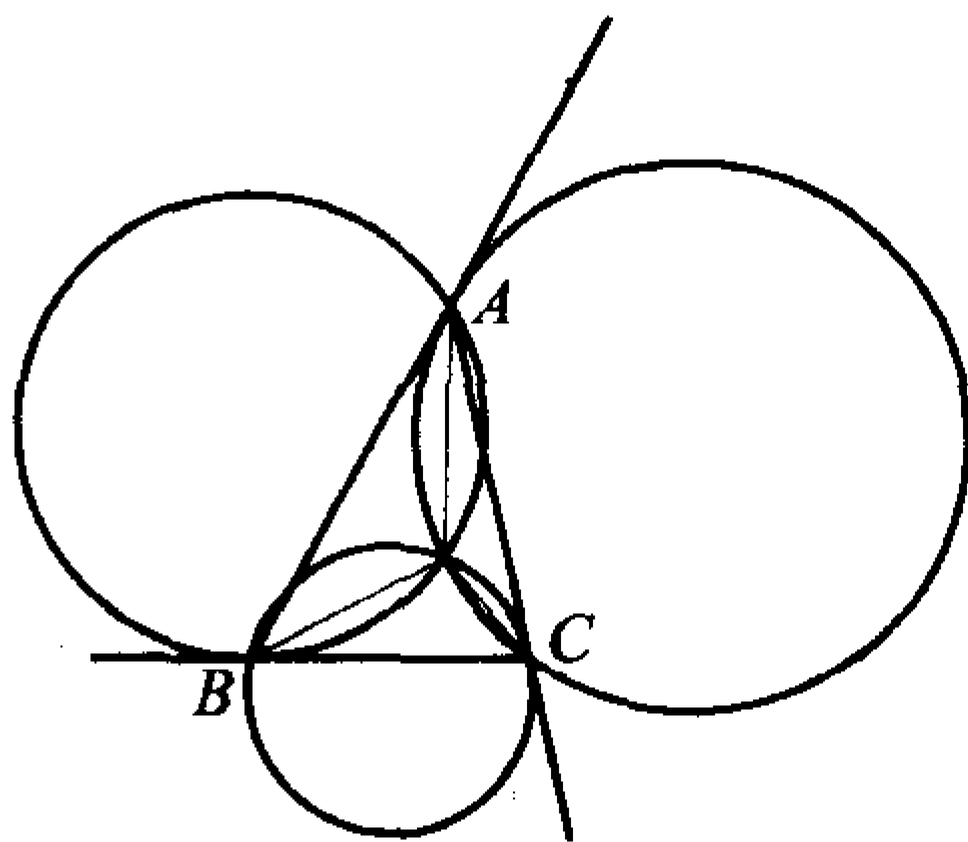
对于任何三角形都存在唯一的角 ω，即勃劳卡德角，图中出现的线相交于勃劳卡德点 Ω 和 Ω'.



勃劳卡德角由以下公式给出，它的简洁明了表示它必很有意义：

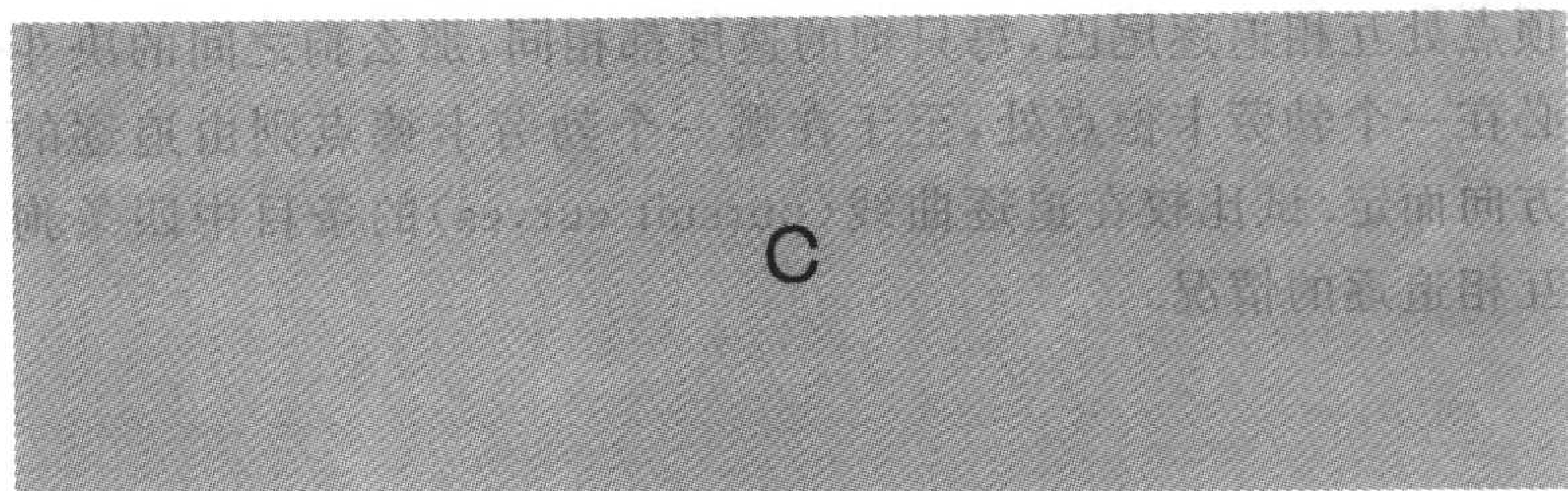
$$\cot\omega=\cot A+\cot B+\cot C.$$

两个勃劳卡德点都可以用几何方法作出：画三个圆，这三个圆分别过两个顶点并与一边相切(见下图). 与 AB 相切于 A 的圆，与 BC 相切于 B 的圆，与 CA 相切于 C 的圆确定一个勃劳卡德点. 与 AB 相切于 B 的圆和其他两圆确定另一个勃劳卡德点.



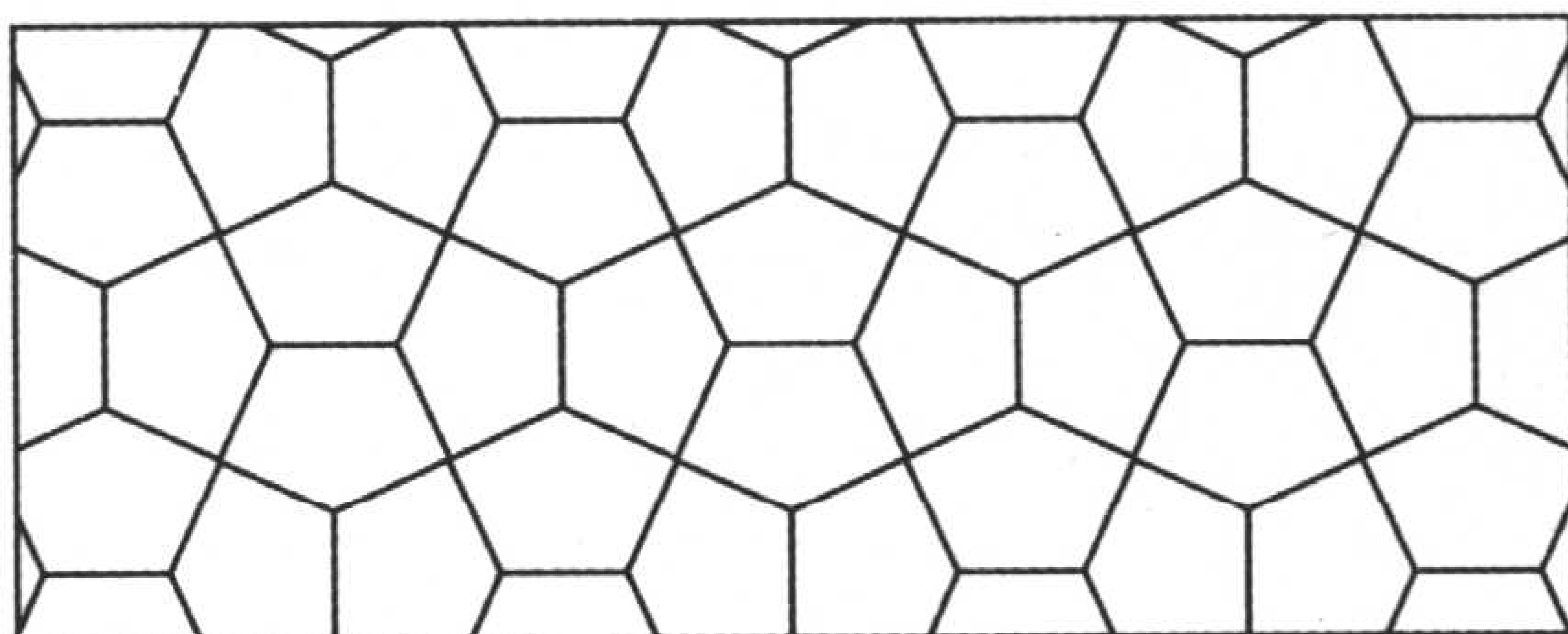
有两个更奇妙的性质：如果 $C\Omega'$ 和 $B\Omega$ 相交于 X，类似地得

到 Y,Z,那么 Ω,Ω',X,Y,Z 共圆. 如果三只狗在一个三角形的顶点处互相追逐尾巴,每只狗的速度都相同,那么狗之间的决斗必在一个勃劳卡德点处,至于在哪一个勃劳卡德点则由追逐的方向而定. 试比较在追逐曲线(pursuit curves)的条目中四条狗互相追逐的情况.

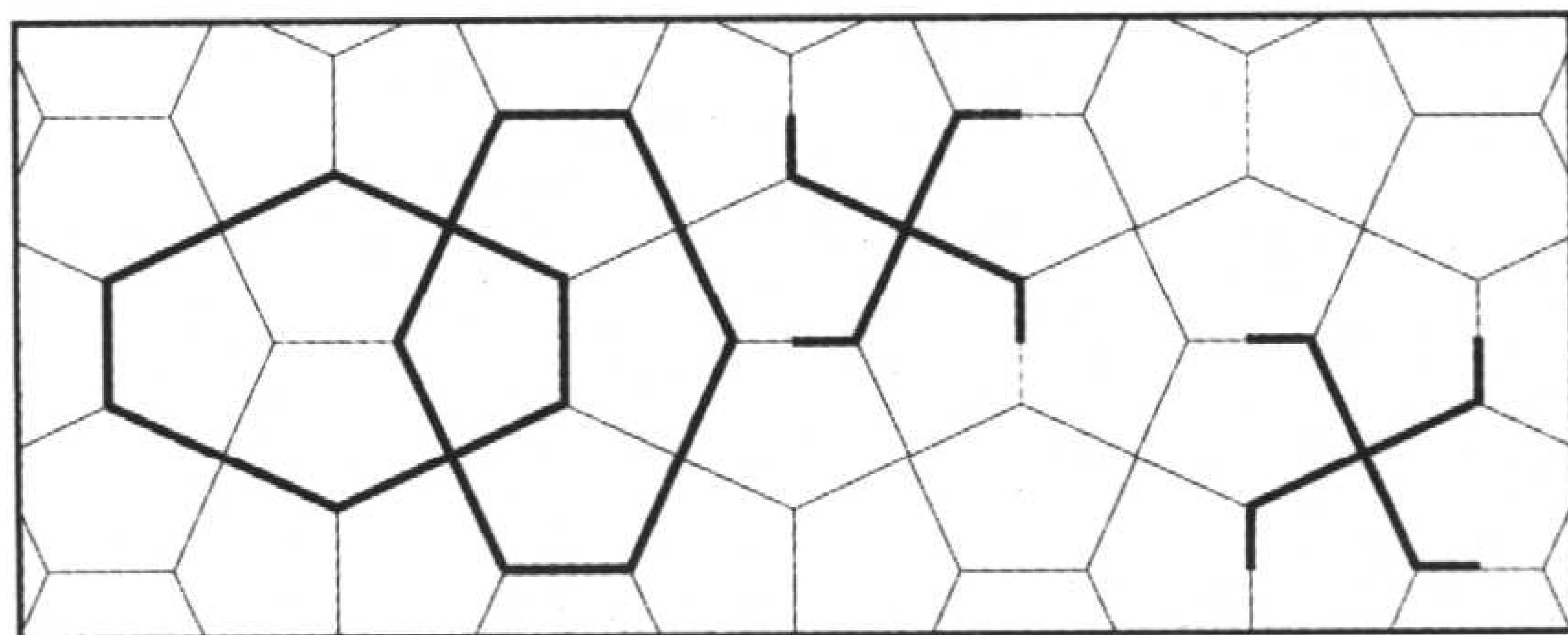


Cairo tessellation　开罗镶嵌

使用开罗镶嵌这一名称是因为它经常出现在开罗的街头上和伊斯兰装饰中.



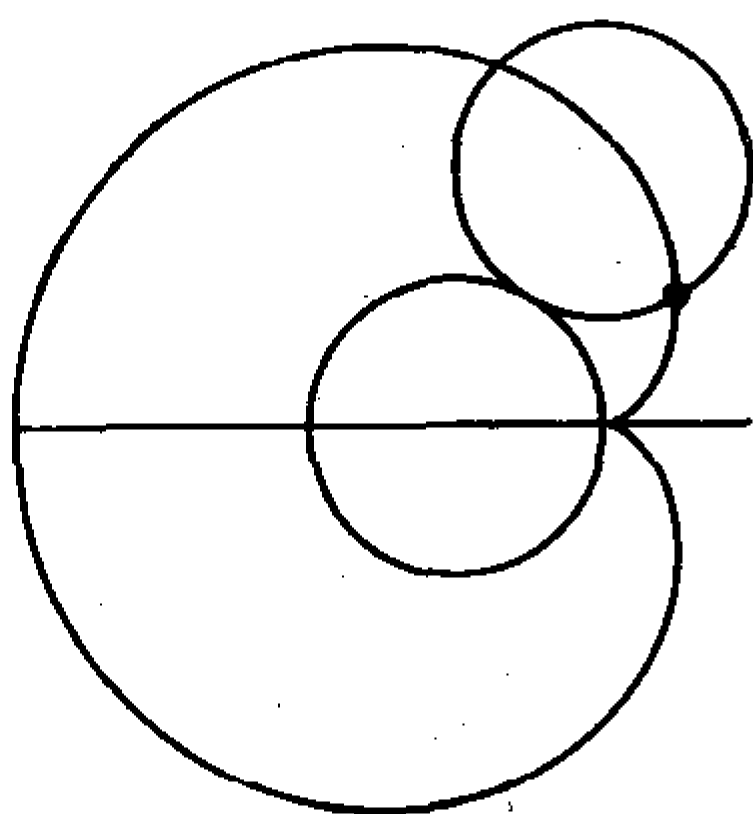
开罗镶嵌的形式是多种多样的.例如,有绕正方形格子的顶点旋转的交叉的拼块,它们的自由端点用短线段连接;也有两套全等的拉长了的六边形的镶嵌,这两套六边形重叠处为直角.后者表明由于重叠的六边形的形状不同,而使开罗铺块有许多不同的形式.



把每一个铺块的中心与其相邻的各铺块的中心相连所得到的双重镶嵌是一种正方形和等边三角形的半正镶嵌.

cardioid *or* epicycloid of one cusp　心脏线或单尖外摆线

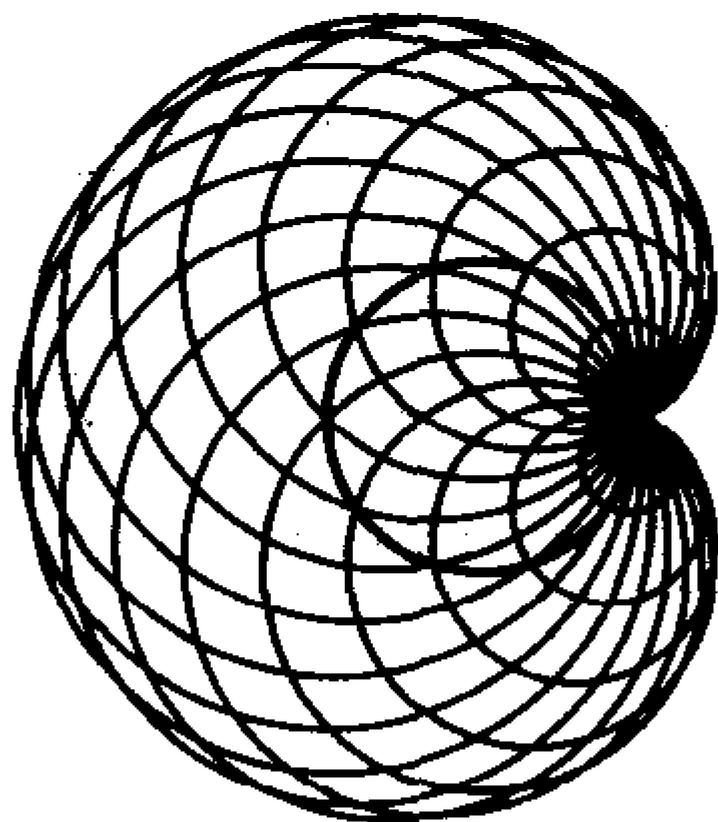
心脏线以及有关曲线,如星形线等,首先是天文学家奥尔·鲁模尔(Ole Rømer)在1674年研究的,他一直从事寻求齿轮的最佳形状的工作.更早一些,希腊人曾考虑过把行星的运动描绘成"在圆上运动的圆".



当一个圆在同样大小的另一个圆上滚动时,第一个圆上任意一点就画出一条心脏线.或者说,它也是当动圆的直径是定圆的直径的两倍时,动圆在定圆外绕定圆滚动时动圆上一点的轨迹.

心脏线的极坐标方程是 $r=2a(1\pm\cos\theta)$,周长是 $16a$,面积是 $6\pi a^2$.

心脏线也是圆心在定圆上,经过定圆上一点的所有的圆的包络.

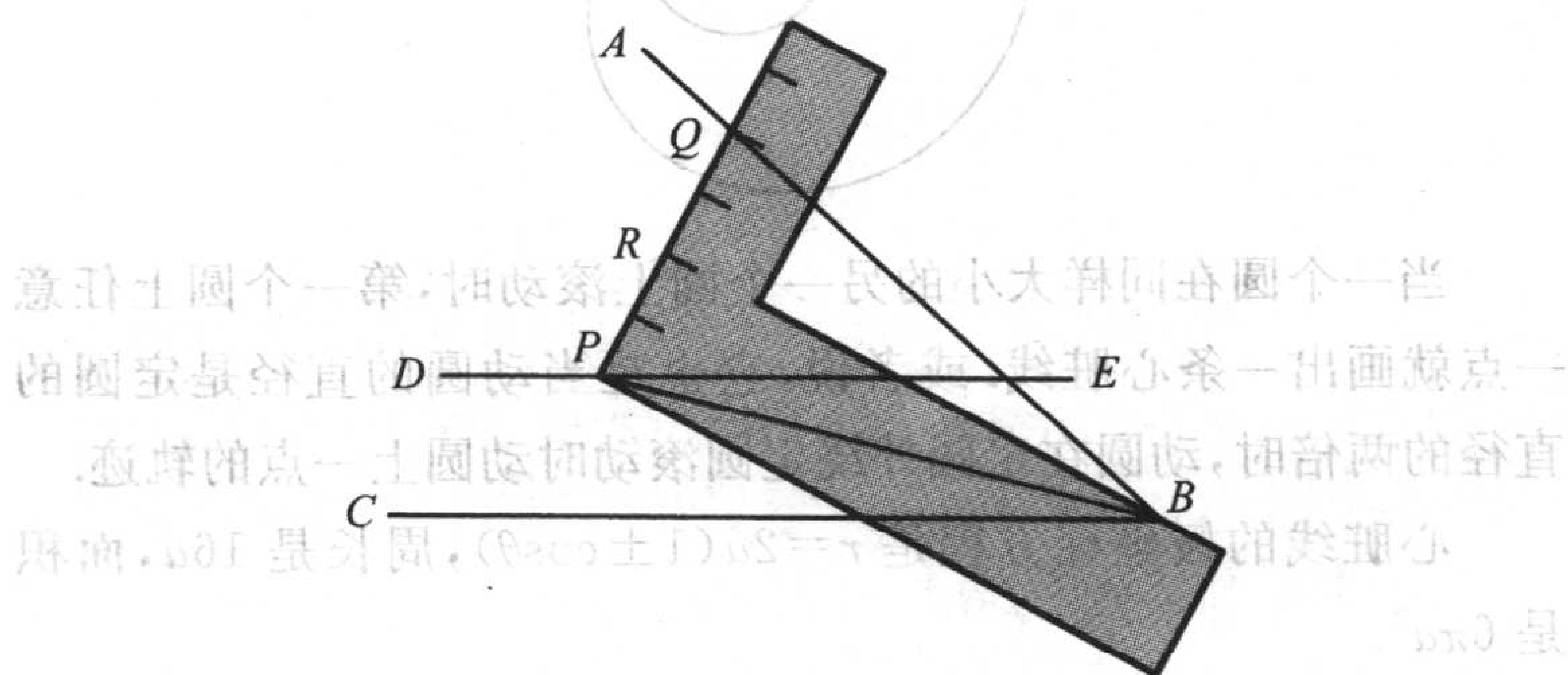


任意画三条平行的切线并连接切点和尖点.这三条半径的夹角是120°.尖点就是三个切点的费尔马点(Fermat point).心脏线的三条平行线的三个切点的重心永远是定圆的圆心.

任何直线与心脏线交于四点,其中的两点可以是虚点.尖点到两个交点的距离的和是一个常数.特别地,由于经过尖点的直线与该曲线有两个交点,所以经过尖点的弦长是常数 $4a$.这些弦的中点在同一圆上.过心脏线的尖点的弦的两个端点的切线互相垂直.

carpenter's-square trisection　用勾尺三等分角

只用直尺和圆规不能解决的三个经典的希腊问题之一是三等分一般角.它能用勾尺完成.

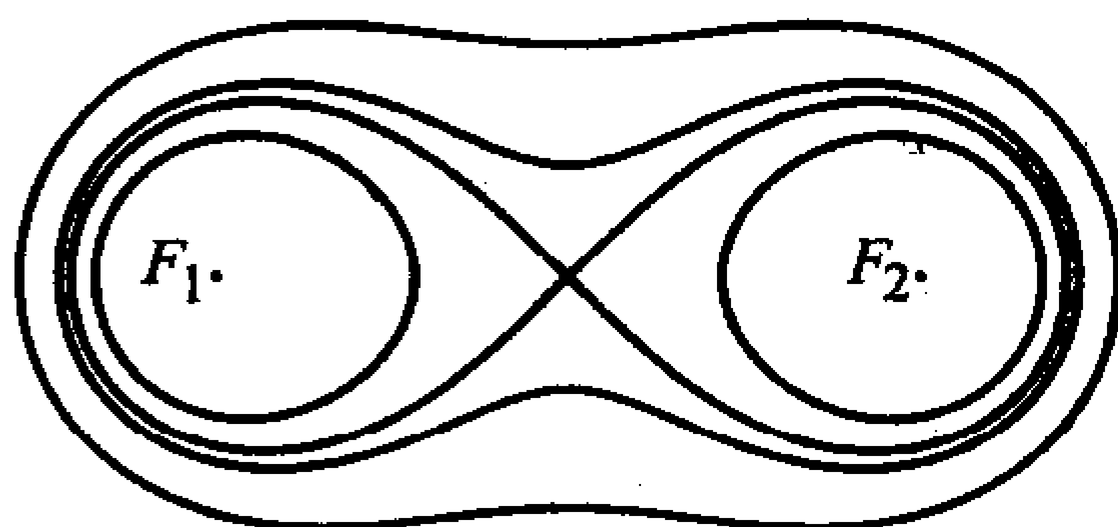


要三等分$\angle ABC$.首先用勾尺的宽臂画 DE 平行于 BC.然后使一条棱通过 B 点,矩尺的外面的一个转角落在 DE 上,并使 PQ 的长度是宽臂的宽的两倍.取 PQ 的中点 R,那么 BP 和 BR 就三等分$\angle ABC$.

参考书:"如何用勾尺三等分一个角".(How to trisect an angle with a carpenter's square), *American Mathematical Monthly* May, 1928.

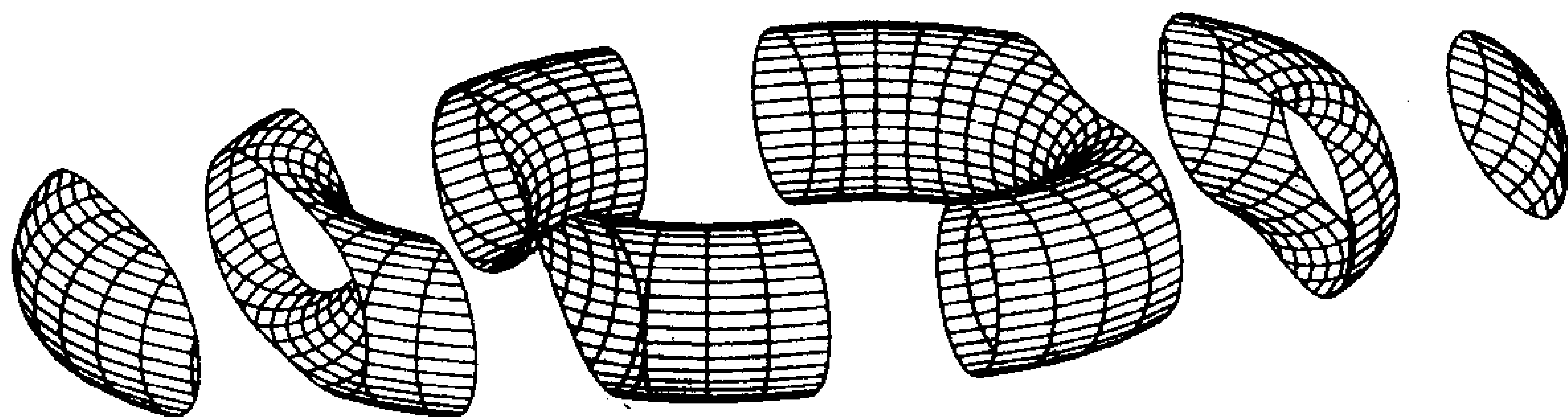
Cassinian oval *or* ellipse　卡西尼卵形线或椭圆

如果一个动点到两个定点 F_1 和 F_2 的距离之积是一个常数,那么它的轨迹是一个卡西尼卵形线.它是以吉奥伐尼·多蒙尼科·卡西尼(Giovani Domenico Cassini)命名的,他曾在 1680 年研究过这些卵形线,并将此与日地的相对运动相联系.



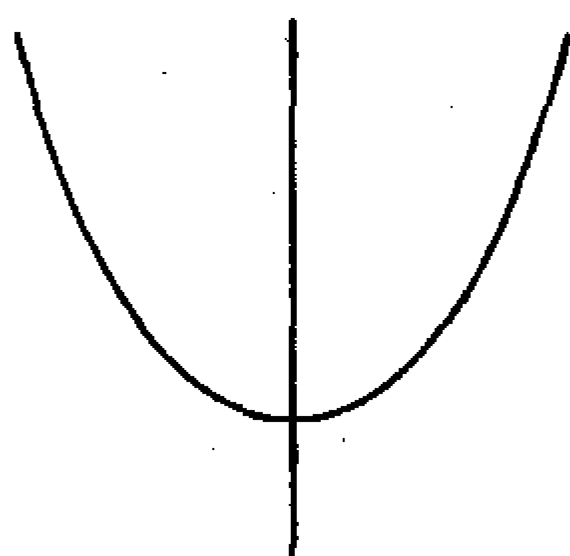
贝努里双纽线(Bernoulli's lemniscate)是一种特殊情况,这个常数积等于两定点间的距离的平方.

卡西尼卵形线是环形圆纹曲面被一个平行于其轴的平面截得的截面.希腊数学家帕色斯(Perseus)首先考虑到环形圆纹曲面的截面,所以它曾被称为帕色斯螺旋截面(奇怪的是希腊人把圆纹曲面称为螺旋面(spira)).



catenary　悬链线

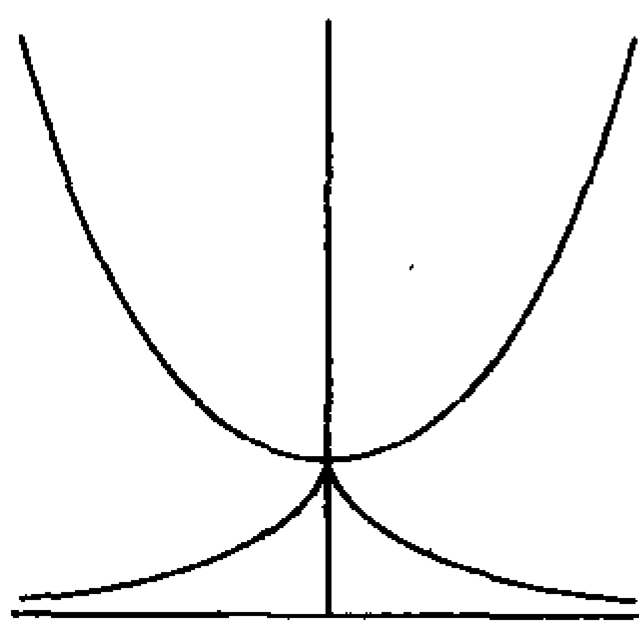
悬挂一条均匀的链条形成悬链线.惠根斯(Huygens)在 1691 年把悬链线命名为 catenary.伽利略认为悬挂一条绳可以形成抛物线的形状,这样的错误是可以理解的,因为抛物线和悬链线在顶点附近是十分接近的.



悬链线的方程是 $y = a\mathrm{ch}\,\dfrac{x}{a}$.

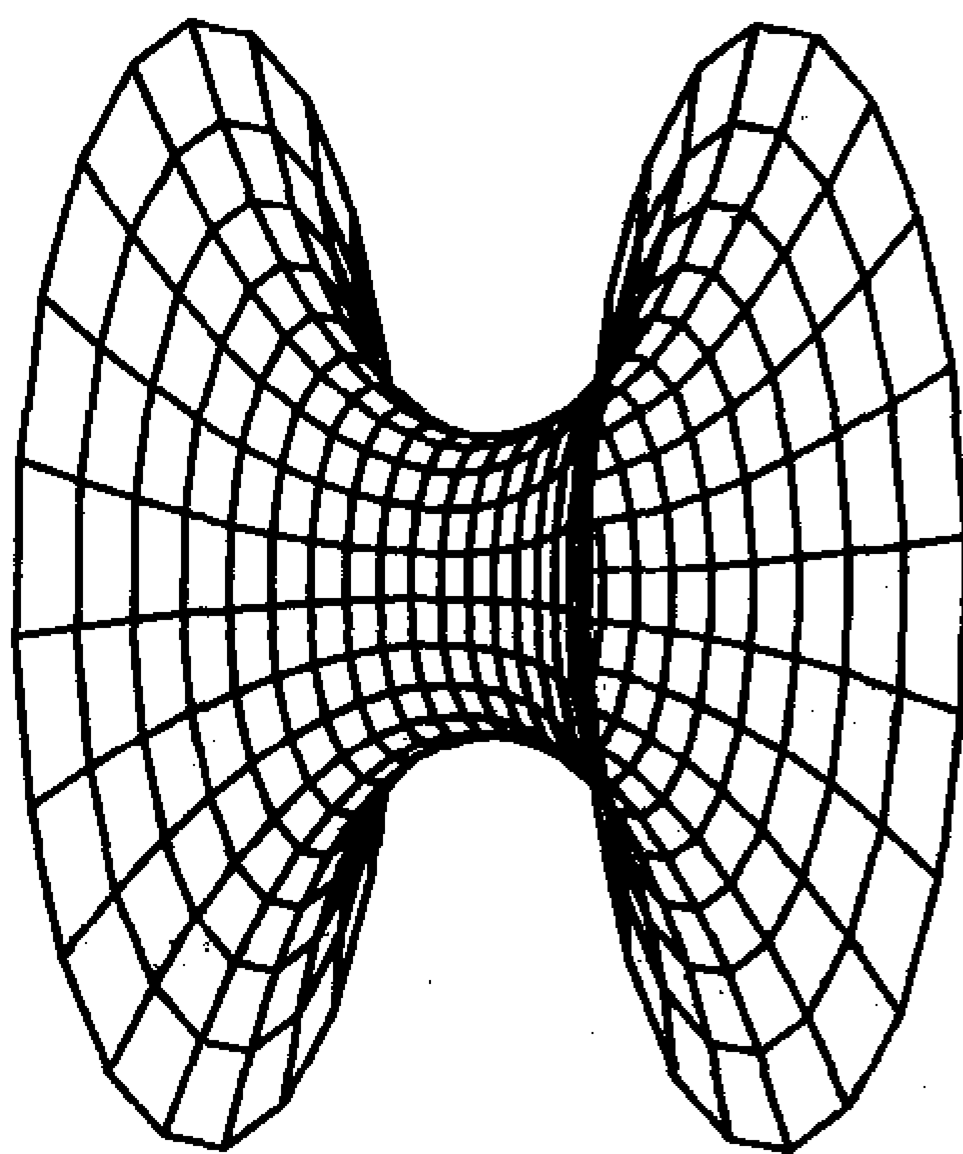
悬链线也是抛物线在直线上滚动时焦点的轨迹.

悬链线的顶点的渐开线是曳物线(tractrix). 这条曳物线的渐近线称为悬链线的准线.



catenoid 悬链面

悬链线绕其准线旋转形成的曲面是达到最小值的曲面. 在同一条轴上的两个空心圆环之间的肥皂膜就是这个形状. 这是唯一的最小的旋转面.



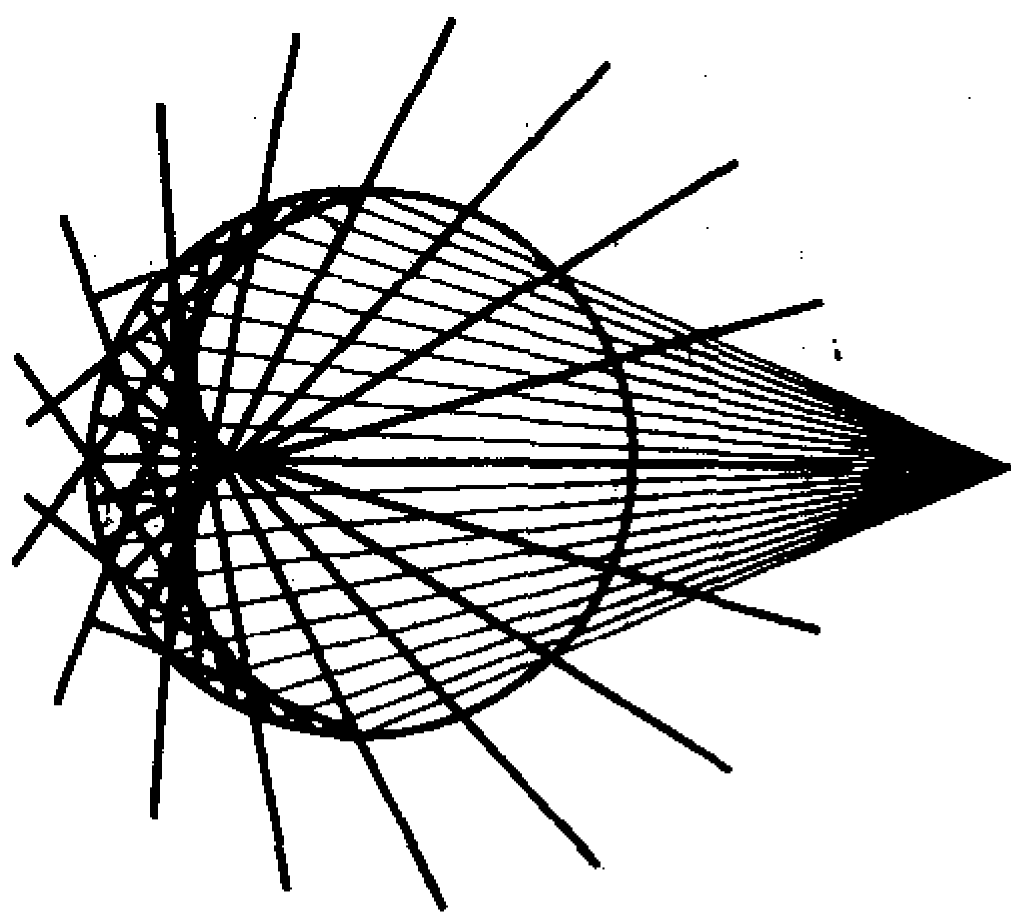
caustic of a circle　圆的焦散曲线

焦散曲线首先是由奇恩豪森(Tschirnhausen)在 1682 年作为光学的一个分支进行研究的.

有一条固定的曲线和一个固定的光源,从光源射出的光线被这条曲线反射(或被这条曲线折射)后包络出一条新的曲线,这条曲线就叫焦散曲线.

当灯光照到一只茶杯的内部,光线反射到液体的表面时,可以粗略地看到由反射生成的圆的焦散曲线.

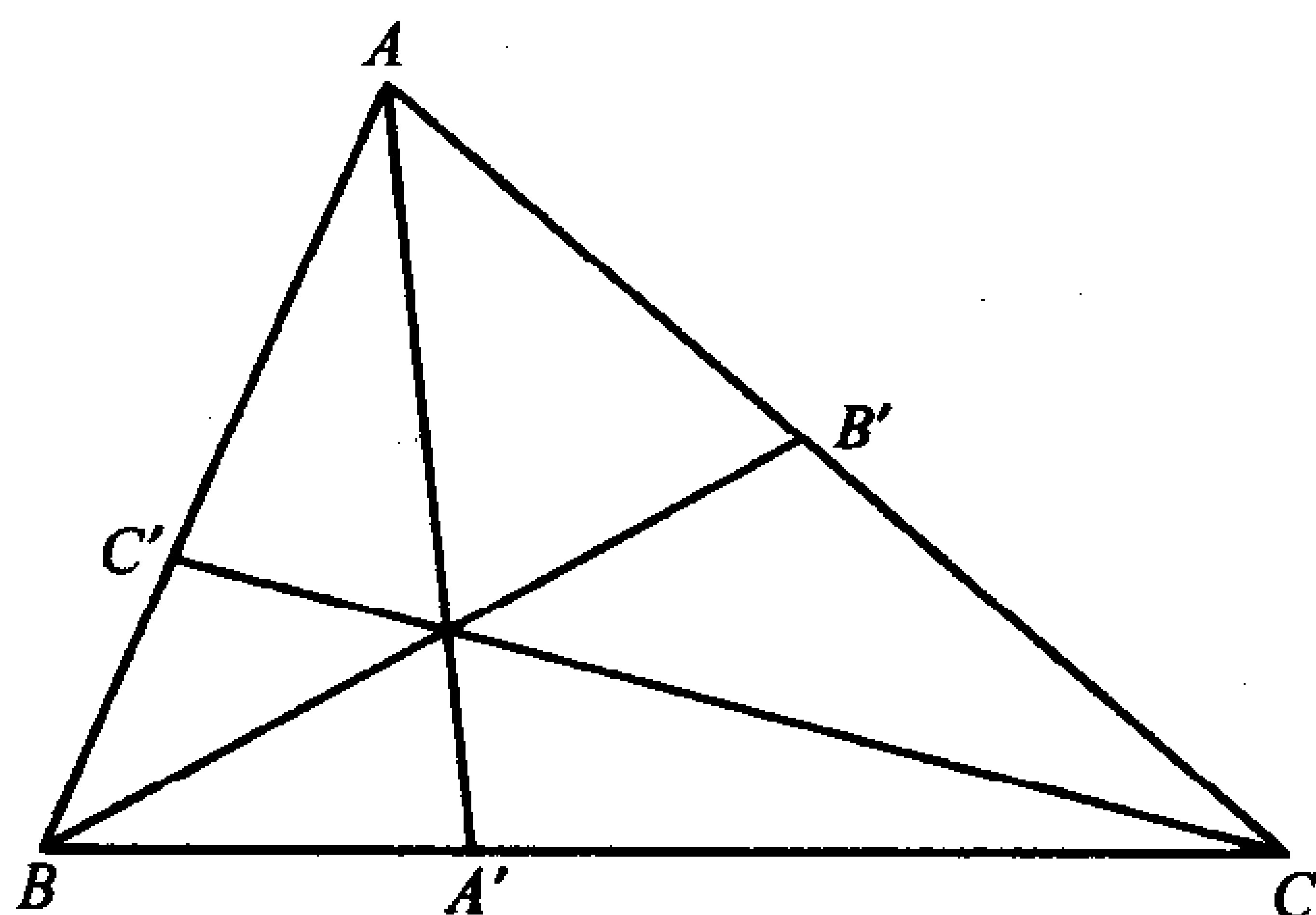
由反射形成的焦散曲线一般呈蜗牛线. 光源有三个特殊位置. 光源在无穷远点的焦散曲线呈肾形,如果光源在圆上,那么焦散曲线就是心脏线,光源在圆心的焦散曲线就是圆心本身.



上图表示圆外的点光源被圆反射而成的焦散曲线. 反射而成的焦散曲线也可以认为是渐屈线. 上图中的曲线就是以光源为极的蚶线的渐屈线.

Ceva's theorem　塞瓦定理

吉尔瓦尼·塞瓦(Giovanni Ceva)是一位几何学家和水利工程师,也是第一位有经济学著作的数学家. 1678 年他出版了一本书,书中提及了以他命名的定理,他是用重心证明这一定理的.



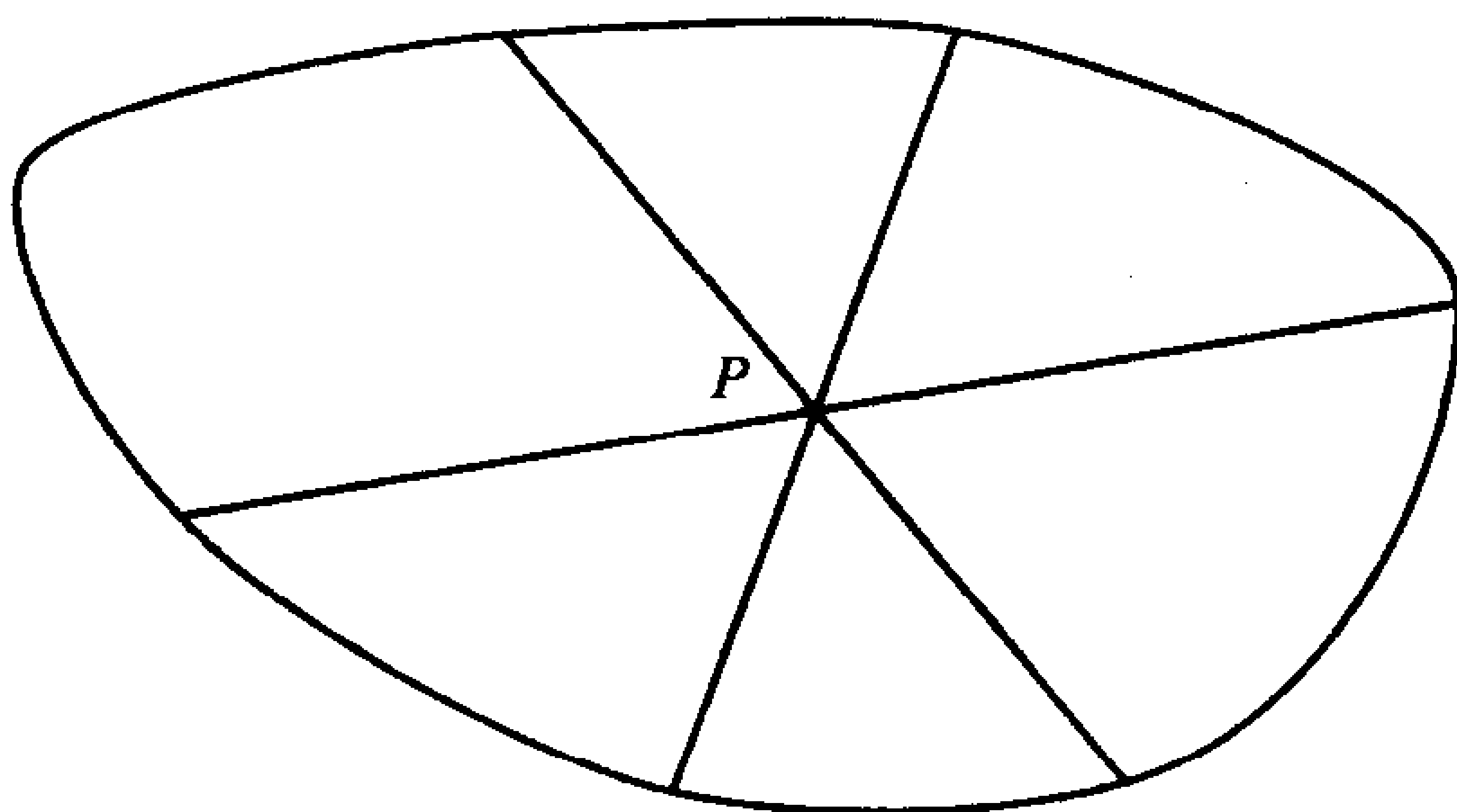
如果$\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B}=1$,那么直线 AA',BB',CC' 共点.其逆命题也真.如果像塞瓦那样从力学的角度来观察,那么 A',B',C' 是重物在三个顶点中相应两点的重心,公共的那一点就是所有这三个重物的重心.

这一定理可以推广到任何有奇数条边的简单多边形.例如,在五边形中,如果通过顶点 A,B,C,D,E 的五条直线共点,且交对边于 A',B',C',D',E',那么

$$\frac{AC'}{C'E}\cdot\frac{EB'}{B'D}\cdot\frac{DA'}{A'C}\cdot\frac{CE'}{E'B}\cdot\frac{BD'}{D'A}=1.$$

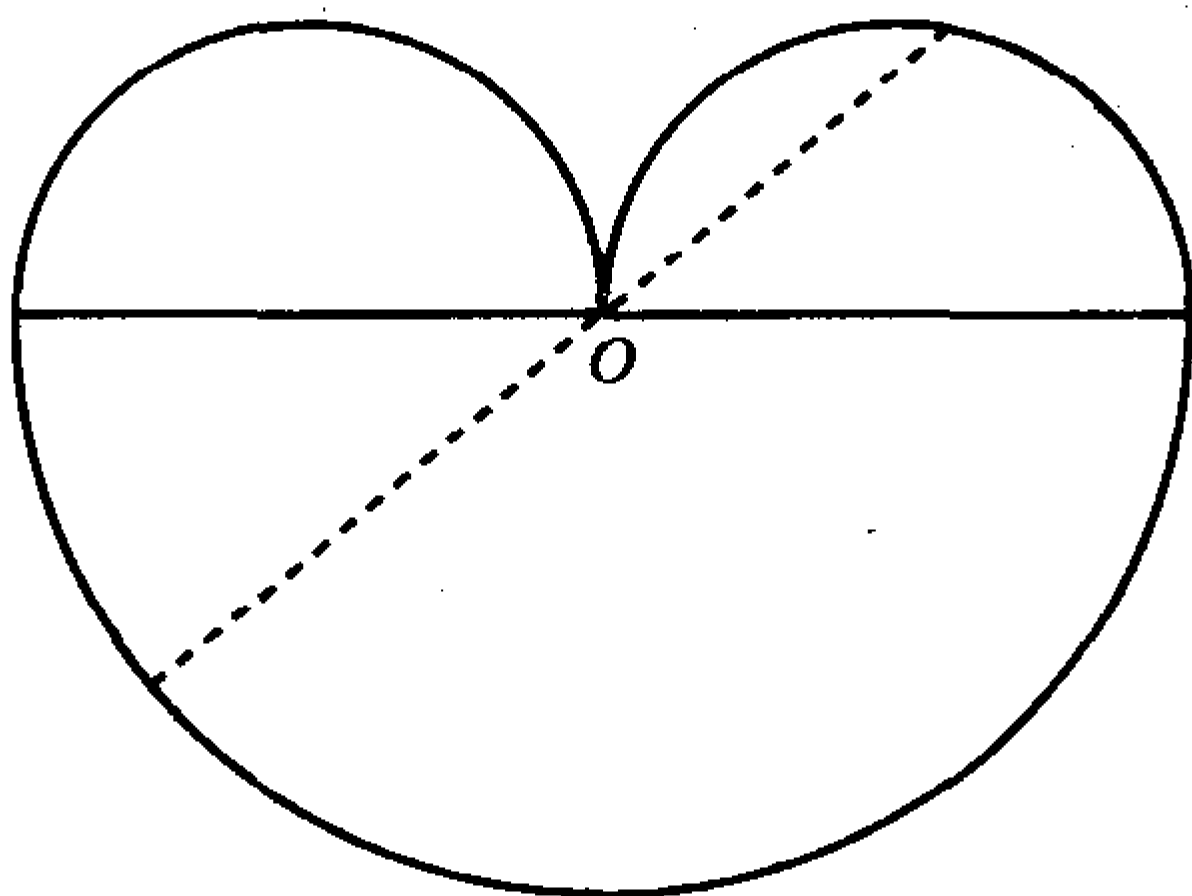
chords at 60° 相交成 60°角的弦

任给一条凸的封闭曲线,必能找到这样的点 P,过 P 作三条相交成 60°角的弦,使点 P 是所有这三条弦的中点.



chords halving the perimeter　平分周长的弦

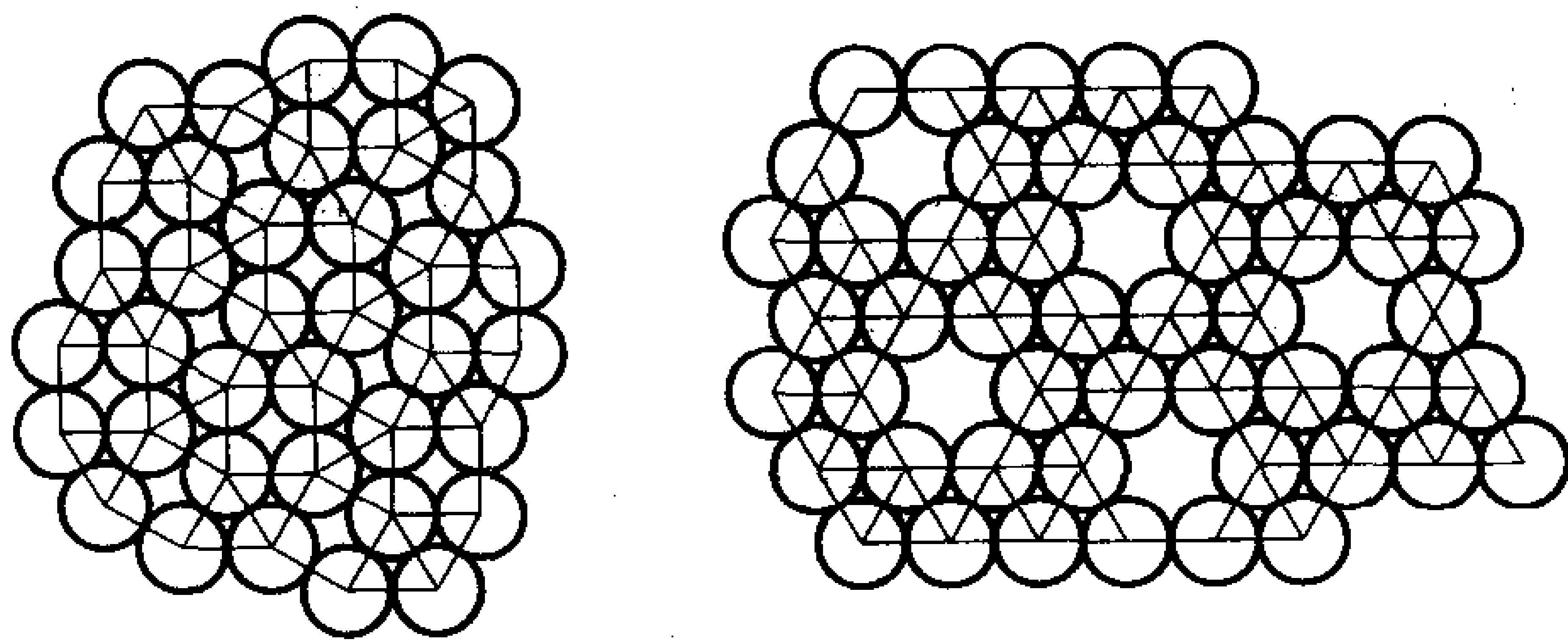
圆的每一条直径，或者说经过正方形(或更一般地平行四边形)的中心的每一条直线，平分其周长. 但是，一条并不如此对称的曲线可以有一个具有这样性质的点.



上图是在一个半圆上的两个相等的半圆. 过 O 的每一条直线把周长分成两个相等的部分.

circle tessellations　圆镶嵌

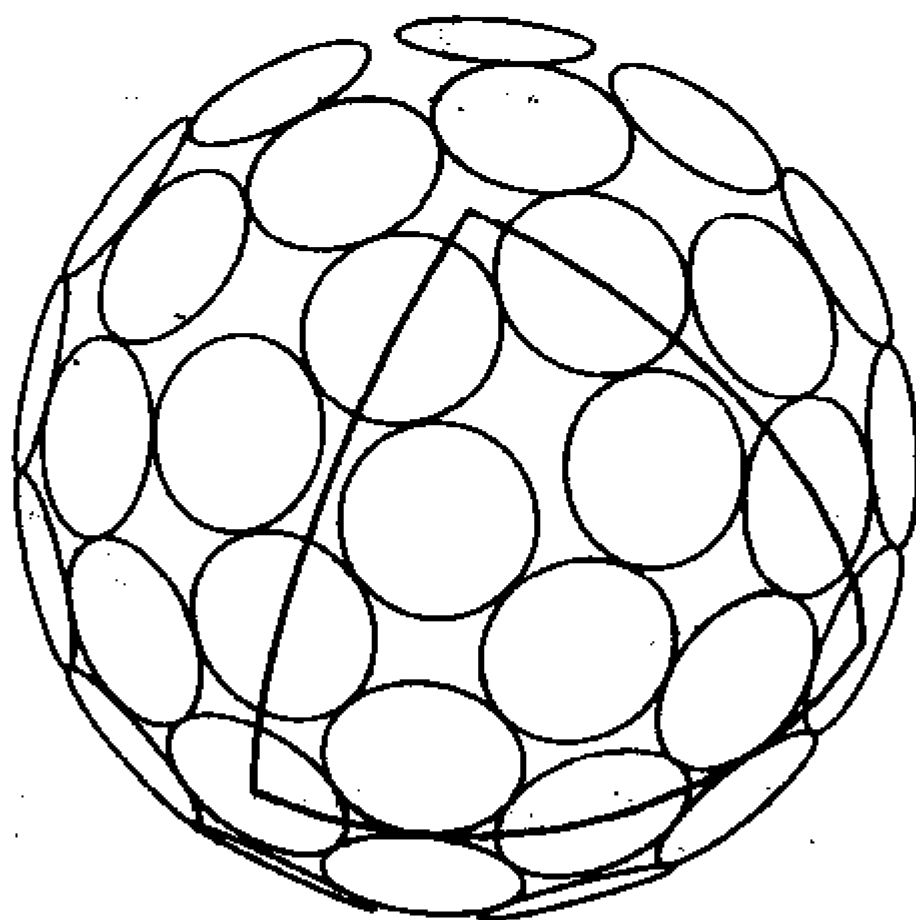
镶嵌这一个词通常定义为完全铺满平面，但是这一概念很容易推广到其中有洞的镶嵌，或者说到处必有空隙的圆镶嵌.



以每一个顶点为圆心画同样的圆可以把所有半正规镶嵌转化为一个圆的网络. 上图中左边一个是正方形和等边三角形转化后的镶嵌，右边的一个是由正六边形和等边三角形组成的两个半正规装饰转化后的镶嵌(后者可以以左右两种形式出现).

circles on a sphere 球面上的圆

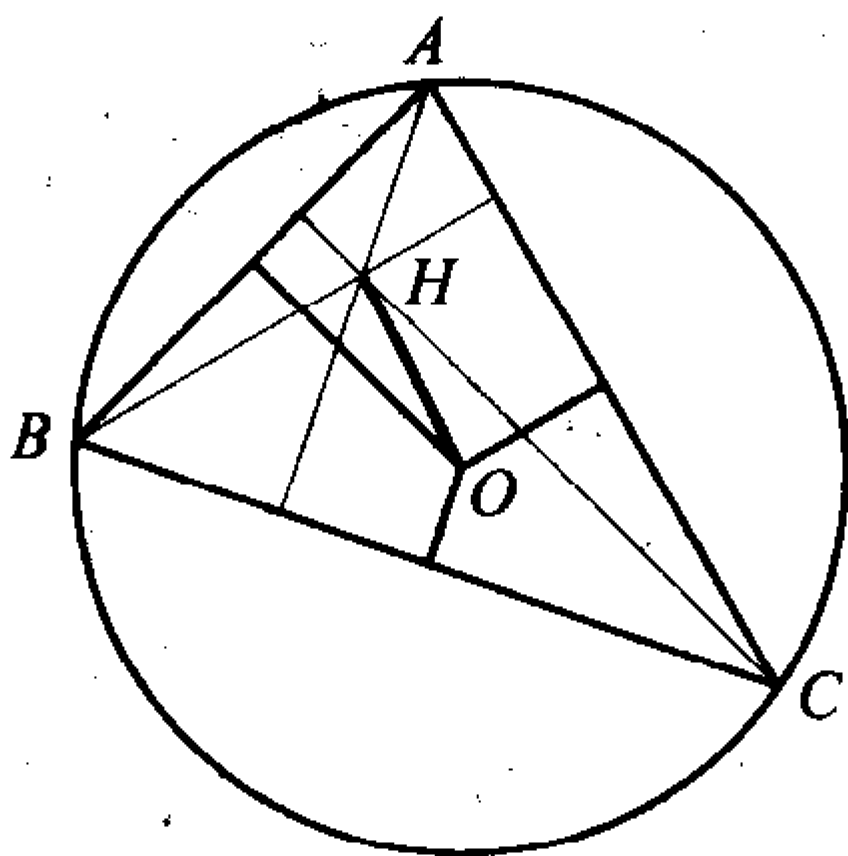
如果 N 个同样的圆放在一个球面上，N 能是多大的数？对于 N 的一些特殊值，例如，当 N 是一种正多面体的面数时，那么解就很简单，并且是对称的．所以能够画出八个同样的圆，球面的每一个卦限中放一个，每一个圆都与正八面体的相应的面上的另外三个圆相切．



对于 N 的其他一些值，构形就没那么对称了，而且解也难找得多．上图表示有 64 个圆的一个解．球面三角形的顶点表示极（四周各有一个圆）的位置，极的对边是赤道．

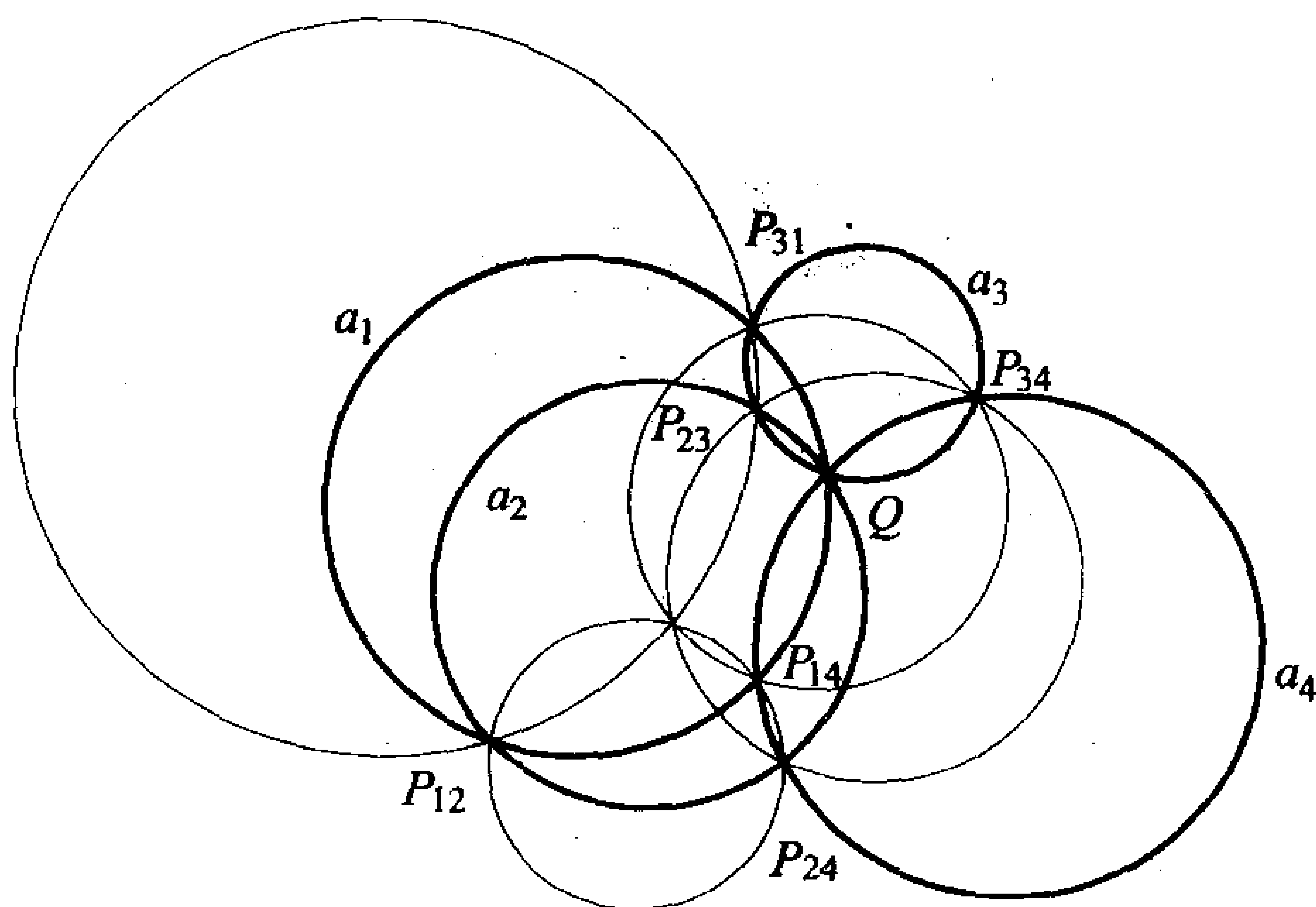
circumcircle of a triangle 三角形的外接圆

三角形的三条边的垂直平分线相交于一点，这一点就是经过三个顶点的圆的圆心．如果 H 是该三角形的垂心，那么向量 OA，OB 与 OC 的和等于向量 OH．



Clifford's theorem　克里福德定理

克里福德(Clifford)发现了一系列定理,每一个定理都以自然数的顺序建立在前一个定理的基础上.



克里福德第一定理是:设 a_1, a_2, a_3, a_4 是经过同一点 Q 的四个圆.设 a_1 和 a_2 相交于 P_{12},等等.设 a_{123} 是经过 P_{12}, P_{23} 和 P_{31} 的圆,等等.于是,四个圆 a_{123}, a_{124}, a_{134} 和 a_{234} 都经过同一点 P_{1234}.

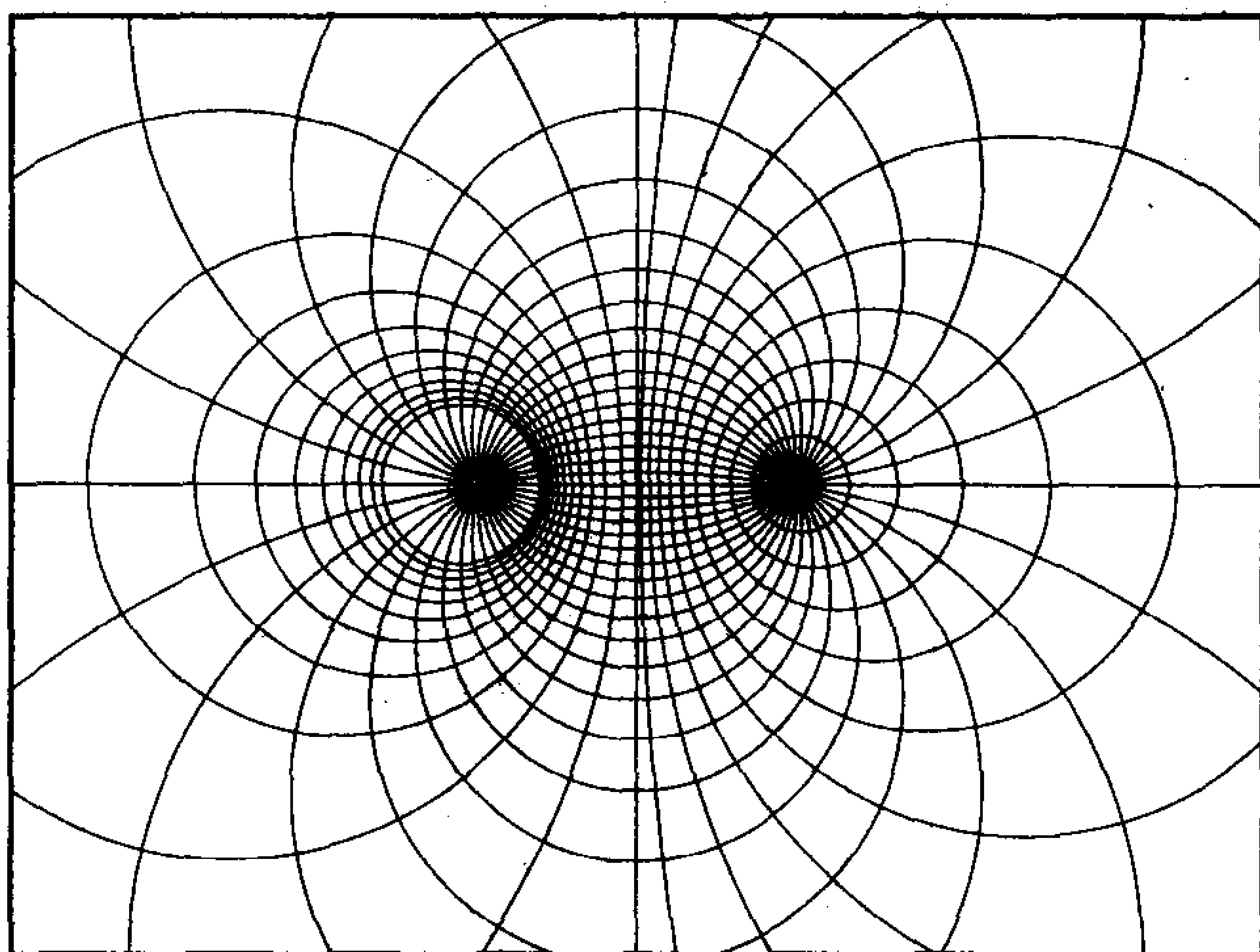
克里福德第二定理自然是:设 a_5 是经过点 Q 的第五个圆.于是五个点 P_{1234}, P_{1235}, P_{1245}, P_{1345} 和 P_{2345} 都在圆 a_{12345} 上.

克里福德第三定理是:六个圆 a_{12345}, a_{12356}, …, a_{23456} 都经过同一点 P_{123456}.

这一系列定理可以永远继续下去.

coaxial circles　共轴圆

下图表示两个共轴圆的集合.一个集合由所有经过两个定点的圆组成.第二个集合中的每一个圆都和第一个集合中的每一个圆正交;也就是说,它们相交成直角.



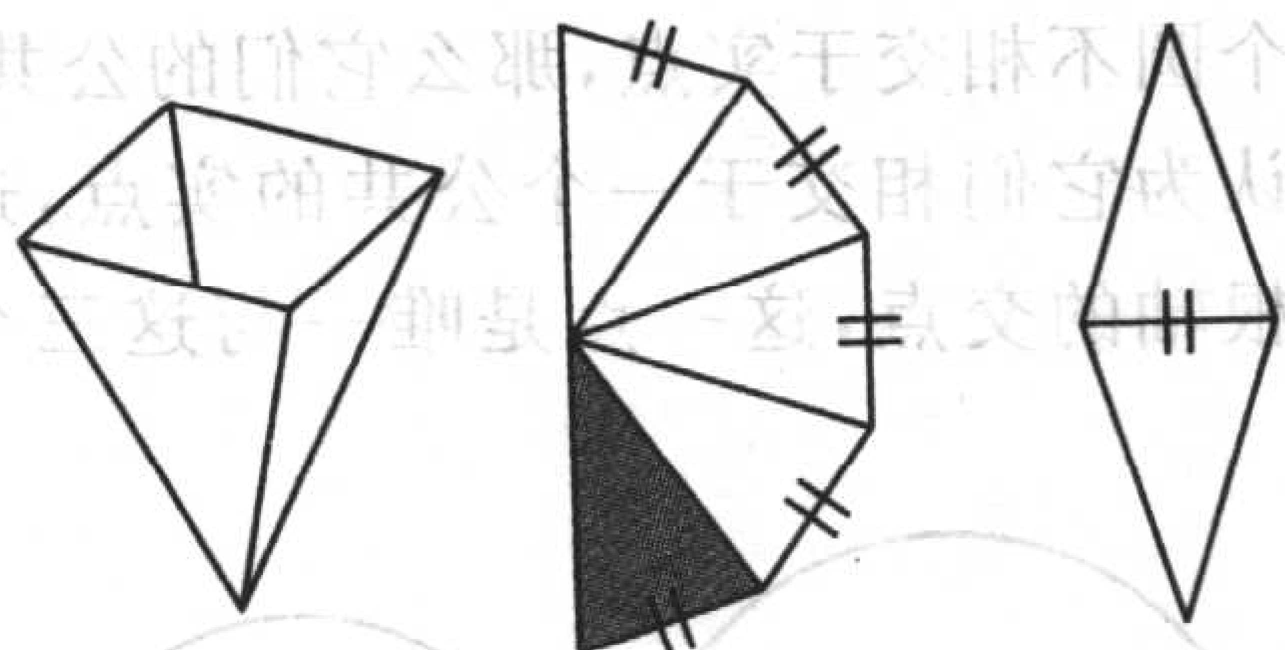
同一集合的各圆彼此都不相交，它们还包括在最小的圆的内部的两点作为极限情况，也包括竖直方向的对称轴，它也可以认为是直径为无穷大的圆.

另一个圆集中的每一个圆都经过第一个集合的两个极限点，并包括作为特殊情况的水平方向的对称轴. 它还有两个虚的极限点.

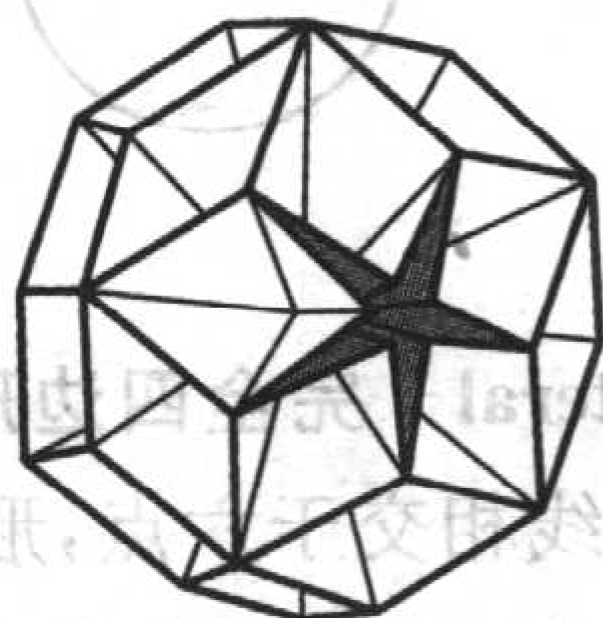
上图由一个同心圆的集合(其半径有规律地增加)和一个经过该圆心的(彼此之间的夹角相等的)直线集合的反演形成. 反演圆的圆心在左极限点，其半径为两圆心之间的距离. 不相交的每一个圆是同心圆之一的反演. 圆心落在反演圆的外部的圆产生左边的圆，因此与右边的圆的分布不同. 另一集合的半径逐渐增加的圆是直线之一的反演.

collapsoids　塌陷多面体

简·彼得森(Jean Pedersen)在对另一些东西进行特有的实验时发现了一类非凸的塌陷多面体.



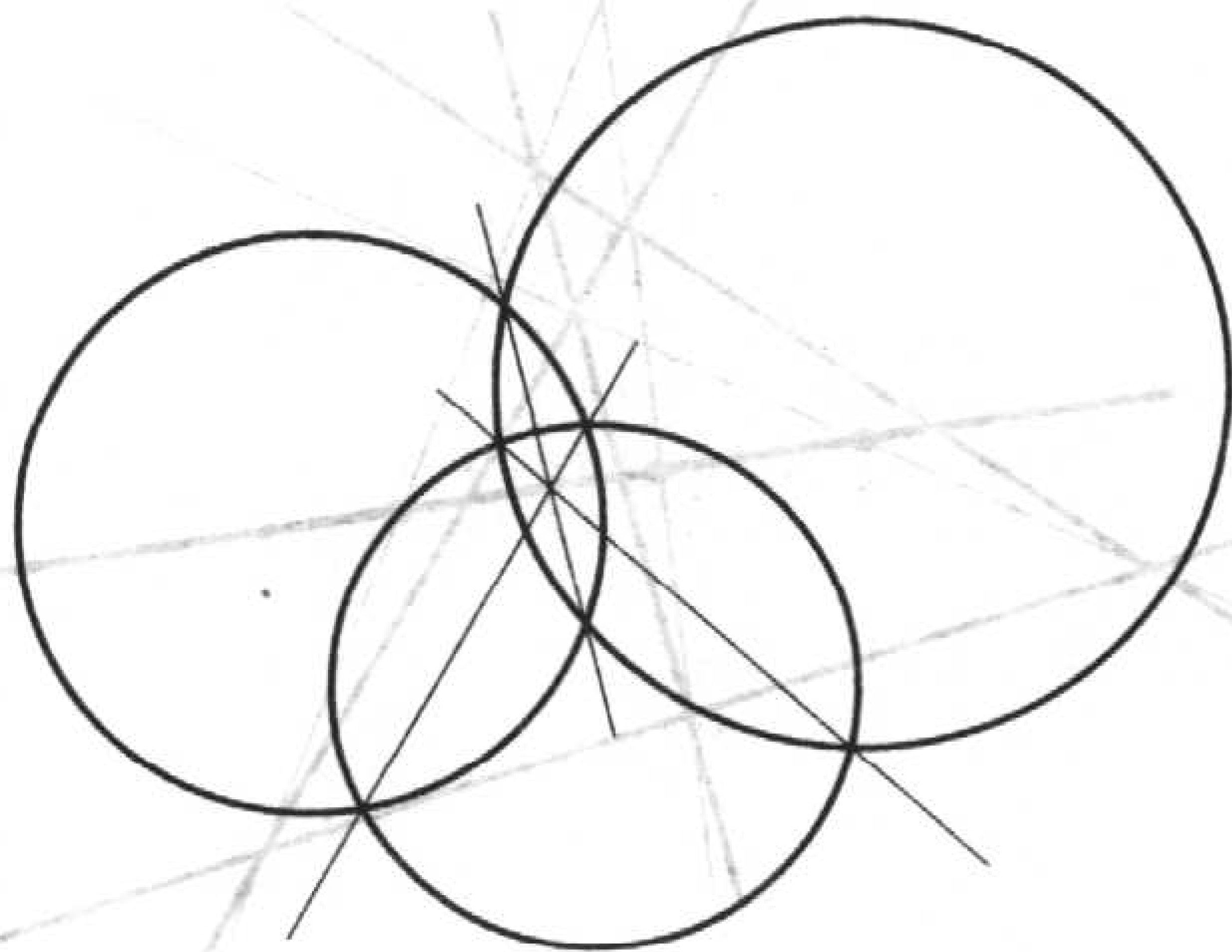
设想一个正二十面体(或者是一个正十二面体,结果也是一样)的每一条棱都被一个无底棱锥所替代,去掉的棱是无底棱锥的对角线.每一个无底棱锥在中心的上方形成一个网,其中的30个都像右上图所示那样附带一个突出的三角形,组成下面的有极性的塌陷多面体(如下图所示).



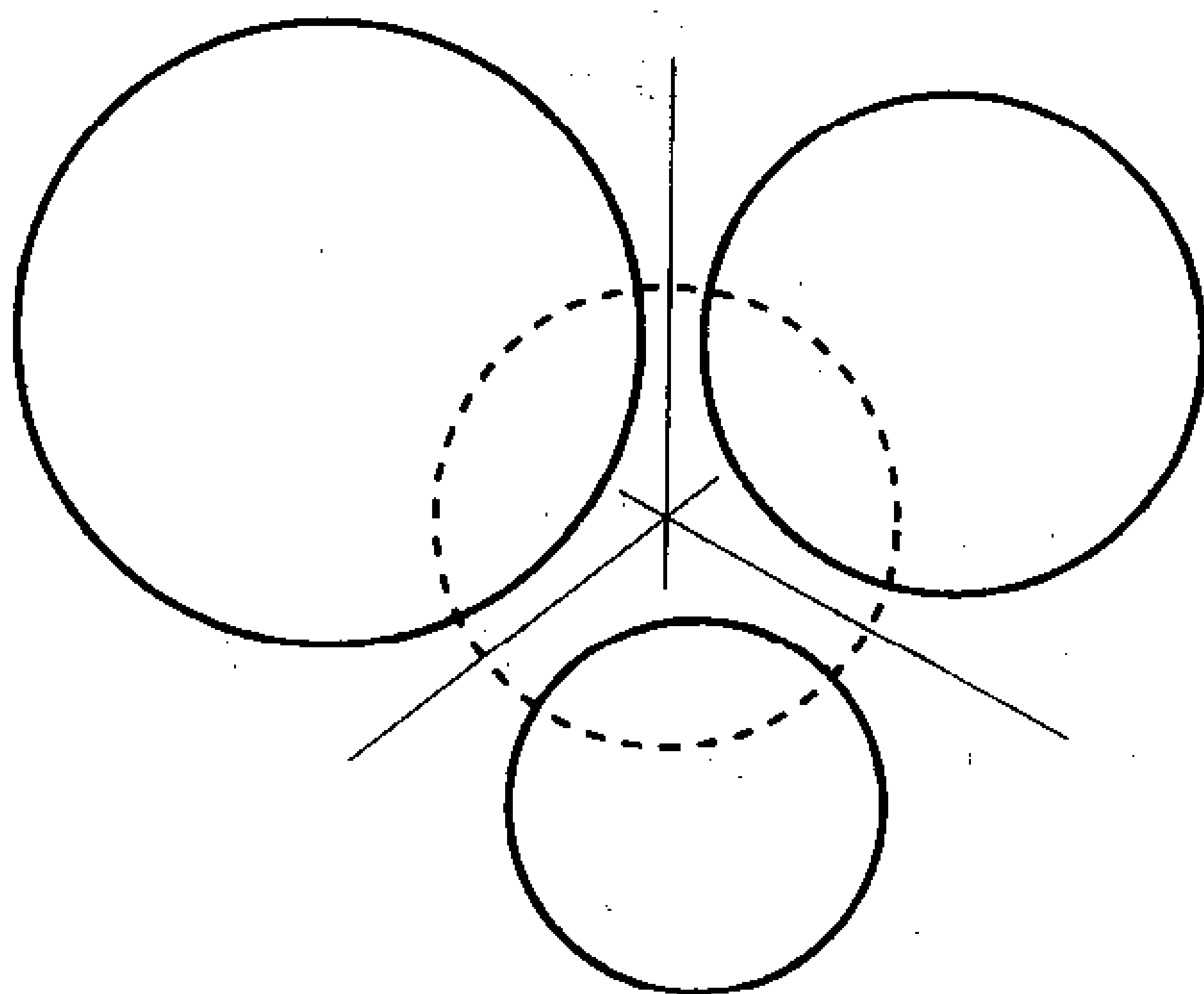
参考书:简·彼得森,塌陷多面体(Collapsoids),*Mathematical Gazette*, No. 408, 1975.

common chords　公共弦

给定三个相交的圆,则它们的公共弦经过同一点.



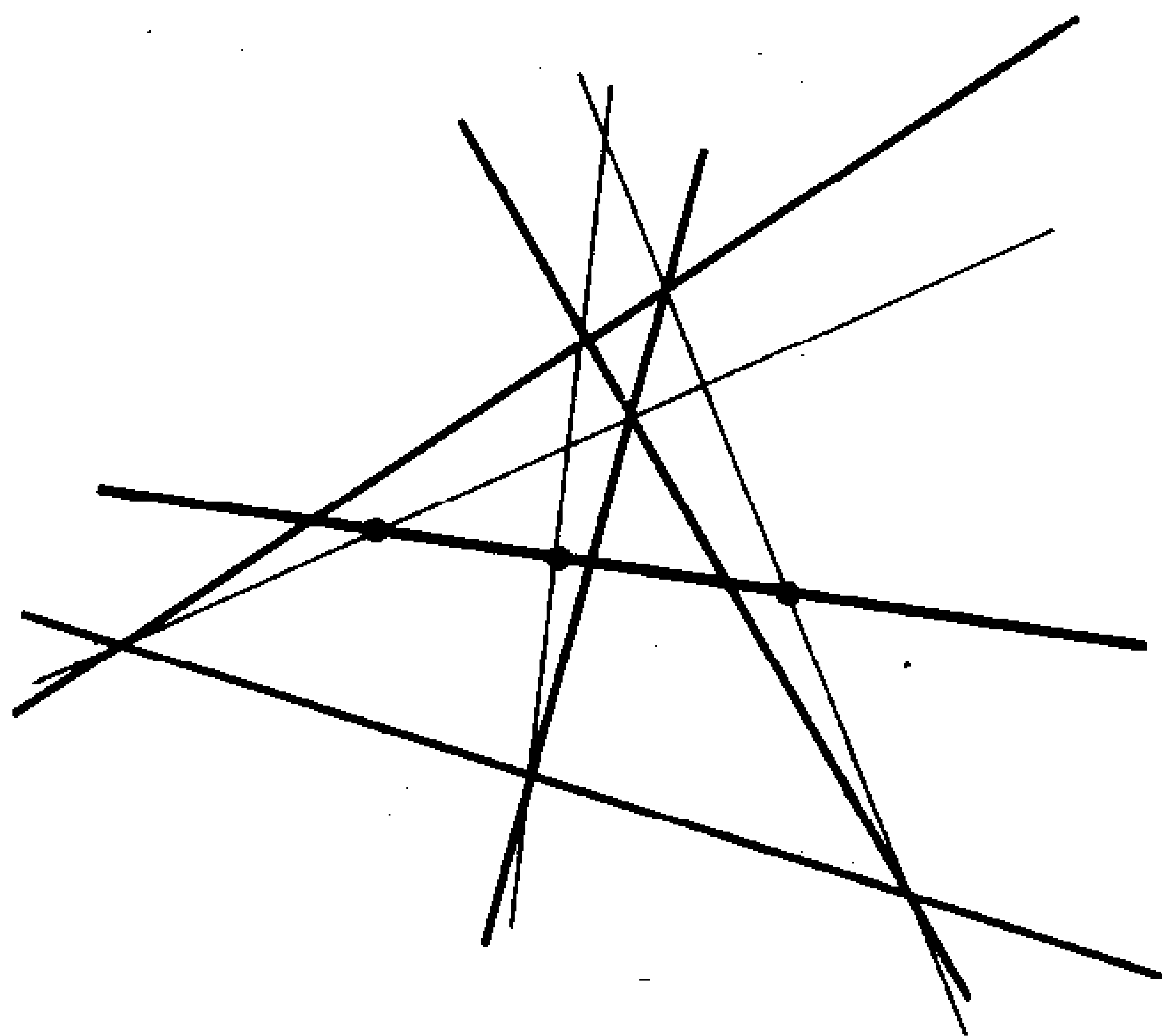
如果这三个圆不相交于实点，那么它们的公共弦不是实的. 但是还是可以认为它们相交于一个公共的实点，这个实点是这三个圆的三条根轴的交点，这一点是唯一与这三个圆都正交的圆的圆心.



complete quardrilateral　完全四边形

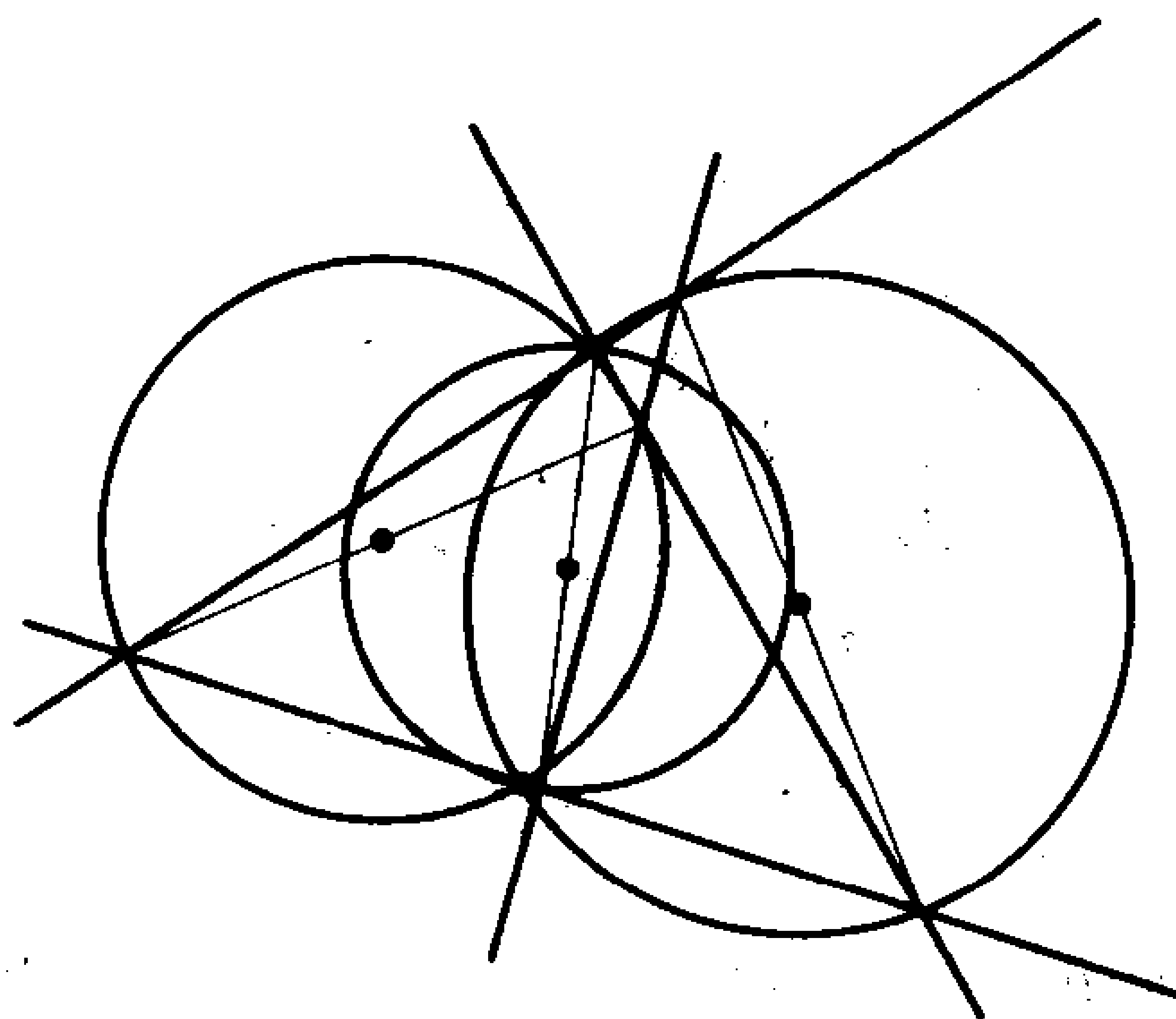
任何四条一般的直线相交于六点，形成一个完全四边形. 完全四边形与"通常的"四边形不同，它有三条对角线. 这三条对角线的中点在一条直线上.

牛顿证明了如果一条圆锥曲线内切于一个四边形，那么它的中心位于连接对角线的中点的直线上.



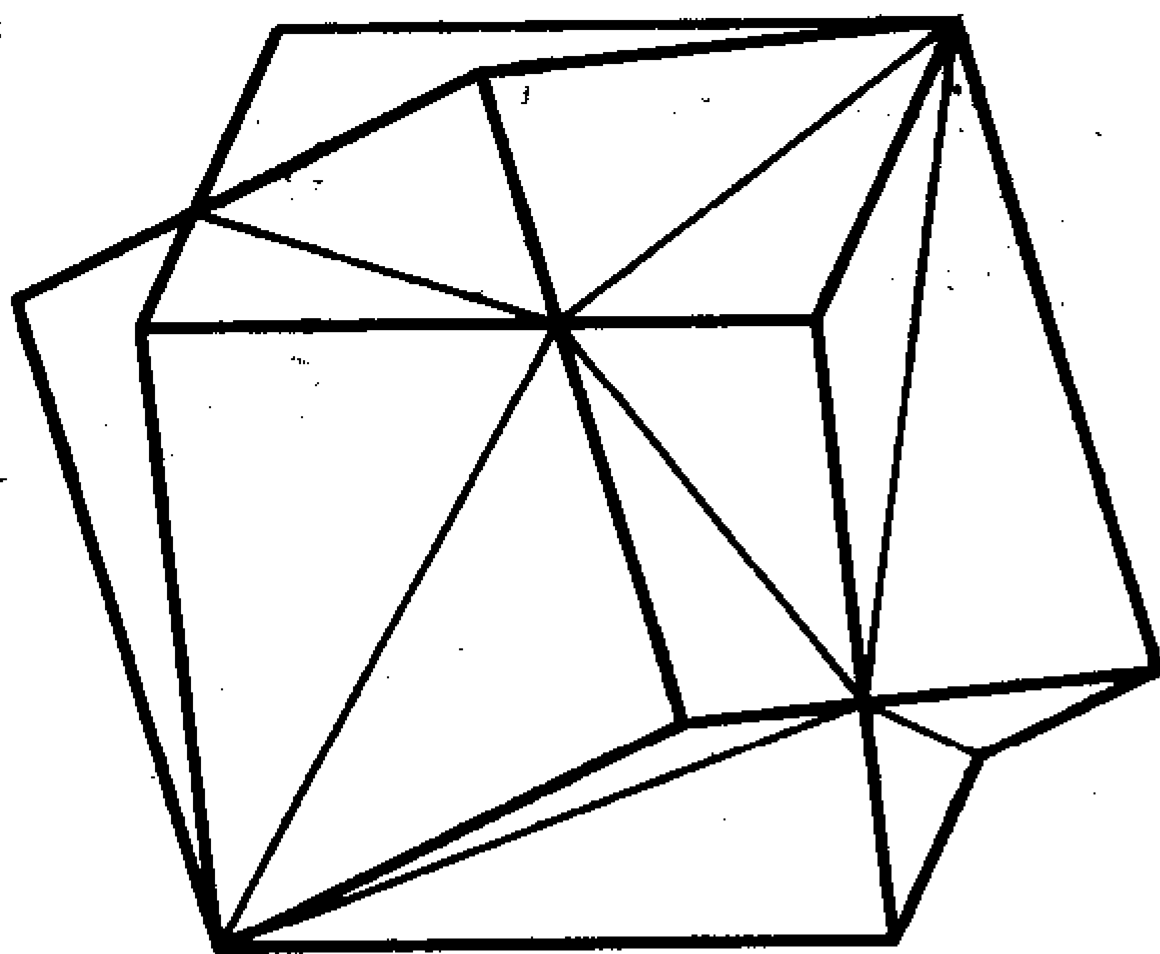
这四条直线形成四个三角形，它们的垂心位于一条直线上，该直线垂直于对角线的中点确定的直线，此外，它们的外接圆共点.

普吕克(Plücker)证明了以三条对角线为直径的圆有两个公共点，这两个公共点在连接四个三角形的垂心的直线上.



compound polyhedra　复合多面体

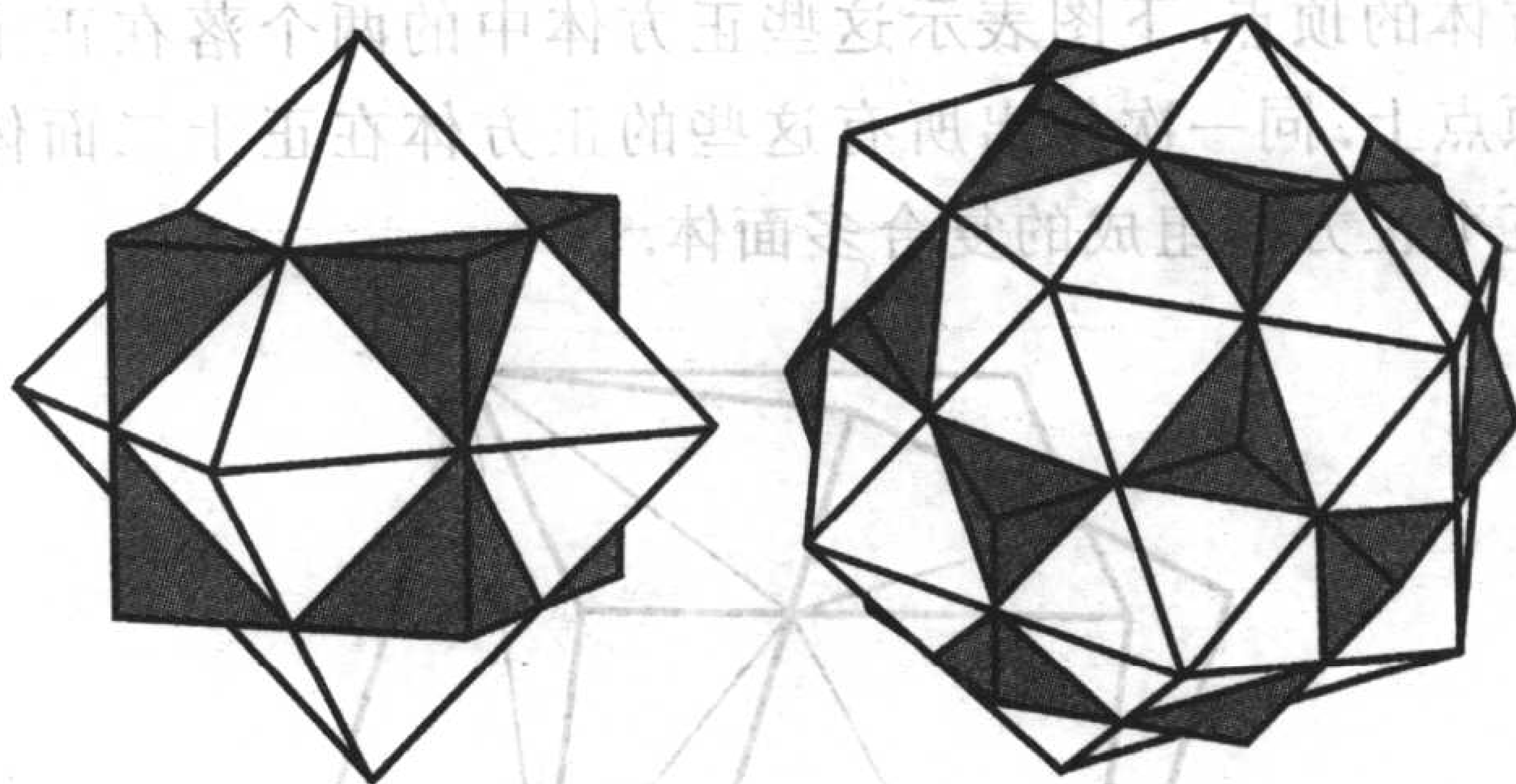
可以用五种不同的方法在正十二面体的顶点中选出八个作为正方体的顶点. 下图表示这些正方体中的两个落在正十二面体的顶点上. 同一次作出所有这些的正方体在正十二面体中形成由五个正方体组成的复合多面体.



类似地，可以用左旋和右旋两种不同的方法在这个正十二面体中取出五个正四面体，形成一个对称的复合多面体. 这五个正四面体的二十个面在这个复合多面体的内部形成一个看不到的正二十面体的面，它的顶点是这五个正四面体的五条棱的凹的交点.



用一对对偶的多面体，形成一个复合多面体也是可能的，因为它们的棱数相同，对称性也相同. 还存在正方体和正八面体组成的复合多面体(左)以及正十二面体和正二十面体组成的复合多面体(右).



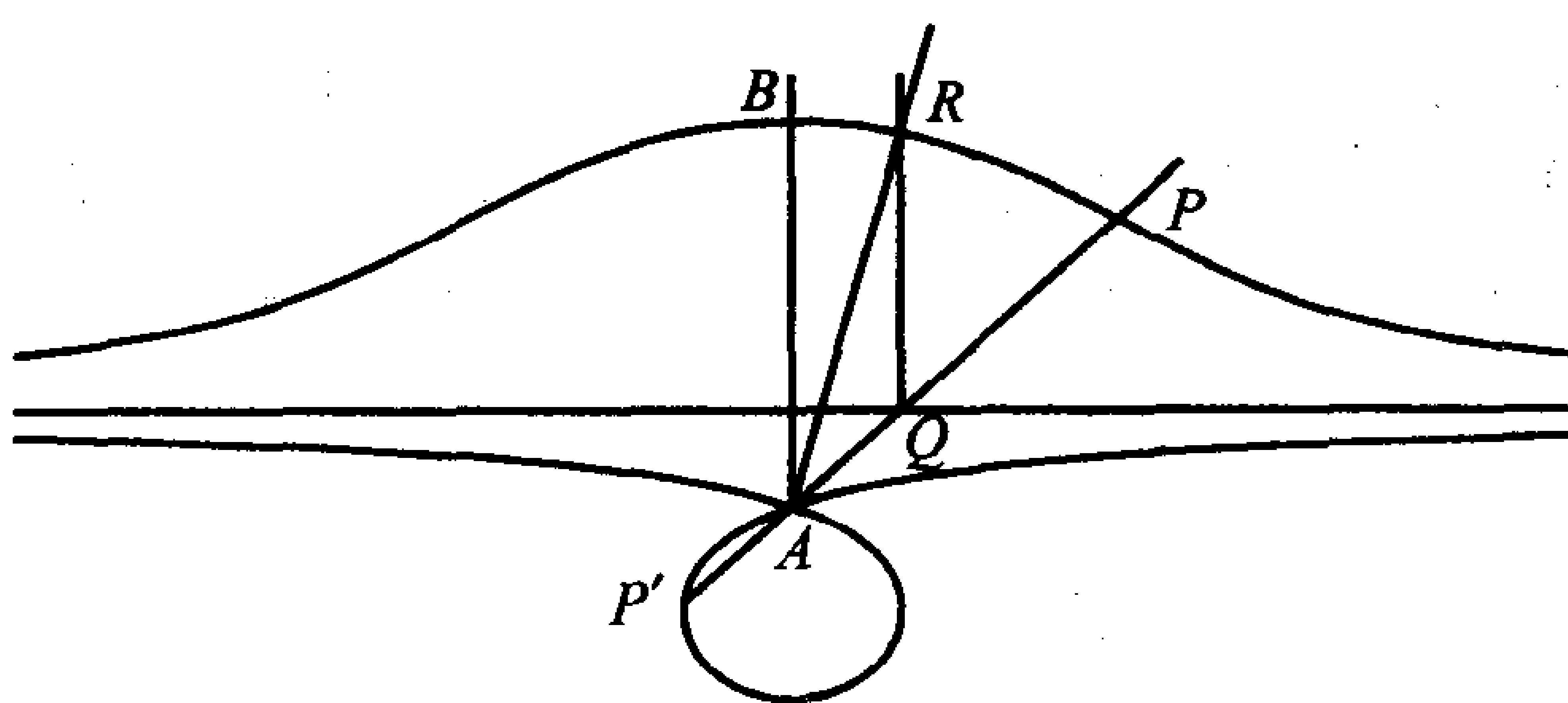
正十二面体和正二十面体的交是正二十-十二面体，它是去掉凸出的棱锥后得到的，两者的并是菱形三十面体(rhombic triacontahedron).

conchoid of Nicomedes　尼科米德蚌线

任取一条曲线和不在该曲线上的一个定点 A 以及常数 k. 过A 画一条直线交曲线于Q. 如果 P 和 P'是直线上满足 $P'Q=QP=k$ 的点，那么 P 和 P'就画出该曲线关于点 A 的蚌线.

一种实际的操作方法是把两支铅笔缚在一把尺的两端，在定点处扎一只针，让尺相对于针运动，使尺的中点沿着这条定直线运动.

下图就是这条直线关于点 A 的蚌线.

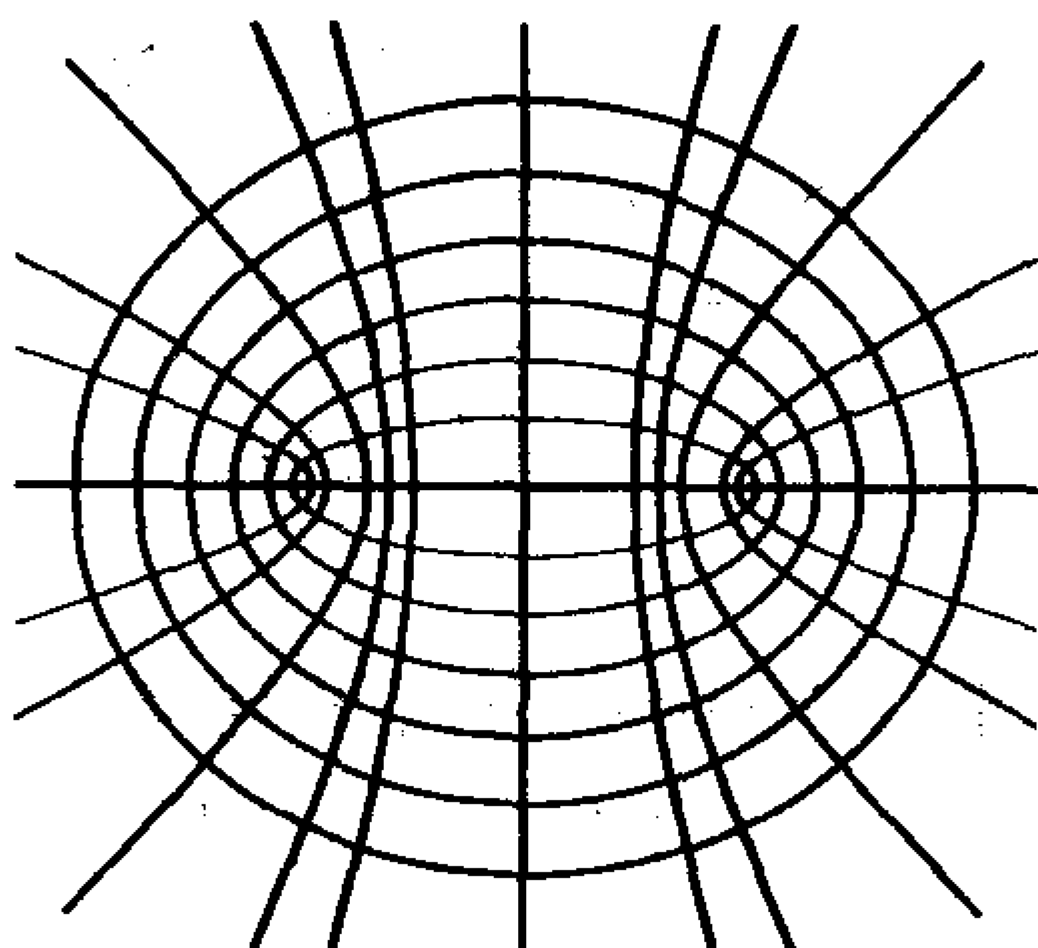


曲线的蚌线的变化情况很多，要根据定点的选取而定. 选取特殊的定点会产生十分简单的结果. 例如，圆关于圆上一定点的蚌线就是帕斯卡蚶线.

根据帕普斯的说法为了解决倍立方问题和三等分角的问题，尼科米德发明了（“贻贝壳状”的）蚌线. 上图表明后者是如何起作用的：设 $AQ=\frac{1}{2}QP=\frac{1}{2}k$，$QR$ 垂直于该直线，于是 $\angle RAB=\frac{1}{3}\angle PAB$.

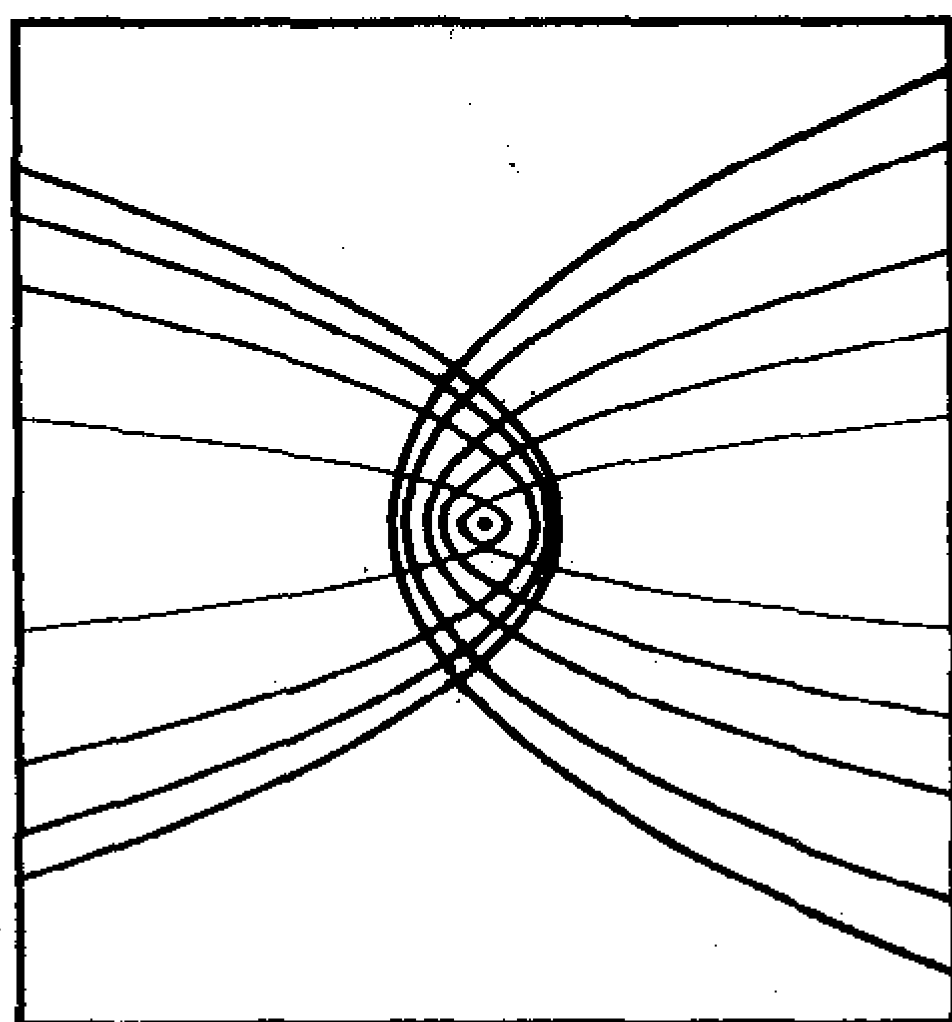
confocal conics　共焦点圆锥曲线

存在无数多个以任意给出的两点为焦点的椭圆和双曲线.



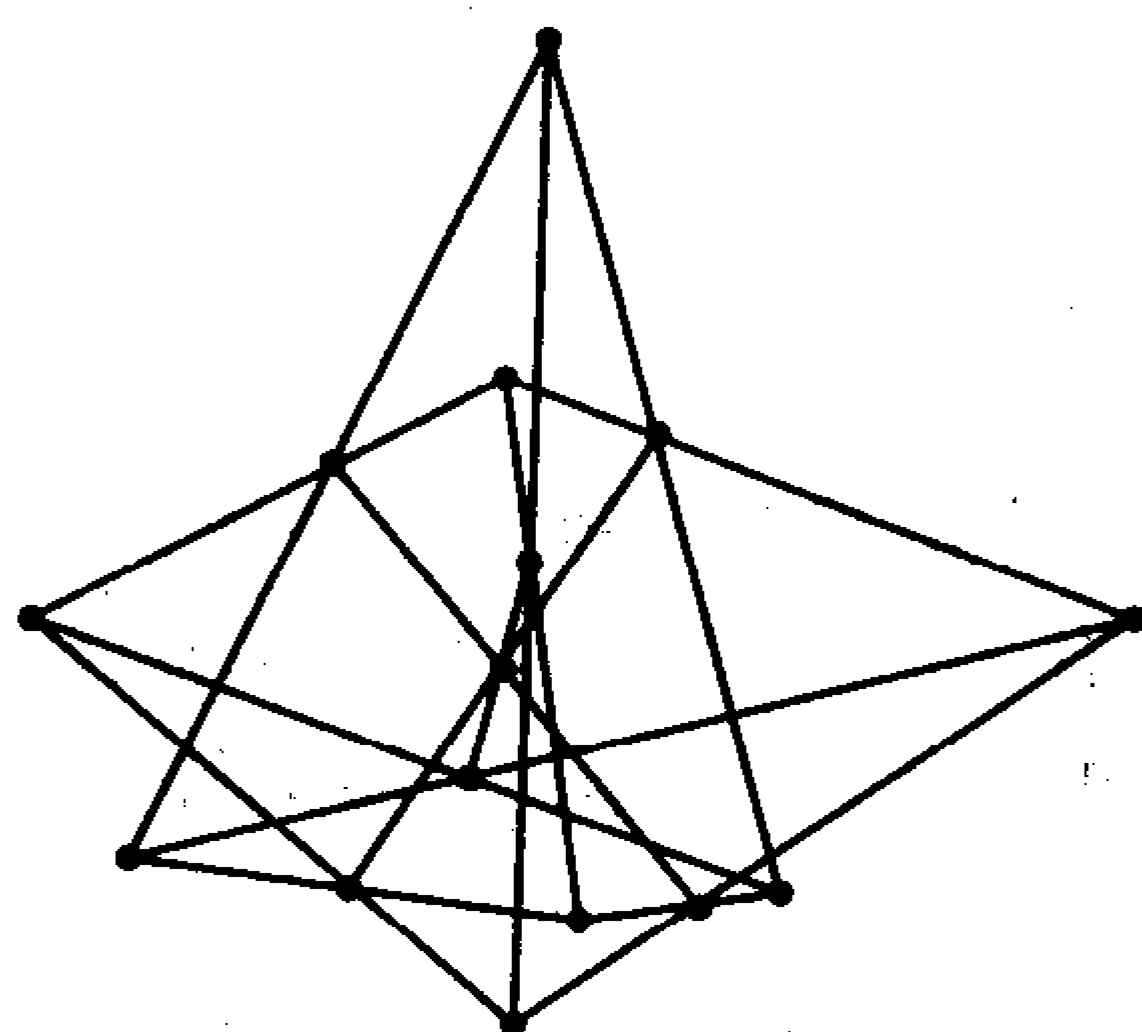
其中任何两个椭圆都不相交,任何两条双曲线都不相交,但是每一个椭圆都与每一条双曲线相交成直角.

只给一点和经过这一点的直线,存在两个由无数条抛物线组成的集合,这些抛物线都以该点为焦点,该直线为对称轴.一个集合中的每一条抛物线都与另一集合的每一条抛物线正交.



Cremona-Richmond configuration　克莱蒙那-里奇蒙构形

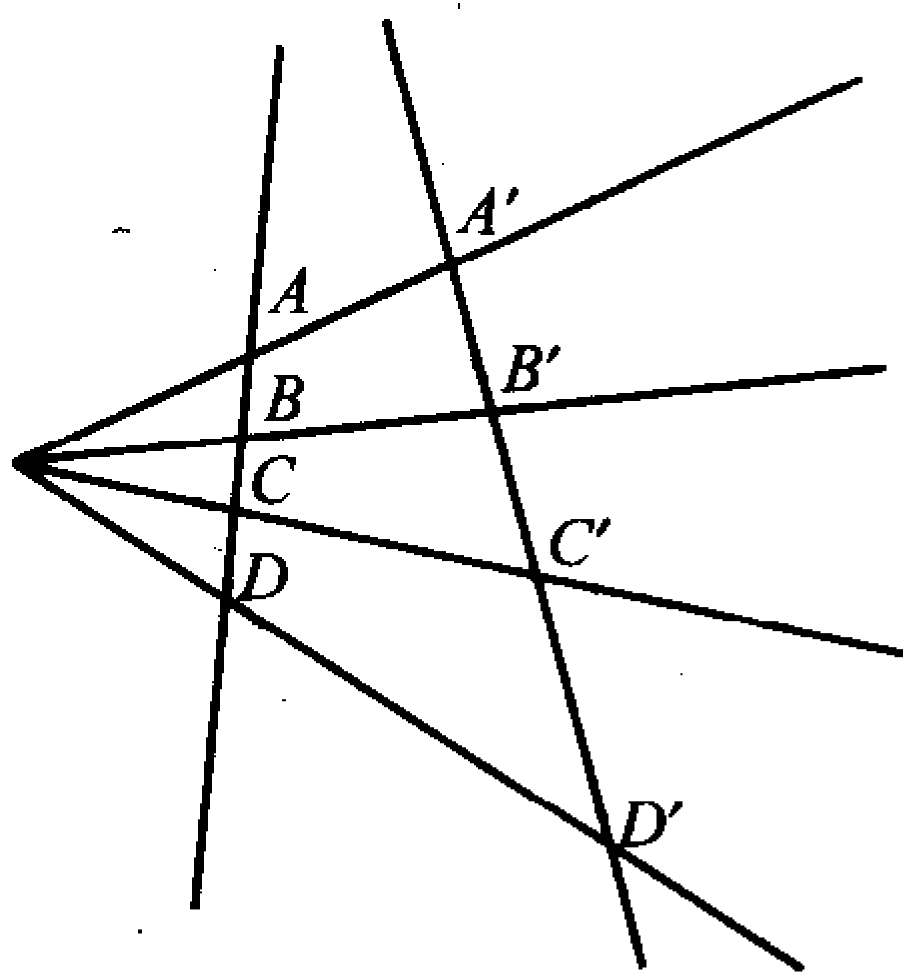
像法诺平面(Fano plane),戴沙格构形(Desargues's configuration)或者说十一-三(11—3)构形那样的最简单的点和直线的构形都至少包括一个这样的集合,这个集合由三个点以及连接它们的三条直线组成,并形成一个三角形.的确,任何一个构形应该包含一些三角形看来是很自然的.



克莱蒙那-里奇蒙(Cremona-Richmond)构形是一个 15_3 构形,它包括 15 条直线,15 个点,经过每一点都有 3 条直线,每条直线上有 3 个点,但是没有三角形.

cross - ratio　交比

帕普斯在他的《数学汇编》第七册中证明:如果经过同一点的四条直线被两条直线所截,那么分别称为 $ABCD$ 和 $A'B'C'D'$的交比的两个比相等. 交比这一题材当时被搁了下来,直到 1639 年戴沙格在他的《试图处理圆锥与平面相交结果的草稿》(*Brouillon Project*)一书中才得到发展.



交比可以认为是两个比的比: AB/BC 除以 AD/DC. 四

条共点的直线的交比就是由截这四条直线的任何直线形成的交比.

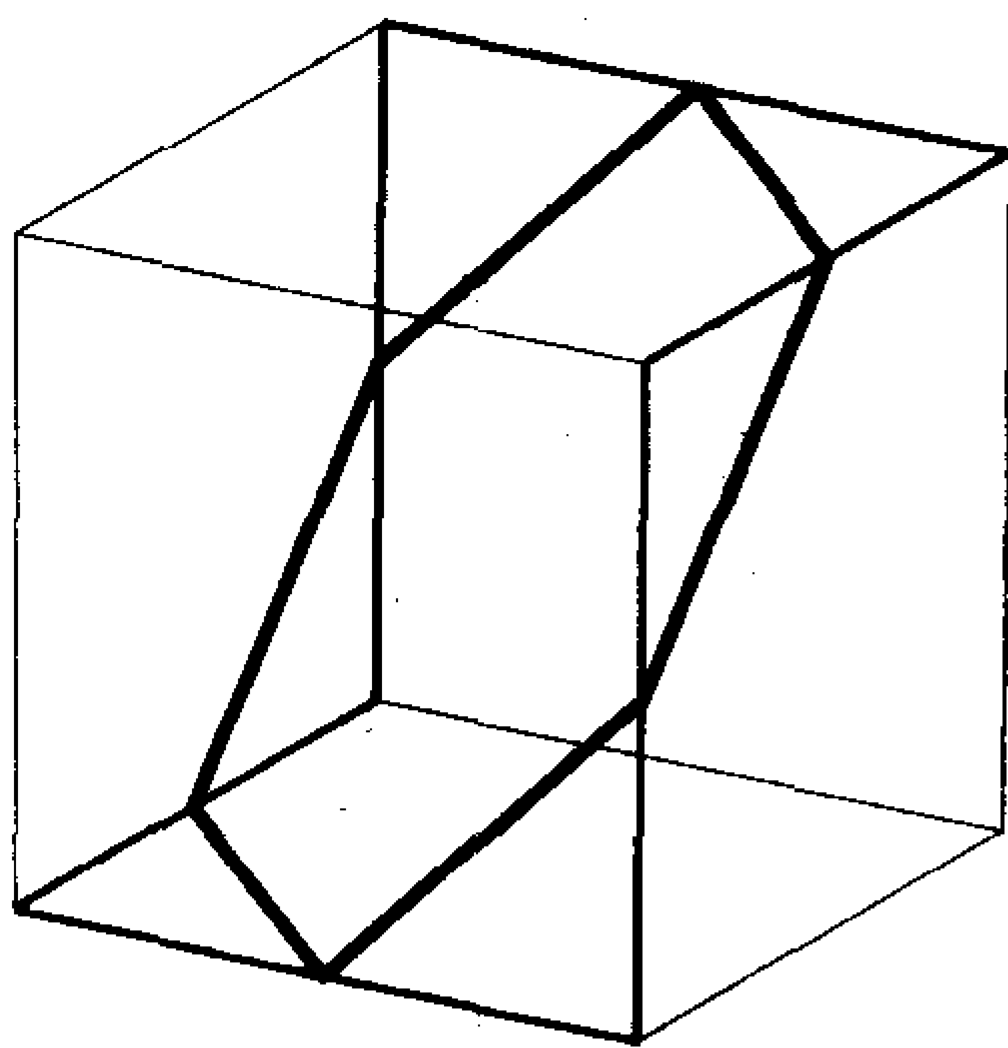
cube　正方体

正方体是最熟知的柏拉图体或正多面体.它有 6 个面,8 个顶点,12 条棱;还有 13 条对称轴,其中 3 条经过相对两面的中心,4 条经过相对的顶点,6 条经过一对对棱的中点.它也是一个带状多面体(zonohedron).

当每一个正方体与其相邻的正方体相交于整个面时,相同的正方体填满整个空间是最自然不过的.但是可以用无穷多种方法把它们填满空间.不仅是因为各层正方体彼此之间滑动,而且可以用无穷多种方法把正方体放到每一层去.没有其他可以填满空间的立体图形有如此的灵活性.

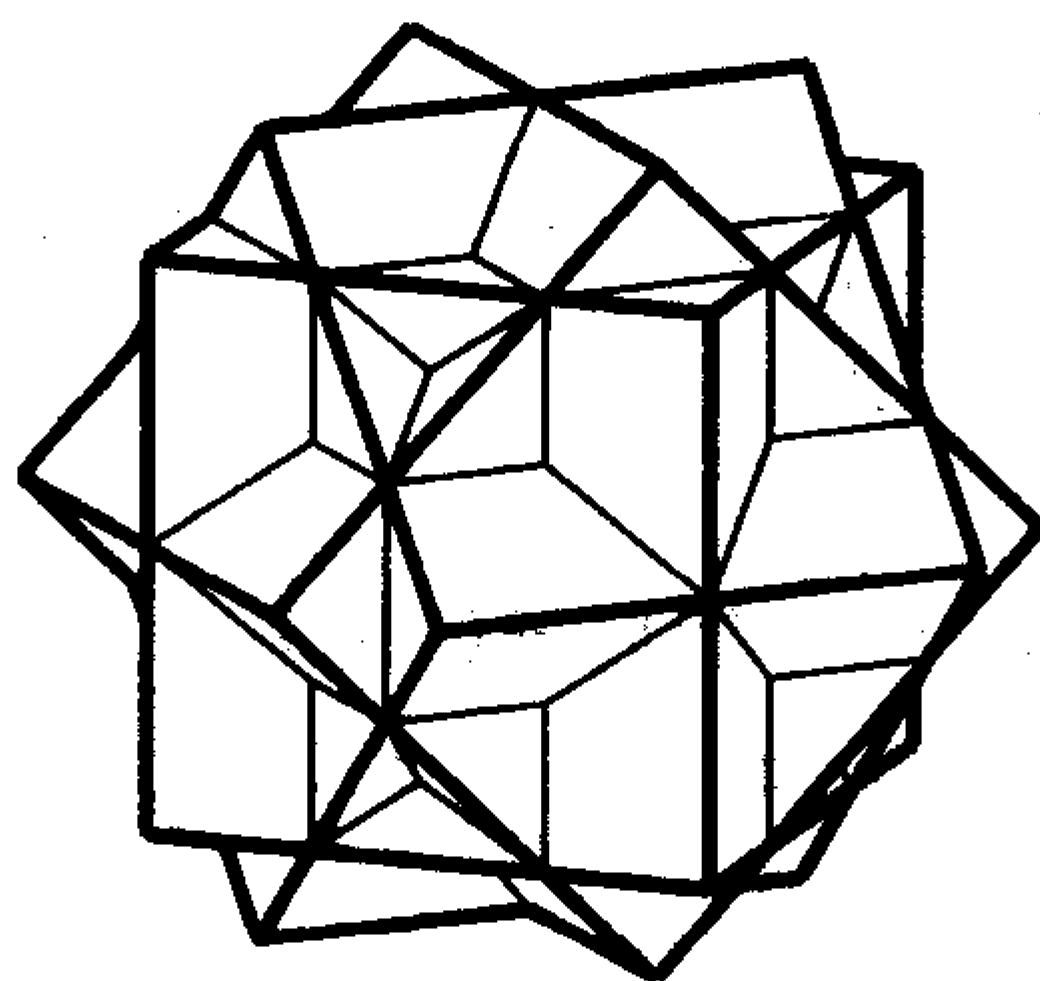
取一个正方体,去掉经过一对相对顶点的所有的棱.余下的棱的中点就是平面正六边形的顶点.如果把某些正方体自然地堆起来填满空间,那么在一个正方形中截得的这个正六边形所在的平面将把所有这些正方形截出一个由正六边形和等边三角形组成的半正规镶嵌.

用截得正六边形的平面平分正方体的方法有四种.所有这样的正六边形的棱是一个正方正八面体的二十四条棱.



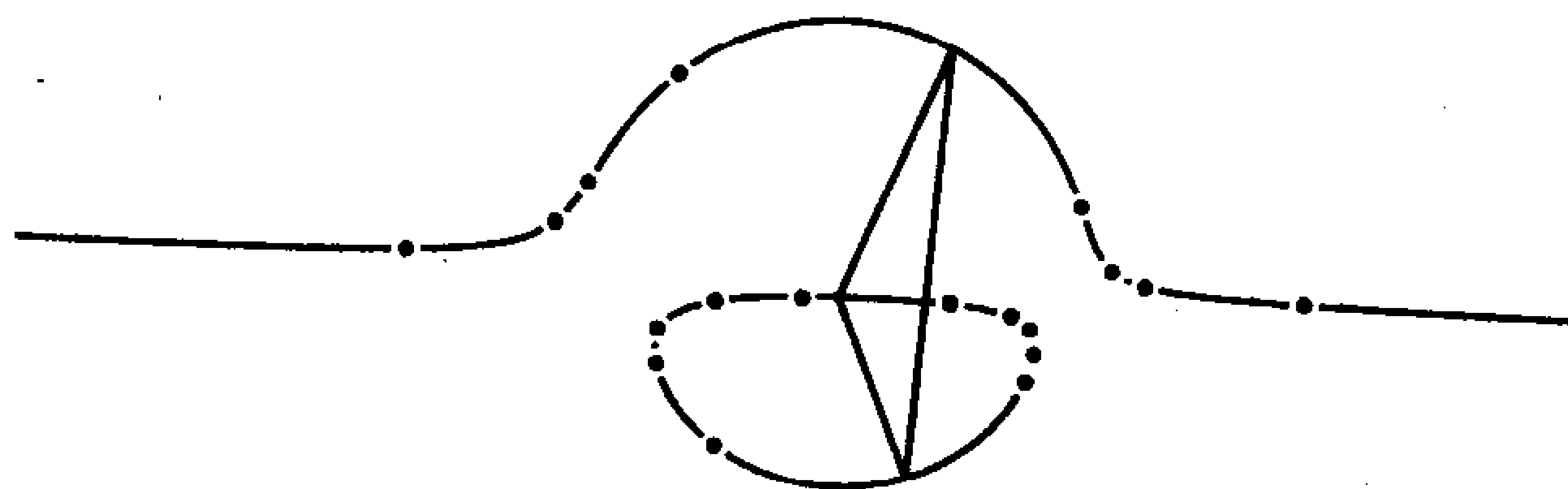
正方体的对偶多面体是一个正八面体，它由连接正方体的每一个面的中心和相邻的面的中心形成.

下图是一个互相镶嵌的三个正方体组成的复合多面体. 每两个正方体合用一条经过一对相对的面的对称轴.



cubic and triangle　三次曲线和三角形

19 世纪下半叶到 20 世纪初在一些数学家中掀起了一股被称为“三角形的现代几何”的热潮. 三角形的许多新的特征被发现了，通常都以发现者的姓名命名：如勃劳卡德点(the Brocard point)，热尔岗点(the Gergonne point)，纳格尔点(Nagel’s point)，莱蒙纳点(Lemoine points)，塔克圆(Tuker’s circle)，纽伯格圆(Neuberg’s circle)，富尔曼圆(Fuhrmann’s circles)，基勃尔特双曲线(Kiepert’s hyperbola)，等等.



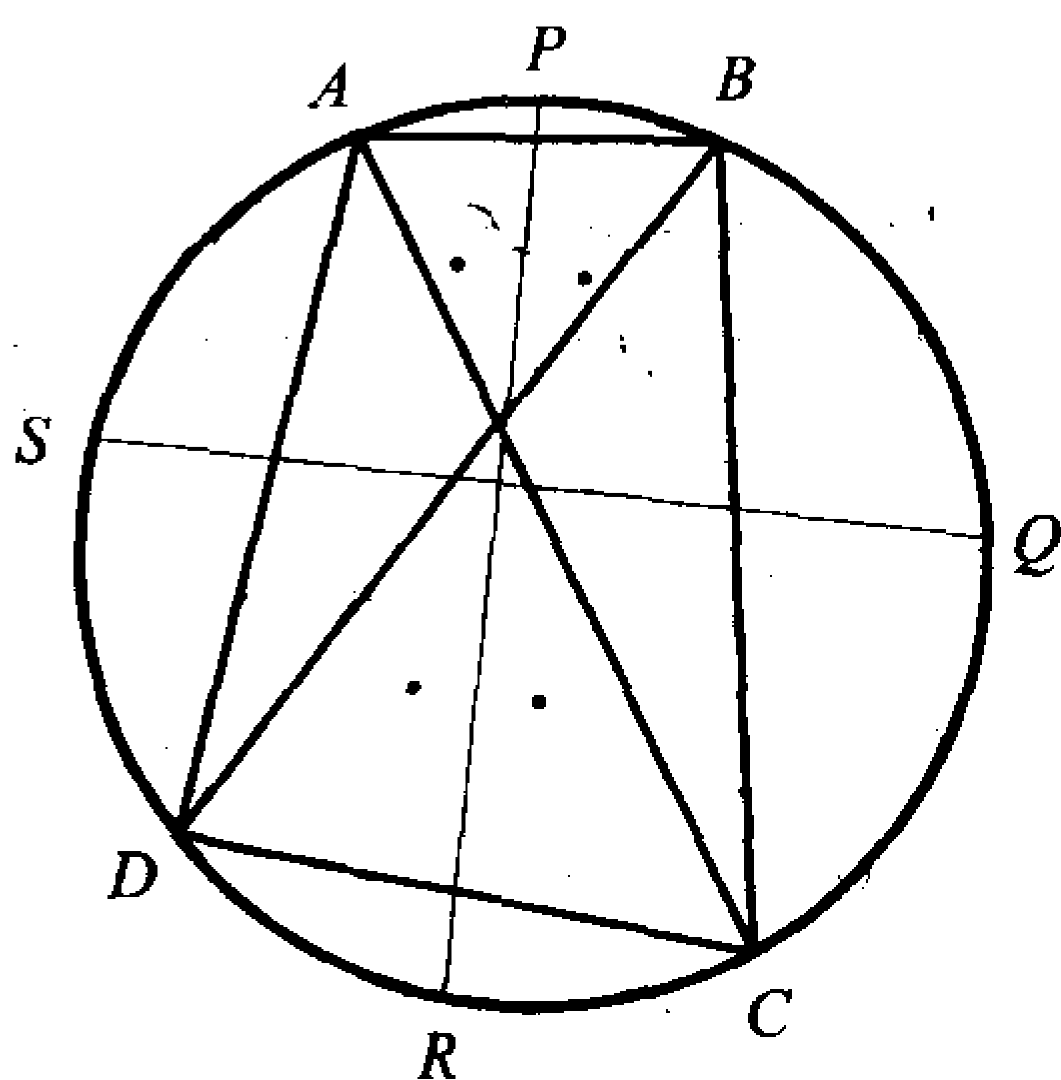
上图表示他们不断努力的最高成果，即一条具有渐近线的

三次曲线，它经过不少于 37 个对于一般三角形来说都是有意义的点；图中出现了 21 个点．其中在三次曲线上的有：三角形的三个顶点以及这些顶点关于对边的对称点，以各边长为边在该边的两侧的六个等边三角形的另外的六个顶点，外心，垂心，内心和旁心．

该三次曲线在最后这四点处的切线都平行于渐近线．其他的性质有：经过一个顶点的任何直线与三次曲线相交于两点，这两点在经过其他两个顶点的圆上．

cyclic quadrilateral　圆内接四边形

一个四边形内接于圆．如果 $ABCD$ 是一个内接于圆的四边形，那么角 $A+C=B+D=180°$．

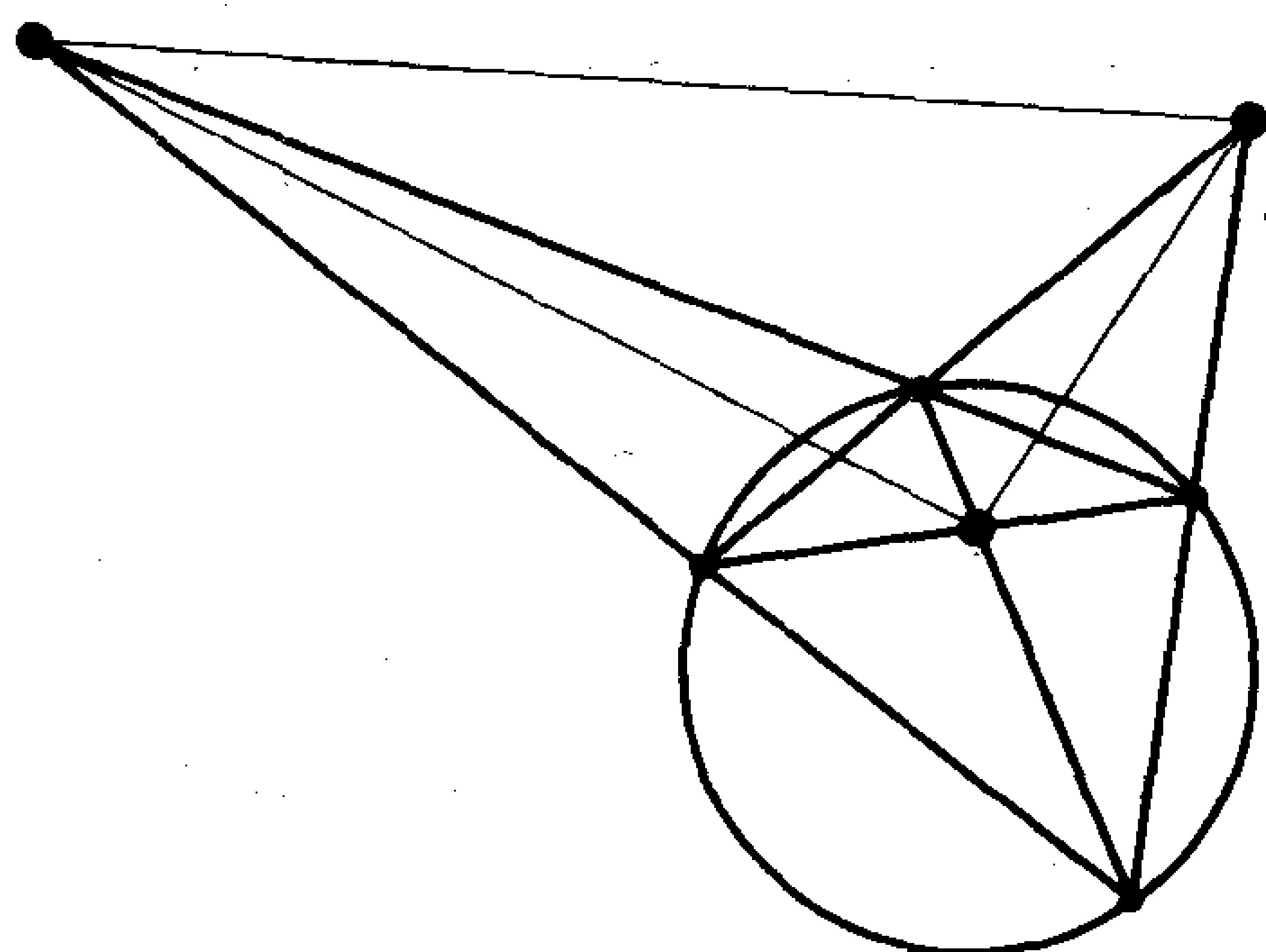


依次去掉每一个顶点得到四个三角形：BCD，ACD，ABD，ABC．上图中的四个黑点表示这四个三角形的内心，它们形成一个矩形．

如果 P，Q，R 和 S 是弧 AB，BC，CD，DA 的中点，那么矩形的边平行于 PR 和 QS，并且 PR 和 QS 相交于矩形的中心．

如果再加上原四个三角形的旁心，那么它们和内心一起形成一个由 16 个点组成 4×4 的矩形格点．

这四个三角形的重心组成一个与原四边形相似的四边形，它们的四个九点圆的圆心也是如此. 四个垂心组成一个与原四边形全等的四边形.

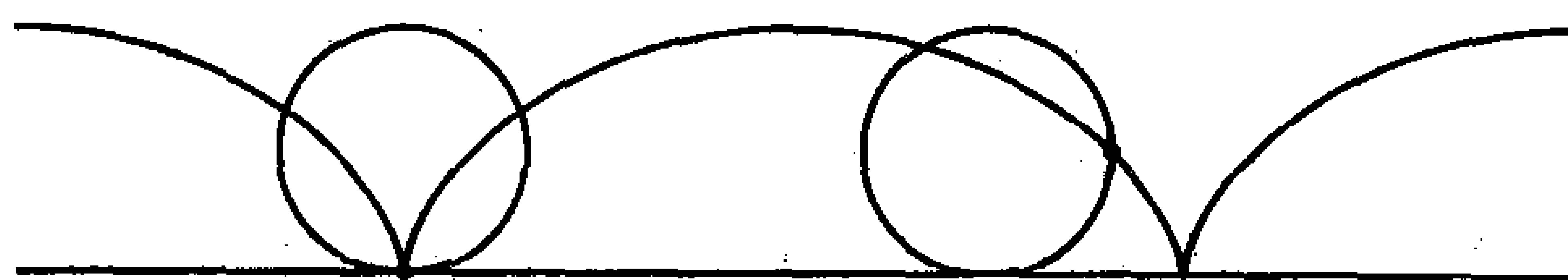


在圆上取四点，并作连接每两点得到六条直线. 三对对边(对角线也看作一对对边)的交点组成一个对角线三角形(图中的细线). 每一个顶点都是对边关于圆的极. 如果过原四点作切线，那么它们两两相交于对角线三角形的边上.

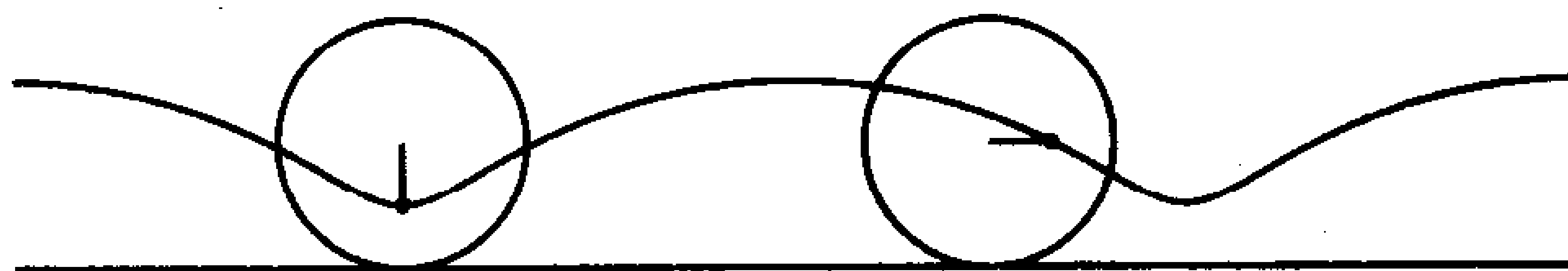
cycloid　摆线

马林·梅森(Marin Mersenne)考虑过关于摆线的问题，但是他习惯于把这些问题交给他的朋友数学家和记者. 第一篇关于摆线的论文是伽利略的学生伊凡格里斯达·托里拆利(Evangelista Torricelli)在1644年写的，帕斯卡也研究过这种曲线，甚至利用其研究以缓减他的牙痛.

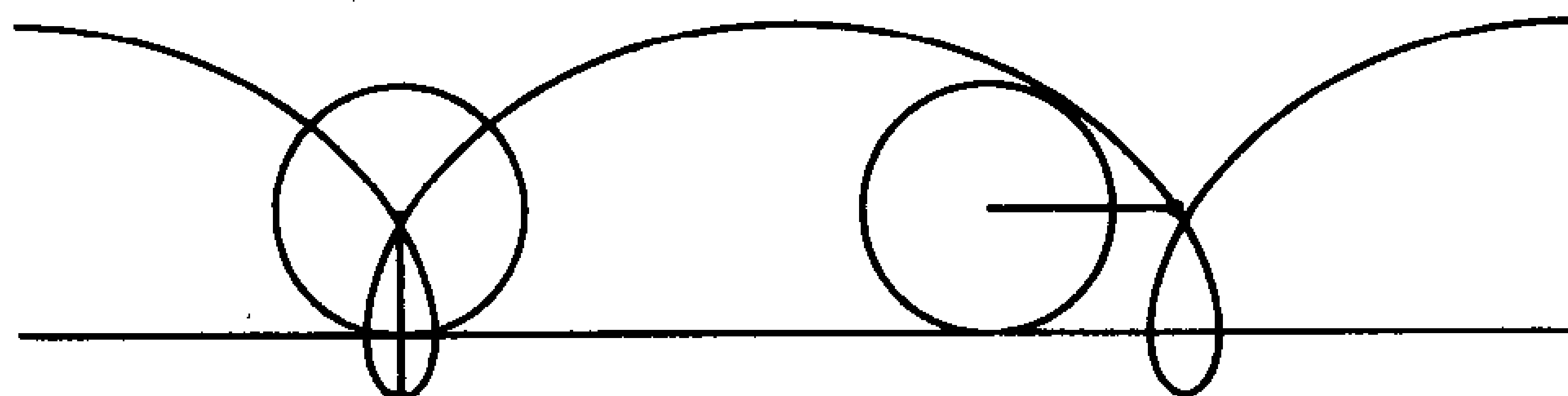
当一个轮子在一条笔直的表面上滚动时，轮子边缘上一点就画出一条摆线：



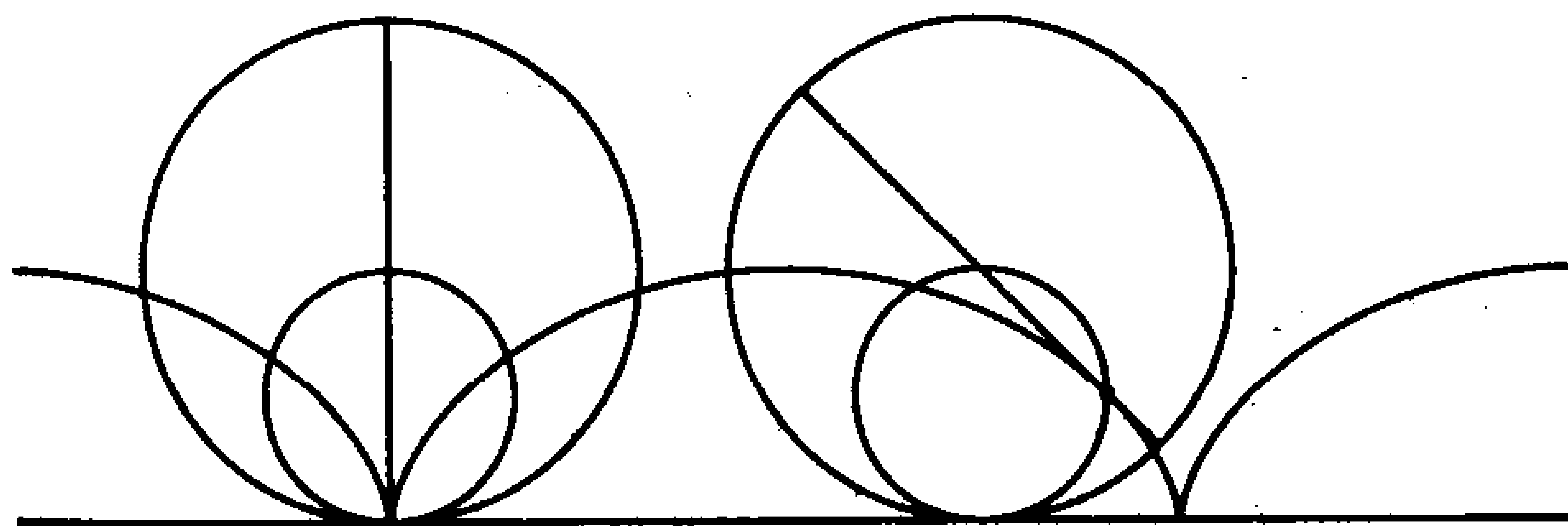
轮子内部的点画出一条短幅摆线(curtate cycloid):



当火车轮子在铁轨上滚动时,轮子圆周上的点就画出一条带有小圈的长幅摆线(protate cycloid):



设想有一个圆,其直径是原来的圆的 2 倍,与它一起滚动.此时,大圆中竖直方向的直径与摆线相切,这条摆线就是它的渐屈线.



伽利略的猜想是正确的,他认为摆线是桥拱的较为坚固的形状.

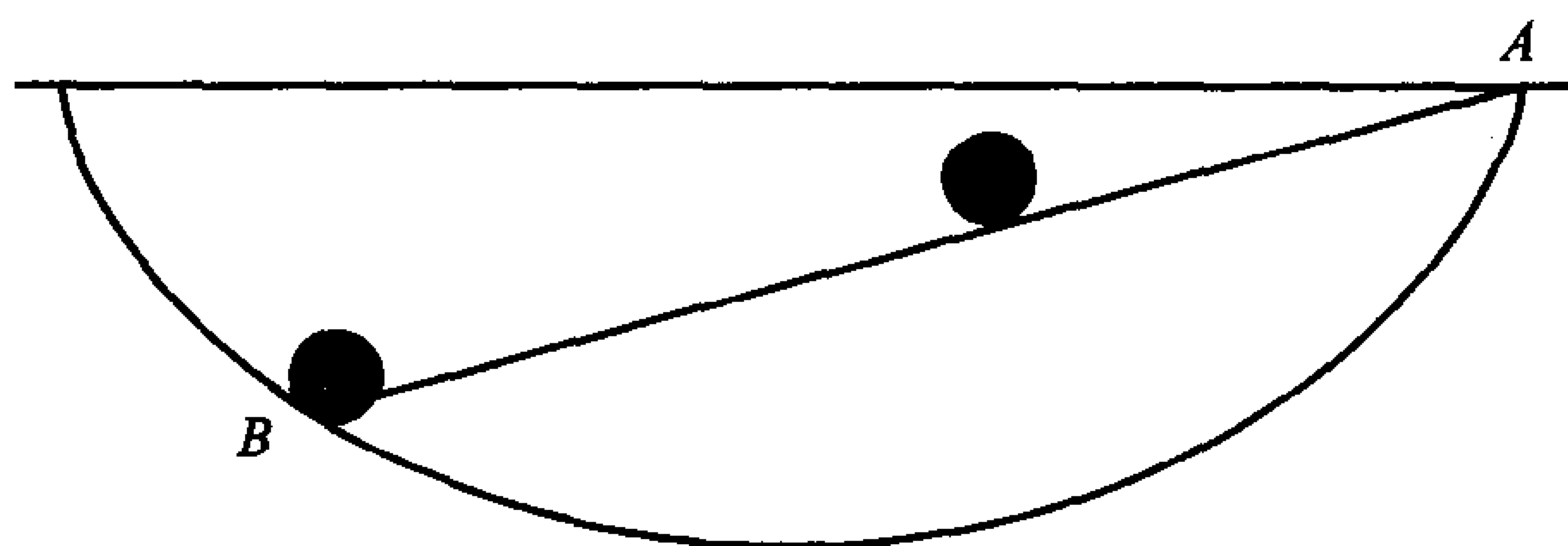
伽利略在 1599 年还试图求出摆线的面积.按照阿基米德的方法,他剪出一个完整的摆线拱形,称了它的重量,然后与生成它的圆的重量进行比较.他得出结论说,它的面积大约是生成它的圆的面积的三倍.罗伯伐尔(Roberval)在 1634 年证明了它的面积恰好是生成它的圆的面积的三倍.

一个完整的摆线的弧长等于生成它的圆的外切正方形的周

长. 这是出色的几何学家克利斯多弗·雷恩(Christopher Wren)爵士在 1658 年证明的.

摆线的渐屈线是一个相同的摆线,它与原摆线的相位相差半圈.

摆线也是最速降线问题的解:最速降线问题是一颗粒子在重力的作用下沿曲线以最短的时间从 A 点到 B 点,最速降线的形状是什么?

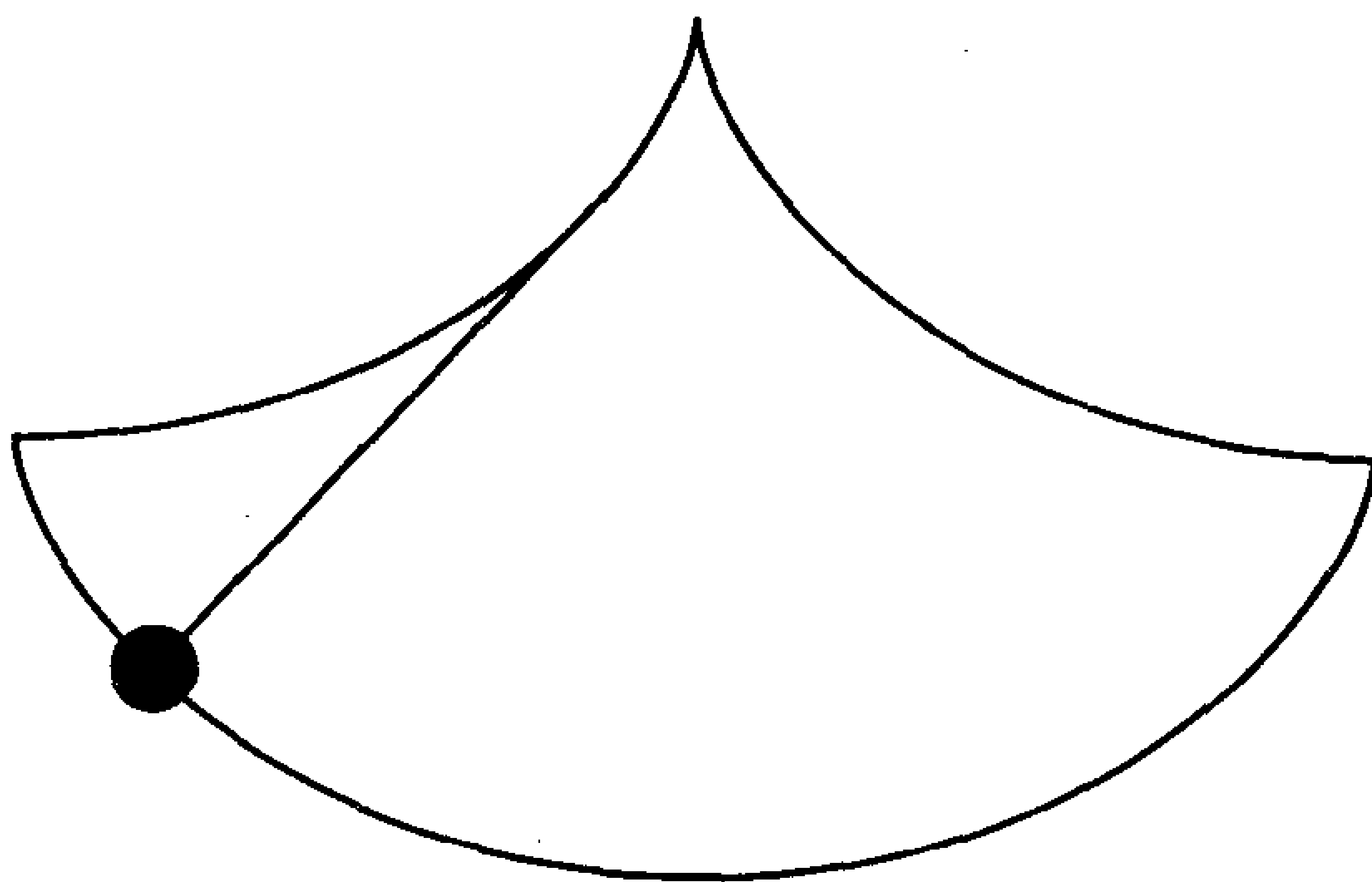


这一解答的一个奇特的性质是:如果终点只比起点的高度稍略低一点,那么最快的路径是让粒子先在终点的下面,然后往上一点!

只要摆线的轴是竖直方向,那么一颗粒子沿着摆线槽往下滚,不管它在摆线上的哪一点出发,都在同样的时间内到达底部.

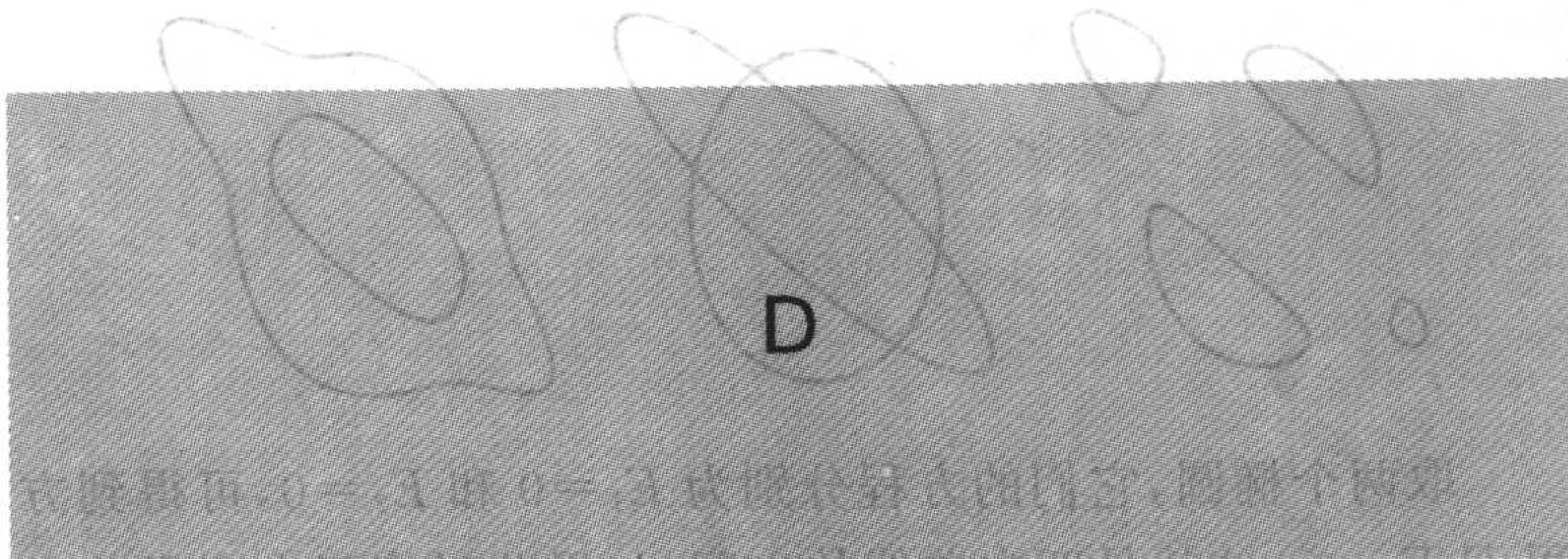
换句话说,摆线是既是最速降线,也是等时降线.

伽利略发现摆的周期只取决于它的长度,但这只是在摆动



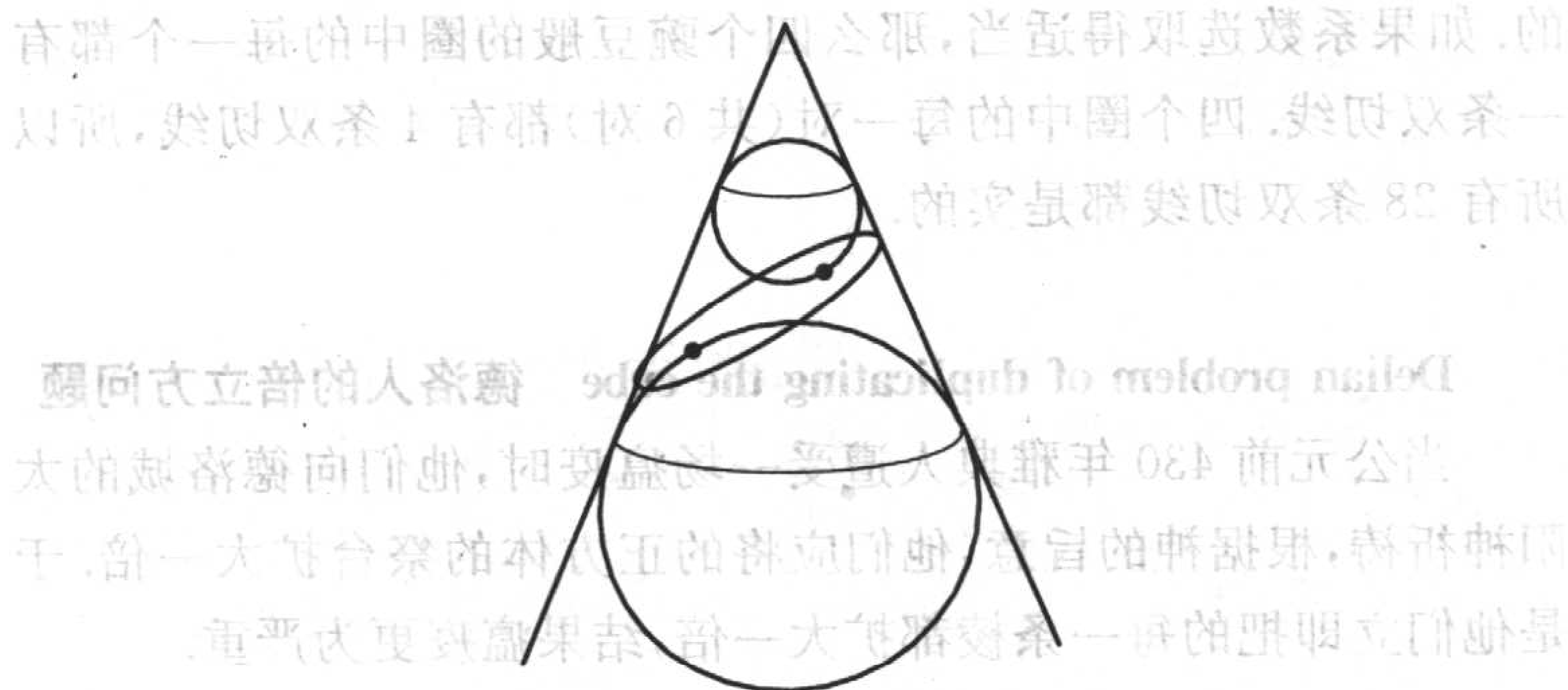
幅度很小的情况时正确．如果将摆包在摆线上，那么这一结论对于任何振幅都是正确的．

惠根斯是首先利用这个原理试图改进摆钟的人，但是这一想法所产生的问题比要解决的问题更多，于是很快就被放弃了．



Dandelin spheres　旦德林球

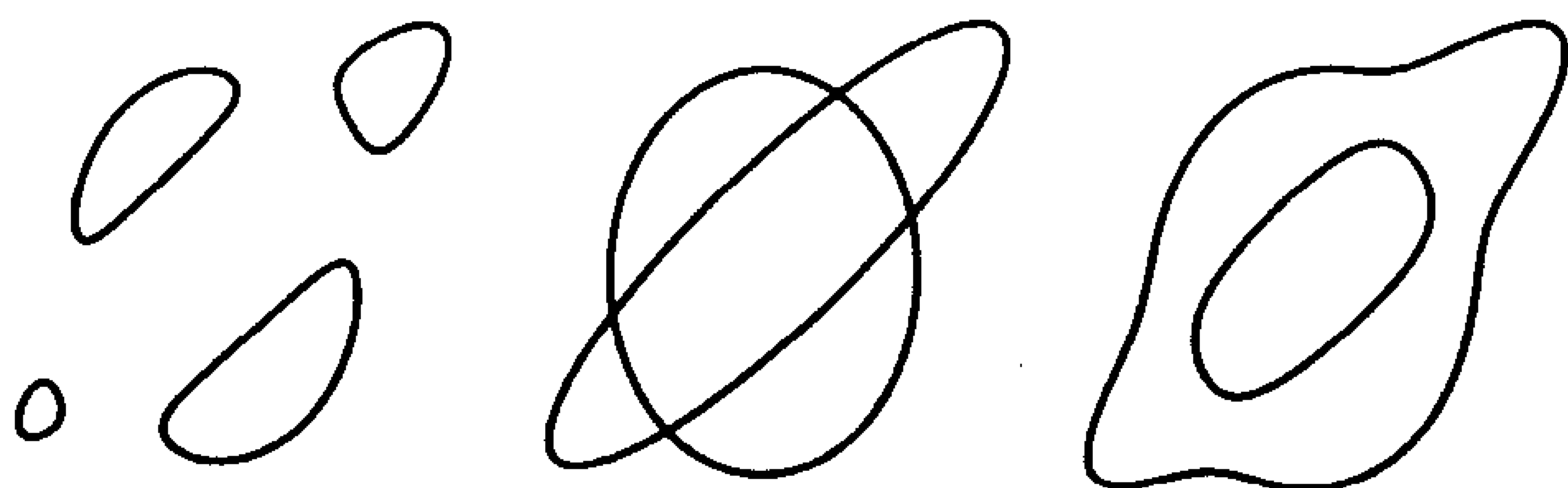
椭圆是用一个平面去截一圆锥的所得的截面. 把一个球放入圆锥使它与截面相切,在截面与圆锥的顶点之间,再放一个球与该截面相切但在截面的另一侧.



里格(Liège)大学的力学教授旦德林(Dandelin)证明了这两个球与椭圆所在的平面相切于椭圆的焦点,椭圆的两条准线是截面与另两个平面的交线,这两个平面是两个球与圆锥相切所得的两个圆分别所在的平面.

degenerate quartics　退化的四次曲线

任何两条圆锥曲线的并可看作一条四次曲线. 一条三次曲线和一条直线也可看作一条四次曲线.



取两个椭圆，它们的方程分别为 $E_1=0$ 和 $E_2=0$，可得到方程 $E_1E_2=0$，这就是四次曲线的方程. 如果此时将四次方程的各项系数稍作变化，那么所得的结果将是一条十分接近这两个椭圆的四次曲线. 这样的四次曲线只有两种可能性：或者是四个豌豆般的圈，或者是一条只是两部分分开的曲线. 至于究竟是哪一种情况这由系数的变化而定.

每一条四次曲线都有 28 条双切线，但是其中大部分是虚的. 如果系数选取得适当，那么四个豌豆般的圈中的每一个都有一条双切线. 四个圈中的每一对（共 6 对）都有 4 条双切线，所以所有 28 条双切线都是实的.

Delian problem of duplicating the cube　德洛人的倍立方问题

当公元前 430 年雅典人遭受一场瘟疫时，他们向德洛城的太阳神祈祷，根据神的旨意，他们应将的正方体的祭台扩大一倍. 于是他们立即把的每一条棱都扩大一倍，结果瘟疫更为严重.

作一条长度是原长度的 $\sqrt[3]{2}$ 倍的线段的问题就成为有名的德洛人的倍立方问题. 虽然同样古老，关于祭台大小的类似的问题在印度也有人研究过.

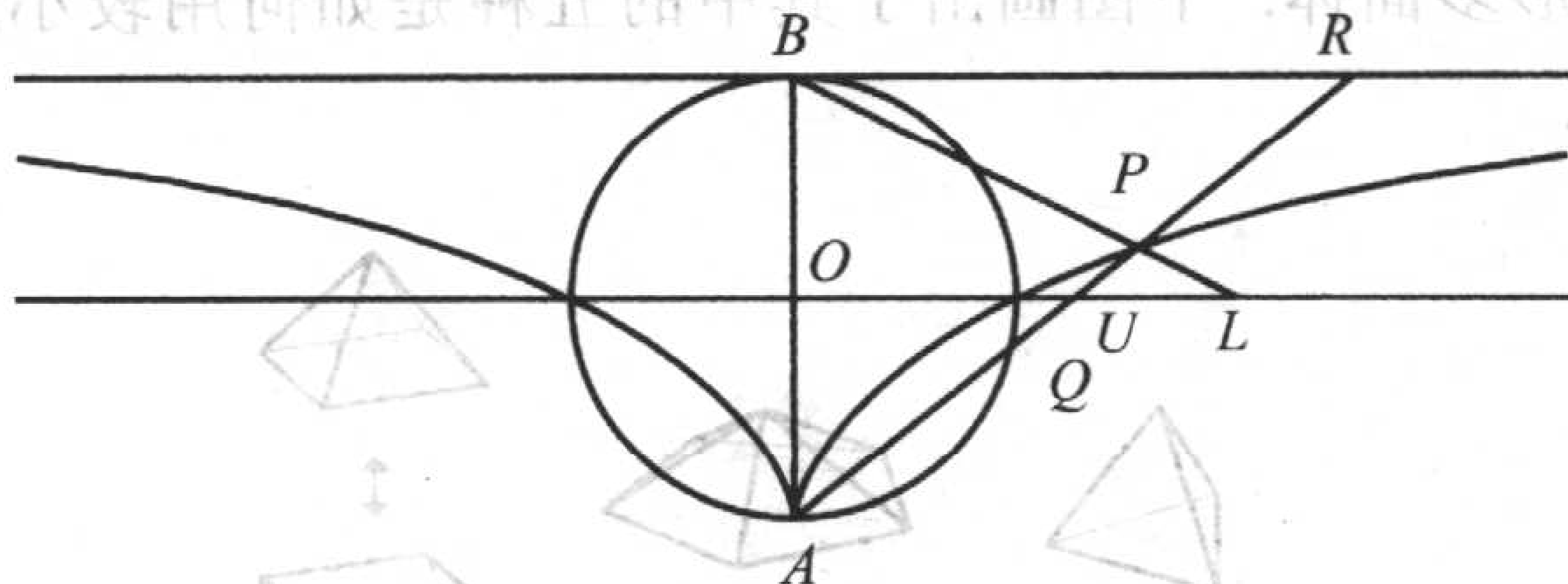
人们很快就意识到这一问题等价与寻求两条线段的两个比例中项. 换言之，给定 a 和 b，如果能够求出满足 $\frac{x}{a}=\frac{y}{x}=\frac{b}{y}$ 的两个比例中项 x 和 y，那么就有 $\left(\frac{x}{a}\right)^3=\frac{b}{a}$.

遗憾的是，希腊人不能只用直尺和圆规作出解答. 他们的许

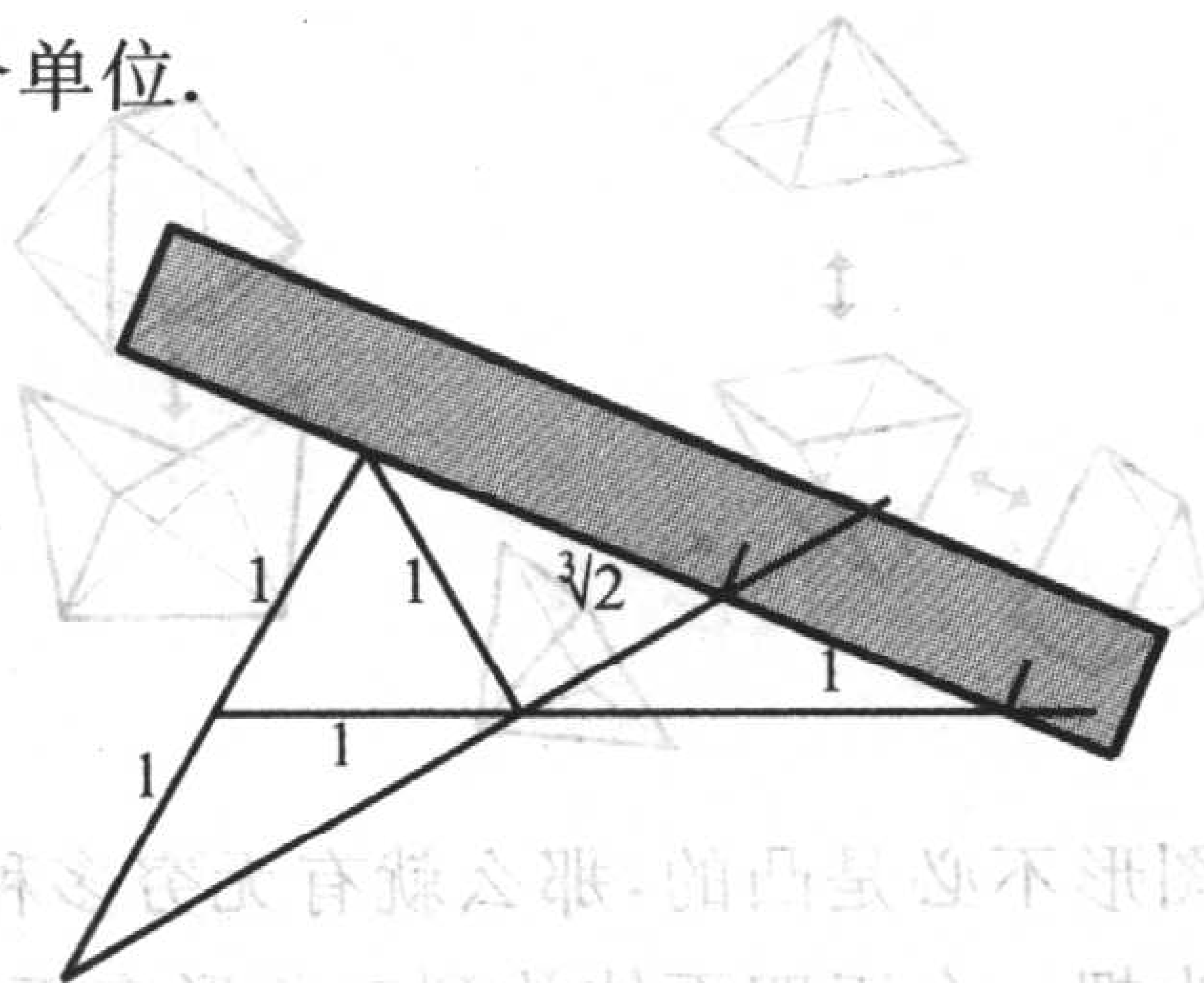
多解或者是只依赖于人们的判断能力进行的运算得到，或者是为此目的而发明的一些曲线得到(这些曲线本身是不能用直尺和圆规作出的)，这种曲线之一就是尼可米德蚌线(conchoid of Nicomedes)；另一种是笛奥克尔斯歧点蔓叶线(cissoid of Diocles).

一般地说，对于任意两条曲线和一个给定的点可以作出一条蔓叶线. 笛奥克尔斯歧点蔓叶线就是(圆心为 O)的圆以及与该圆相切(于点 B)的直线关于与切点相对的点 A 的蔓叶线.

过 A 画一直线交圆于 Q 点，与过点 B 的直线交于 R，并在这条新直线上取一点 P，使 $AP=QR$. 这样，该蔓叶线就是点 P 的轨迹. 如果圆的半径是 1，那么 $OU^3=OL$.



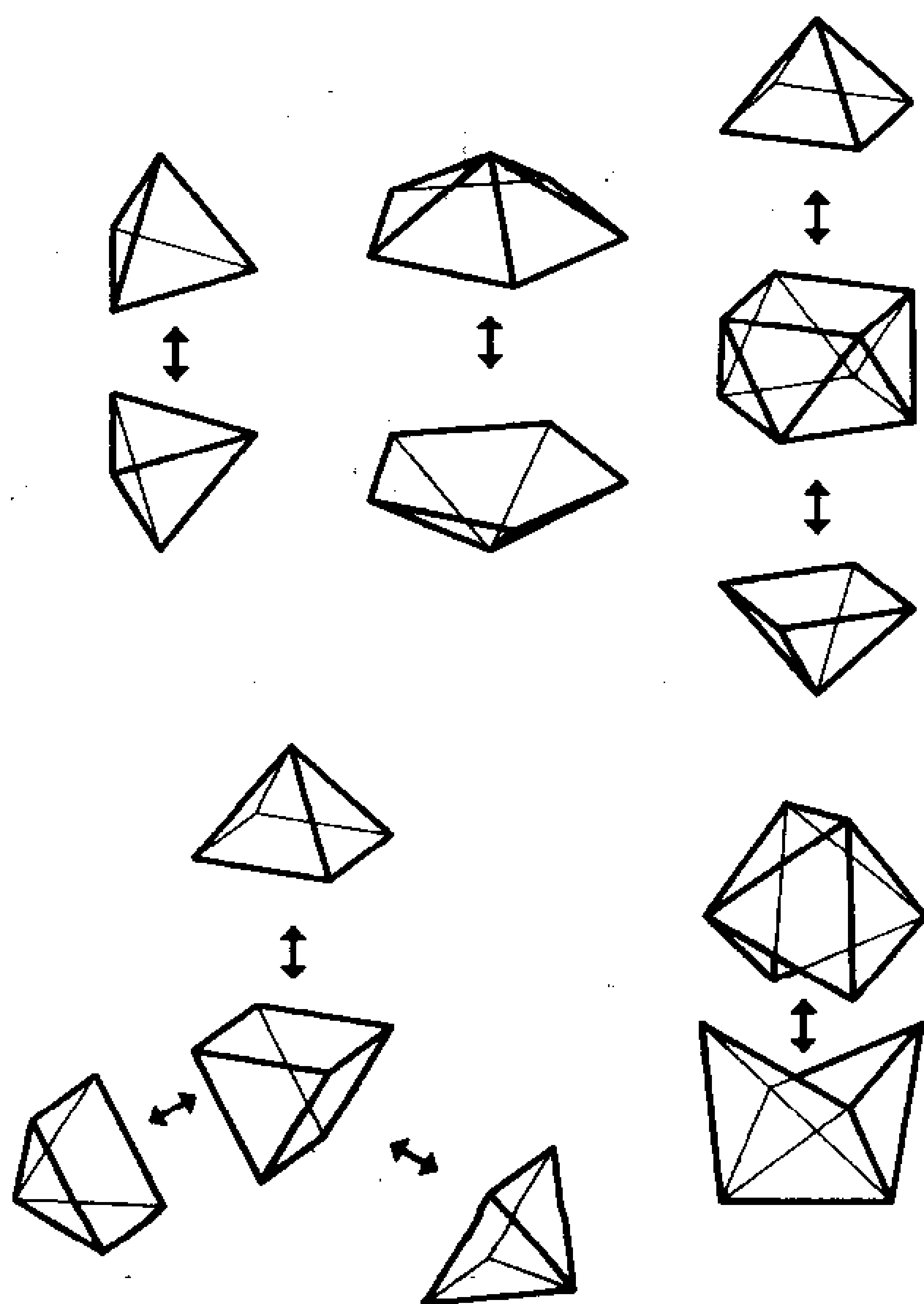
只用标有相距 1 个单位的两点的直尺，就可求出德洛人的倍立方问题的一个简单的解. 单位长度已经标出. 用手调节直尺，使它经过等边三角形的一个上顶点，再使它与右面两条直线相交所得的交点之间的距离是 1. 上顶点到较近的一个交点的距离就是 $\sqrt[3]{2}$ 个单位.



参考书：E. H. LOCKWOOD，*A Book of Curves*，Cambridge，University Press，Cambridge，1961；H. DORRI，*One Hundred Great Problems of Elementary Mathematics*，Dover，New York，1963.

deltahedra　三角形多面体

马迪·肯地(Martyn Cundy)创造了一个名词：三角形多面体(deltahedra)，它被定义为所有的面都是等边三角形的多面体. 柏拉图体(正多面体)中有三种是三角形多面体：正四面体，正十二面体和正二十面体. 恰存在八种柏拉图所提到的凸的三角形多面体. 下图画出了其中的五种是如何用较小的部分拼成的.



如果立体图形不必是凸的，那么就有无穷多种可能性，这倒一点也不是因为把一个正四面体放到三角形多面体的任何一个

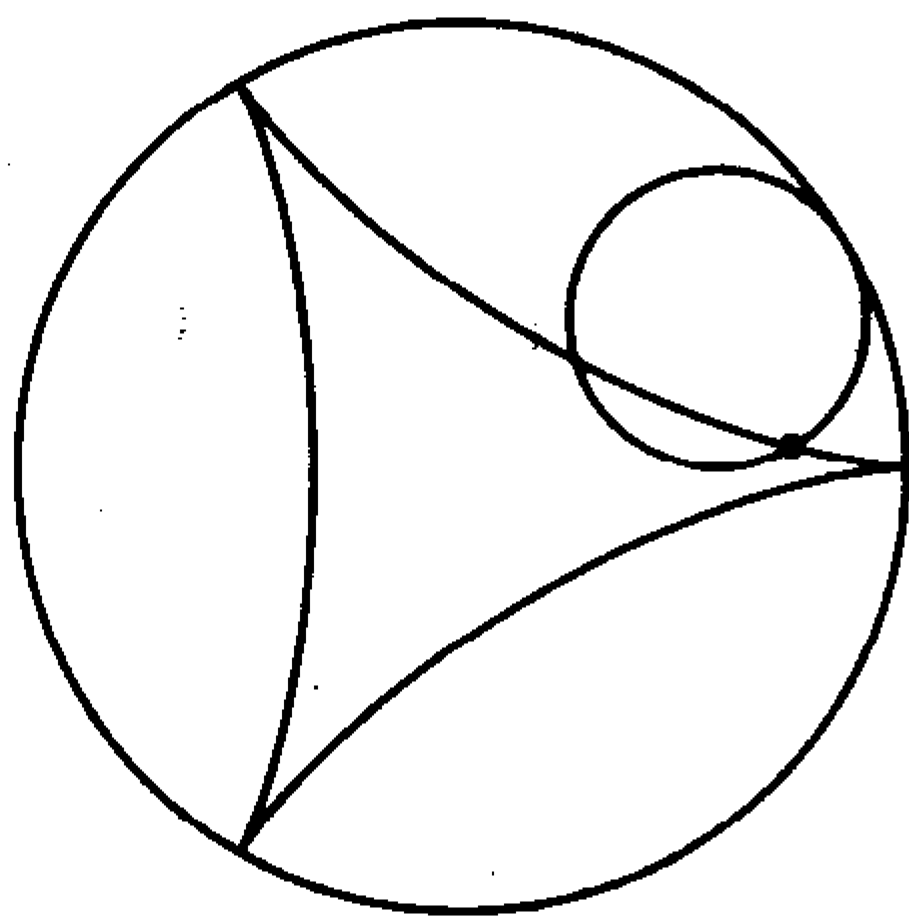
面上就可以得到一个新的三角形多面体(根据这一定义,它是允许自交的)的原因.

无限多个正八面体可以组成一个无限的三角形多面体.一个正八面体可以认为是一个三角形的反棱柱:两个等边三角形面对面,一个等边三角形的每一个顶点对另一个的每一条棱,其中的空缺用 2×3=6 个等边三角形填满.

任何两个边数相同的多边形都可作为一个反棱柱的相对的面,其中的无穷多个是一个仅由三角形组成的柱形曲面.

deltoid *or* hypocycloid of three cusps　三尖点内摆线

三尖点内摆线首先是欧拉在 1745 年研究的.一个圆在一个定圆内滚动.如果动圆的直径是定圆的直径的三分之一或三分之二,那么圆上一点就画出一条三尖点内摆线.



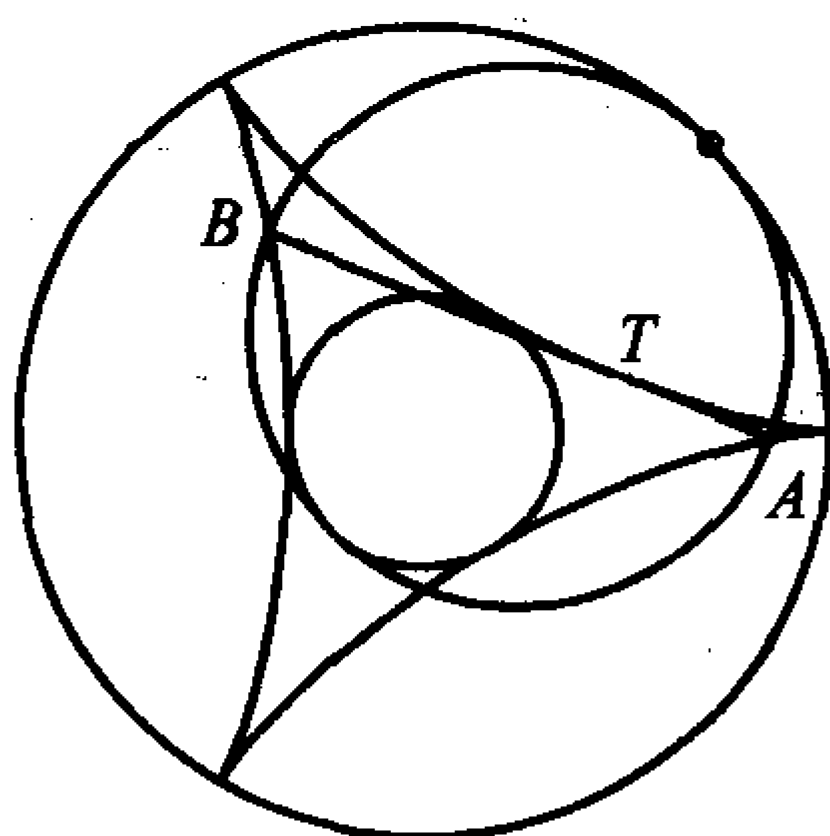
半径是三分之二的圆绕半径是 1 的圆滚动时,动圆的直径包络出一条三尖点内摆线.

下面是作包络的另一种作法.在圆上按顺时针方向取一些点,并编号,再从同一点出发,按逆时针方向一点隔一点取点,得到另一个集合.连接相应的点,就包络出一条三尖点内摆线.

第三种作法是任取一个三角形,画出它的所有的西姆松线,这些西姆松线的包络就是一条三尖点内摆线.

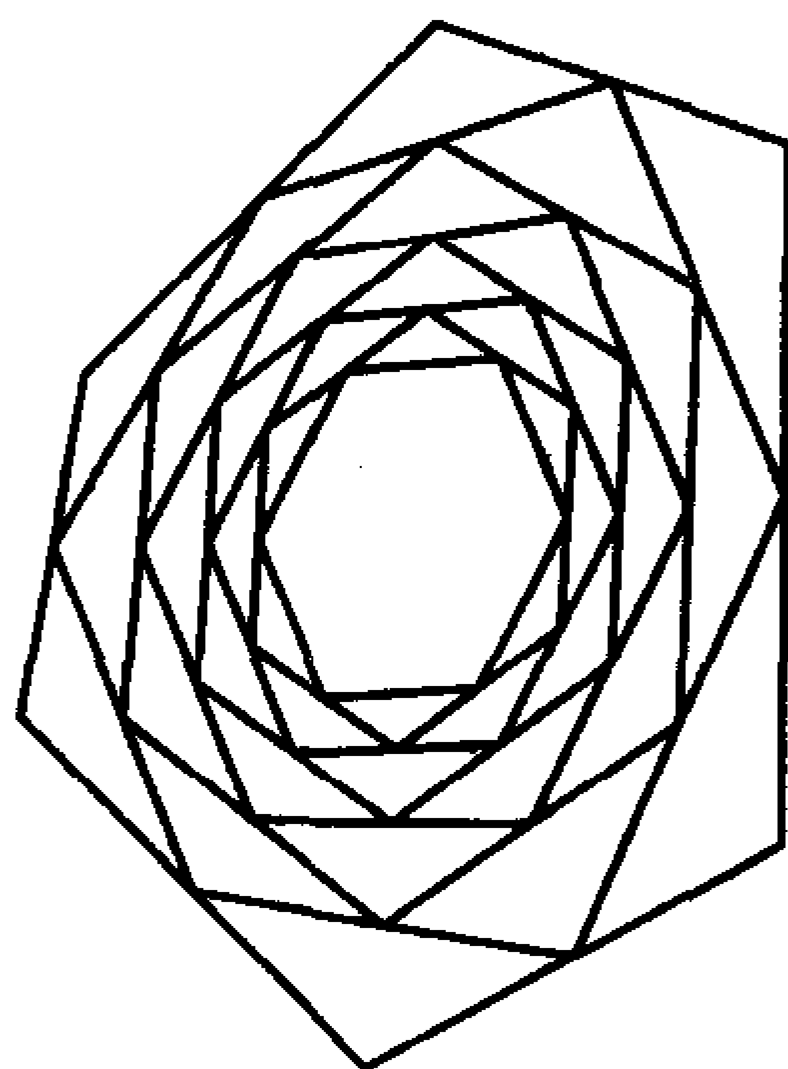
设在 T 点的切线交三尖点内摆线于 A 和 B. AB 的长是一

个常数，并且是其内切圆的直径的 2 倍，AB 的中点在内切圆上. A 和 B 处的切线互相垂直，并相交于内切圆上. 过该交点的直径的另一个端点就是 AB 的中点. T，A 和 B 三点处的法线相交于外圆上的一点，这一点就是与动圆的切点.



derived polygons　导出多边形

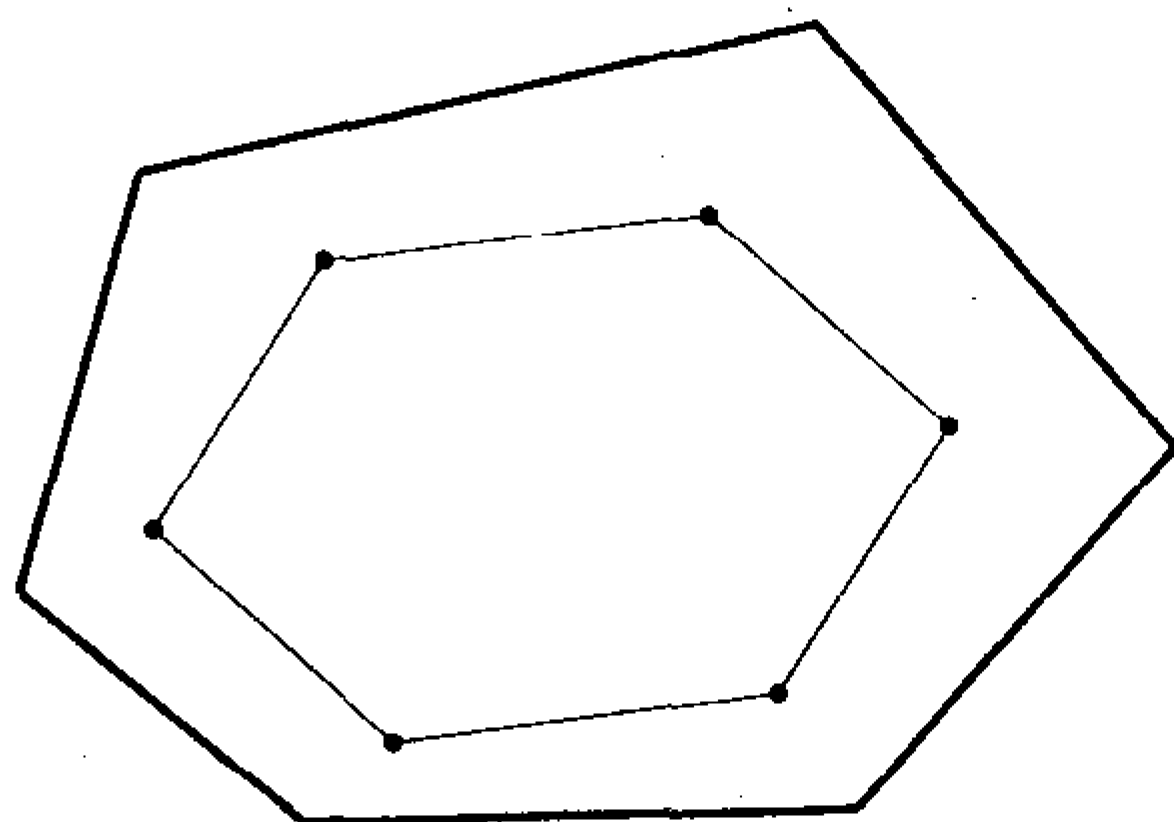
作一个偶数边多边形，依次连接各边的中点. 重复这一过程所得的形状趋近于一个对边平行，且长度相等的多边形. 原多边形和所有的导出多边形有一个公共的重心. 一个隔一个多边形大体上有相同的形状.



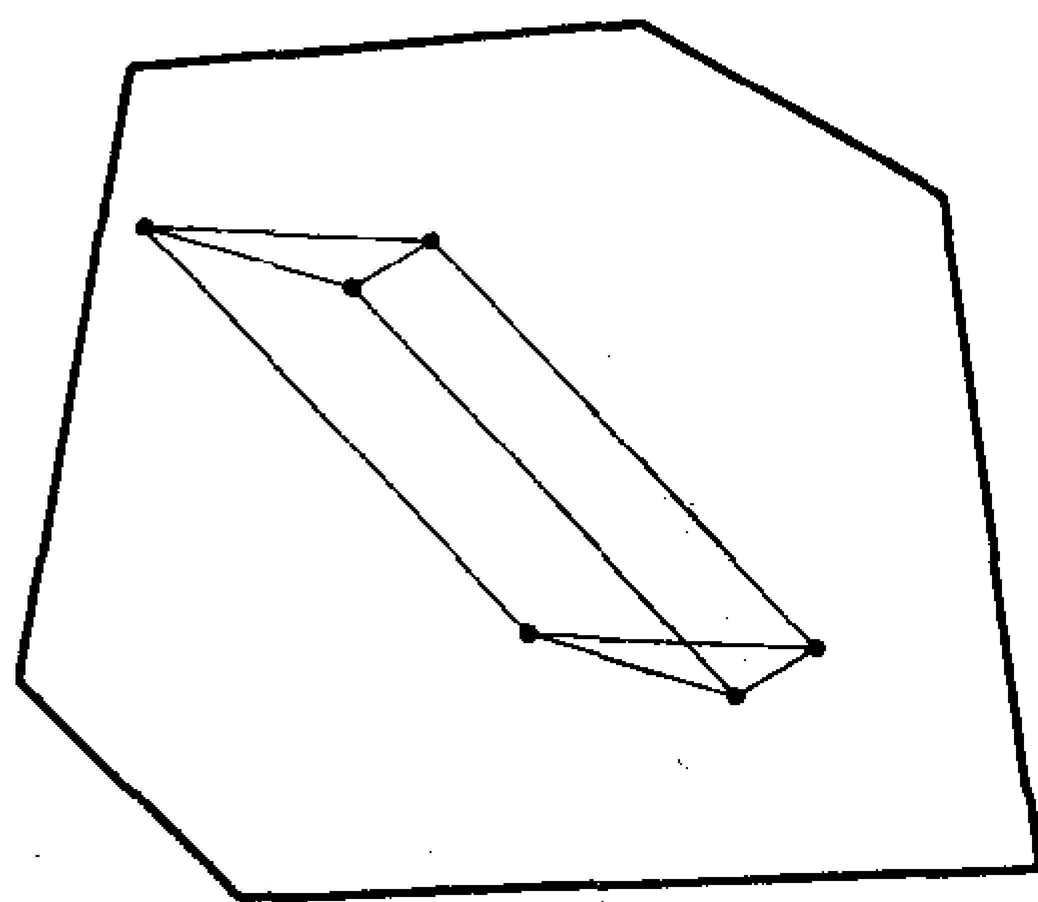
如果把各边都分成不是 1∶1的另一个比，那么仍会出现同样的现象，虽然导出多边形将不像一个隔一个那么简单.

如果原多边形不是平面的，而是异面的，那么这一过程仍将导致一个具有上述同样性质，且有同一个重心的平面多边形.

任取一个六边形，求出每连续三点的重心. 立即得到一个对边分别平行且相等的六边形.



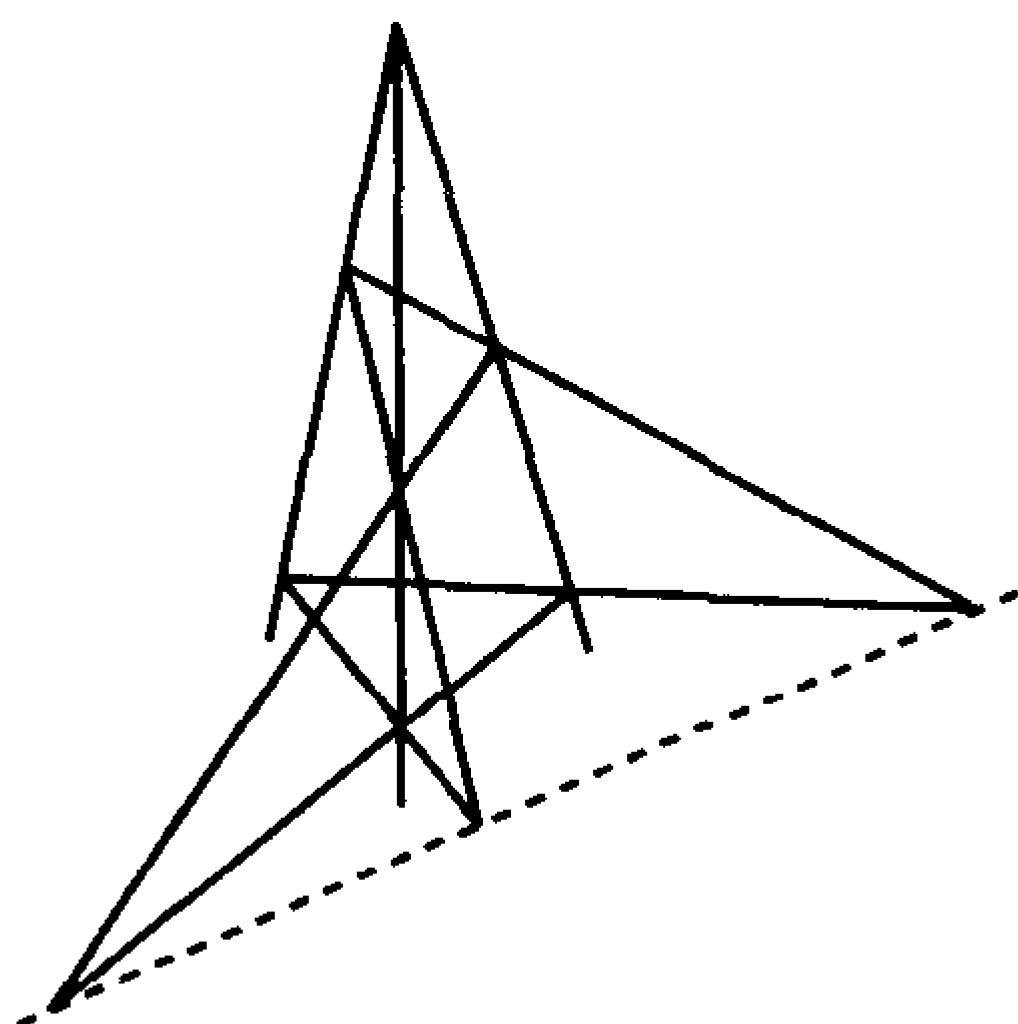
另一方面，如果取一个六边形的任意连续三个顶点，作第四个顶点，使这四点构成平行四边形，结果就形成一个棱柱.



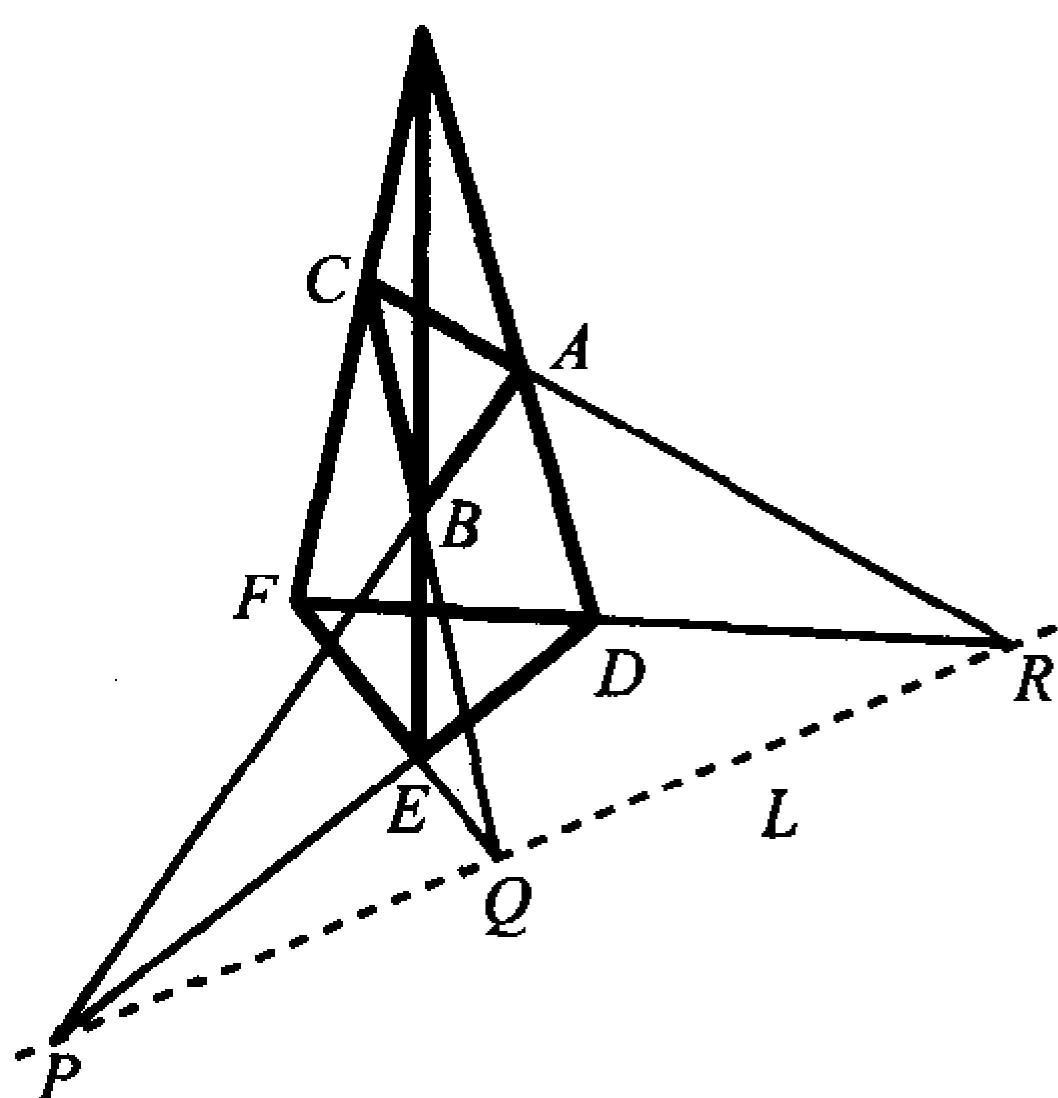
参考书：J. H. CADWELL，*Topic in Recreational Mathematics*，Cambridge University Press，Cambridge，1966.

Desargues's configuration　戴沙格构形

取两个成"透视"的三角形，即连接对应顶点的直线经过同一点. 此时每对对应的边相交于共线的三点.



可以认为戴沙格定理(就这样称呼)在本质上是用三维图形进行证明的. 平面 ABC 和 DEF 相交于直线 L. 平面 ABC 和 $ABED$ 已相交于直线 AB,平面 DEF 和 $ABED$ 已相交于直线 DE,于是所有这三条直线都相交于这三个平面的公共点 P,它位于直线 L 上. 类似地,AC 和 DF 相交于 L 上的 R,CB 和 FE 相交于 L 上的 Q. 当这个三维图形投影到平面上时,L 仍是一条直线.



上图并不对称. 因为虚线在解释中起着特殊的作用. 但是这只是一种示意图. 事实上,上图中的任何一点都可以作为特殊的顶点(相应于 X),图中将恰有三个标出的交点,它们不在任何一

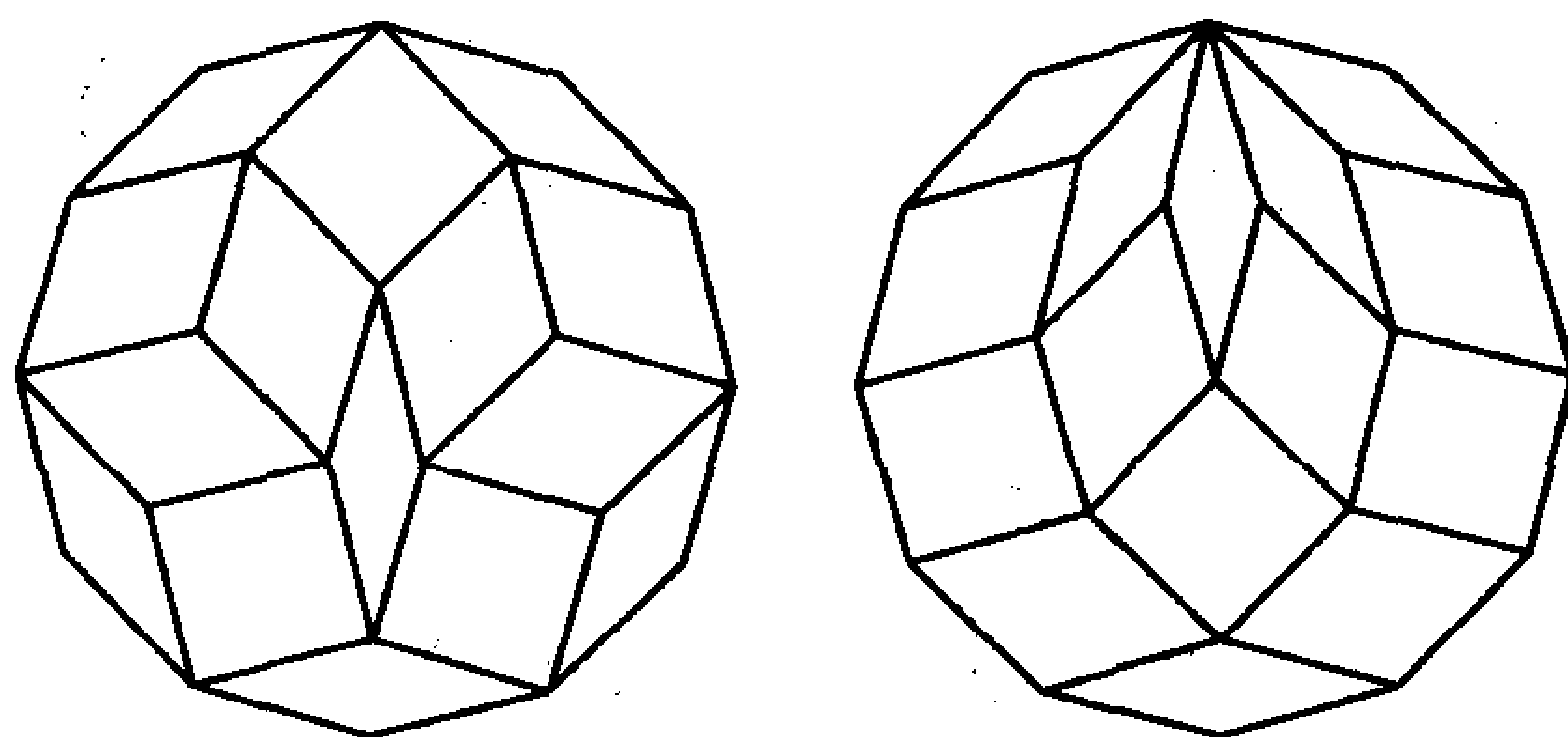
条经过这一点的直线上：这三个交点本身将位于图中相应于 PQR 的直线上.

戴沙格定理的逆定理也正确：如果两个三角形的对应边相交于同一直线上，那么连接一对对应顶点的直线经过同一点.

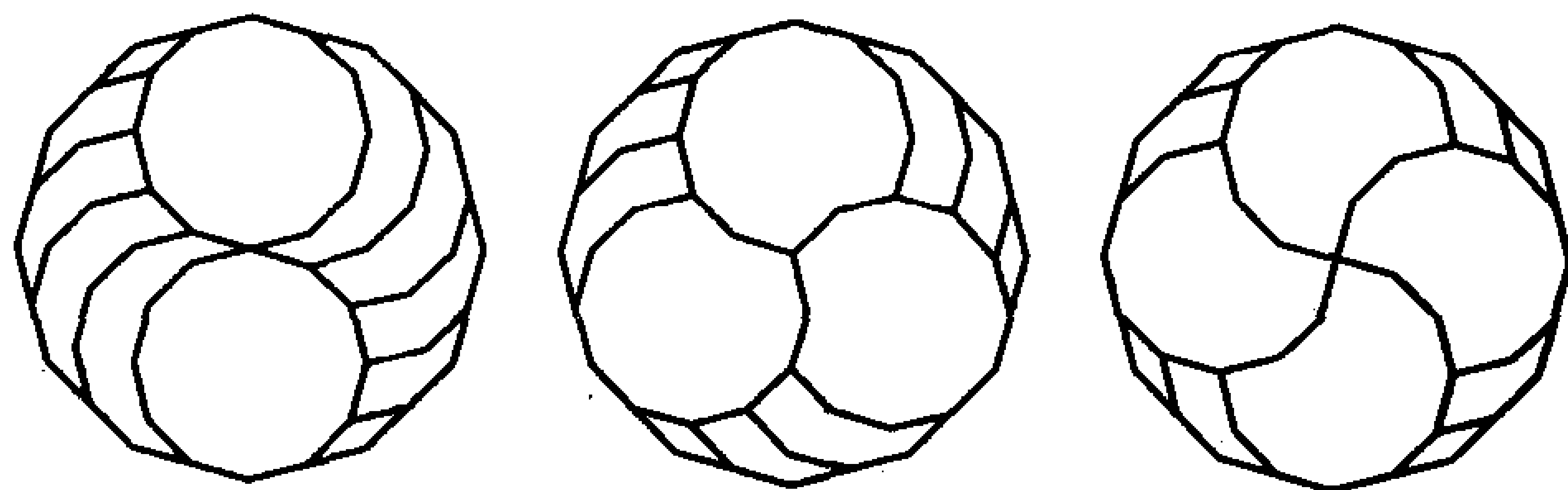
除此以外，逆定理与原定理是对偶的. 换言之，它可以把原定理中的"点"和"线"对换，"经过两点的直线"和"两直线相交"对换得到.

dodecagon dissected　分割十二边形

有两种简单而又自然的方法把正十二边形分割成若干个菱形.

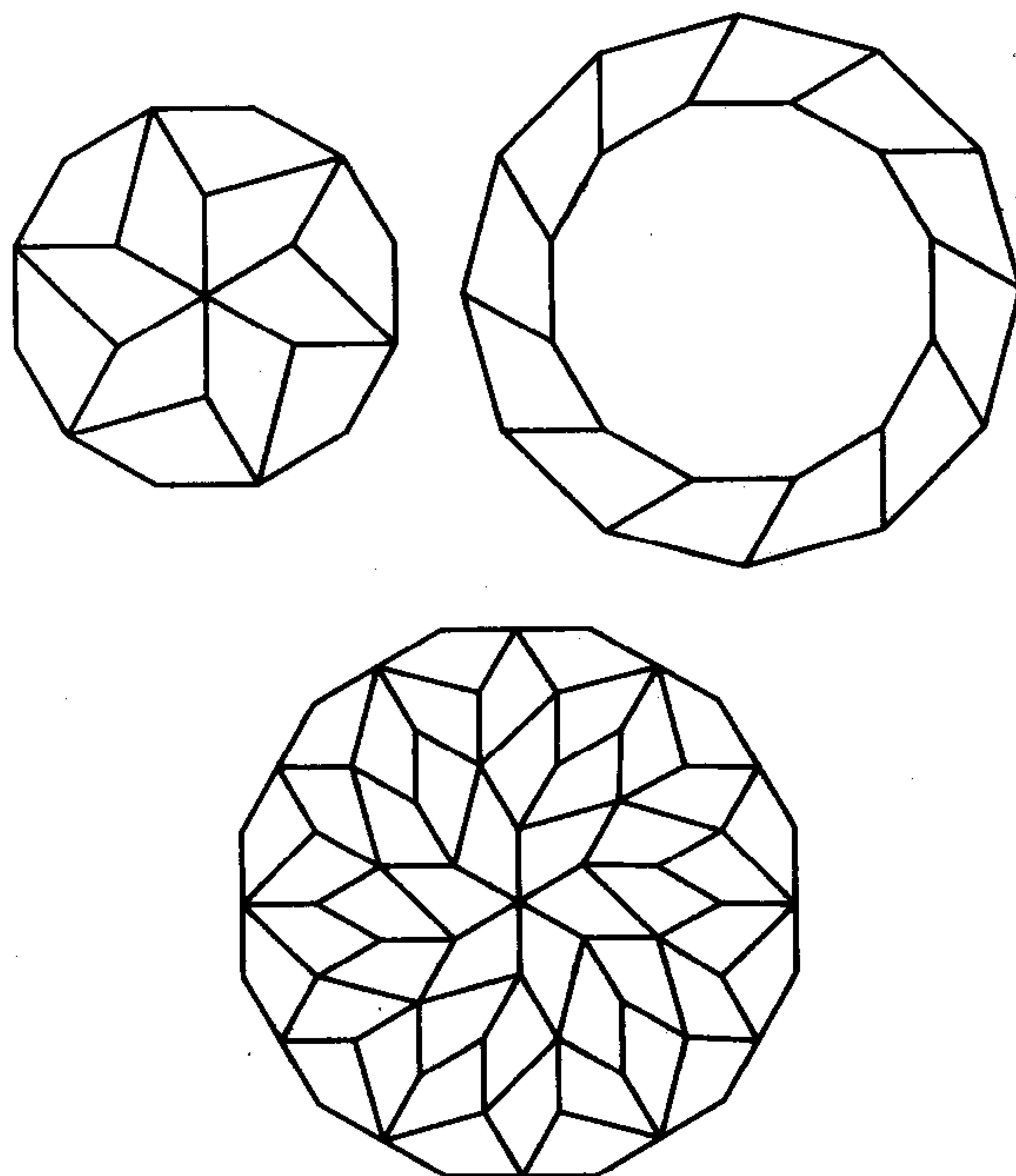


上图中的每一个都有三种不同形状的菱形，虽然有好几种方法把这个多边形分割成这些基本的形状，但每一种形状的性质总是相同的：有 6 个狭长的和 6 个中等的菱形以及 3 个正方形.



这些形状可以用来构成同样形状较大的复制品. 在上面的每一个图形中，四个正十二边形被分割后拼成一个大的十二边形. 许多菱形彼此相连，形成一个一个"带"状区域.

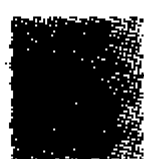
下面的分割使用一片片同样的形状，它是由一个等边三角形放到半个正方形旁构成的. 右边的十二边形的边长是原来的$\sqrt{2}$倍，也是它的面积的两倍；较大的正十二边形的边长是原来的边长的 2 倍，面积是 4 倍. 用同样的图形可将右边的十二边形扩大，铺砌到整个平面.

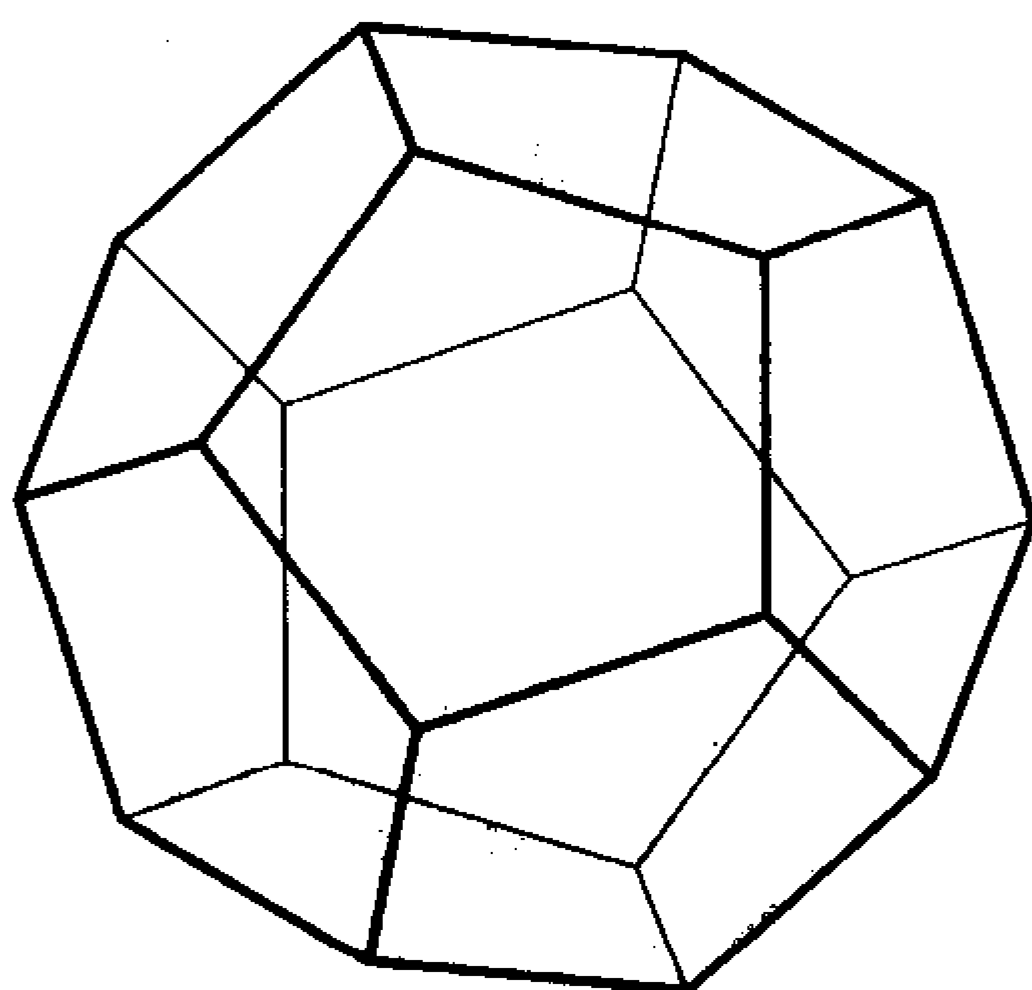


dodecahedron　十二面体

十二面体有十二个面，因此也包括各个面都是正五边形的正十二面体和十二个面都是菱形的菱形十二面体.

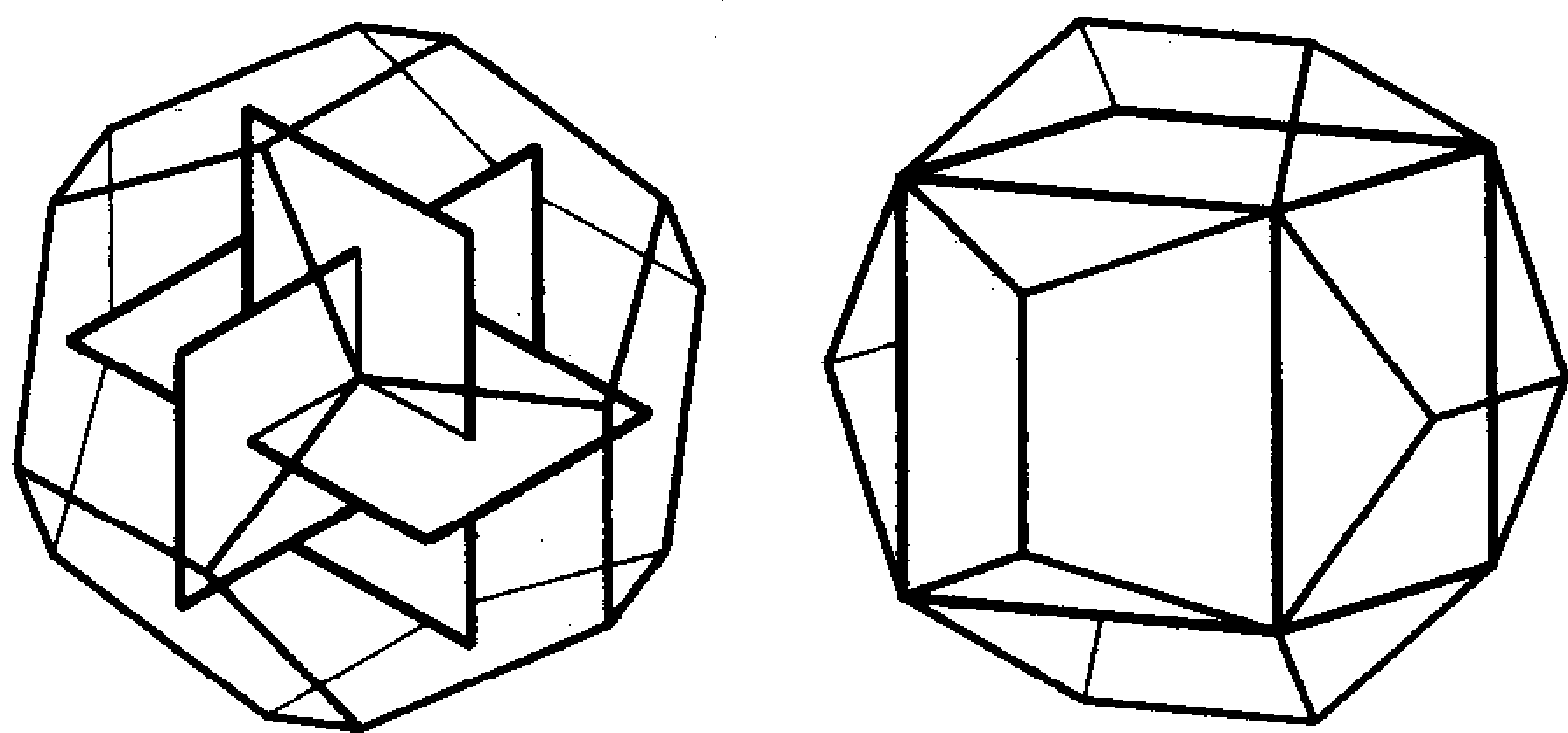
正十二面体有 31 条对称轴：10 条是经过一对相对顶点的三重对称轴；6 条经过相对两面的中心的五重对称轴；15 条是经过对边中点的二重对称轴.





正二十面体有同样多条对称轴，但在描述时要把“顶点”和“面”对换.

十二面体和正方体的关系可以用连接各个面的中点形成三个互相垂直的矩形的顶点（它的棱被黄金分割）看出，也可在十二面体的顶点中选择作为正方体的八个顶点看出.

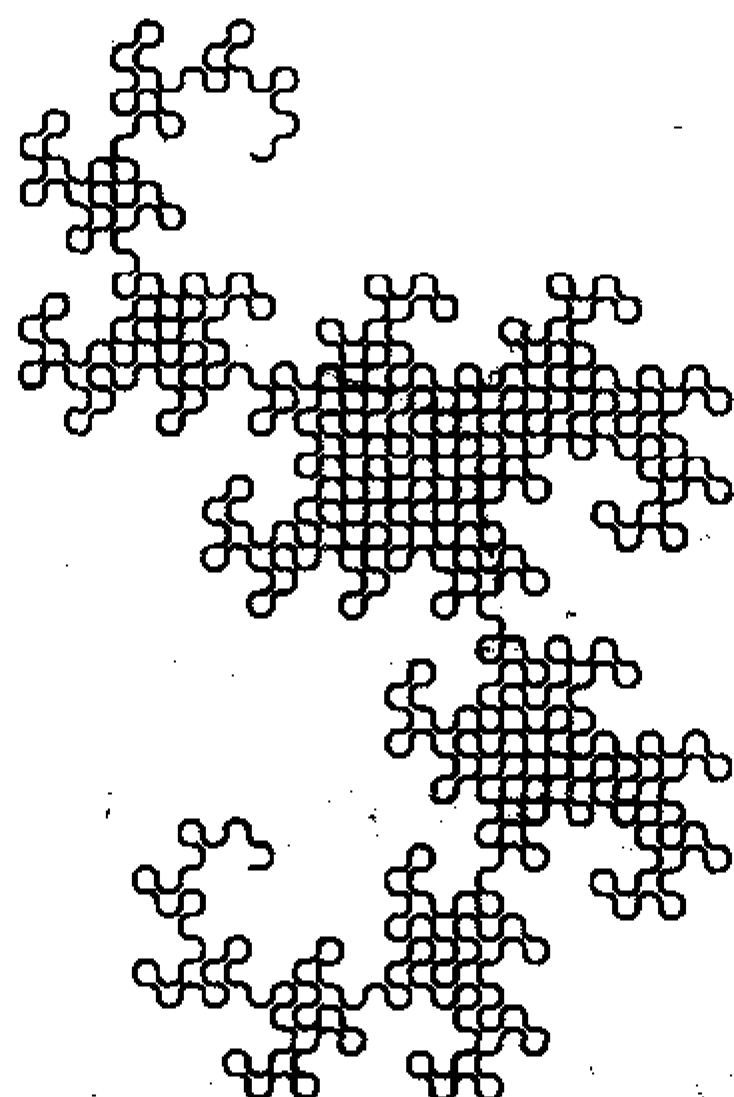


以下事实也许会使人感到惊奇：当正十二面体和正二十面体内接于同一个球时，十二面体占球的体积的部分较大. 虽然二十面体的面较多，但是十二面体的面更接近球形.

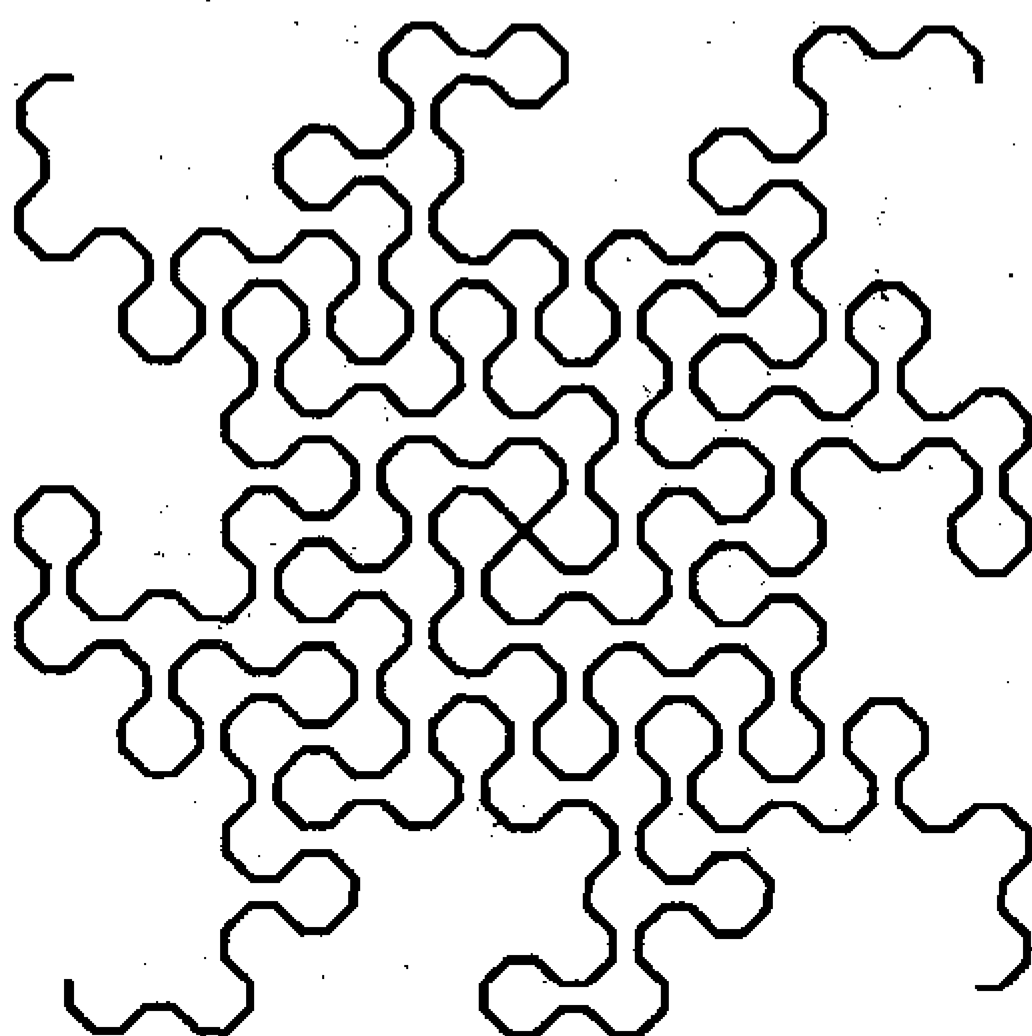
dragon curve　龙状曲线

把一张长纸条对折，使右面一半叠在左面一半的上面，打开后折成直角. 从棱上看去，就形成了第一级龙状曲线. 现在把纸条合上，再折一半，与第一次同样方向再折一半，再打开，使每一

条折痕成直角，重复这一过程．再从棱上看，结果就是二阶和三阶龙状曲线．下图就是十阶龙状曲线：



四条龙状曲线固定在一个点的周围，如下图中四条六级的龙状曲线所示．在各种情况下，对角的大小稍作调整使各曲线都不相交，所以看上去是单个的曲线．



dual polyhedra　对偶多面体

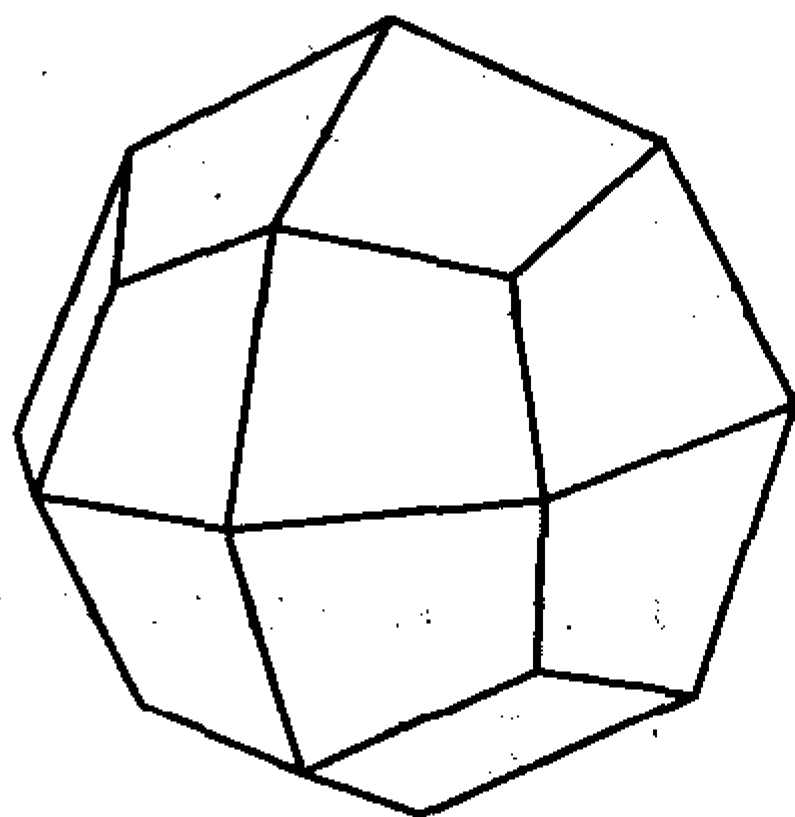
连接任何柏拉图多面体的相邻两面的面的中心就形成对偶多面体．所形成的*对偶*多面体的每一个顶点都对应于原多面体的面，新的多面体的每一个面都对应于原多面体的一个顶点，棱

和棱一对一.

如上所说，每一个柏拉图多面体的对偶多面体也是柏拉图多面体. 正四面体自身对偶，正方体和正八面体互为对偶，正十二面体和正二十面体互为对偶.

同一个简单过程对于半正多面体即阿基米德多面体就不适用了，因为一个顶点周围的面的中心并不在一个平面内. 必须改为作该半正多面体的外接球，并过每一个顶点作切面.

半正多面体所生成的对偶多面体本身并不是半正多面体. 但是它们的面都全等，并且每一个顶点都是正规的，尽管不是所有的面必须相同.



上图表示的是各个面都是不等边四边形的二十四面体(trapezoid icositetrahedron)，它是小菱形立方正八面体(small rhombicuboctahedron)的对偶多面体. 菱形十二面体(rhombic dodecahedron)是立方八面体(cuboctahedron)的对偶多面体. 菱形三十面体(rhombic tricontahedron)是一个带状多面体(zono-herdon)，它是二十-十二面体(icosidodecarahedron)的对偶多面体，是唯一的各个面都是菱形的阿几米德多面体的对偶多面体.

duals of the semiregular tessellations　半正规镶嵌的对偶

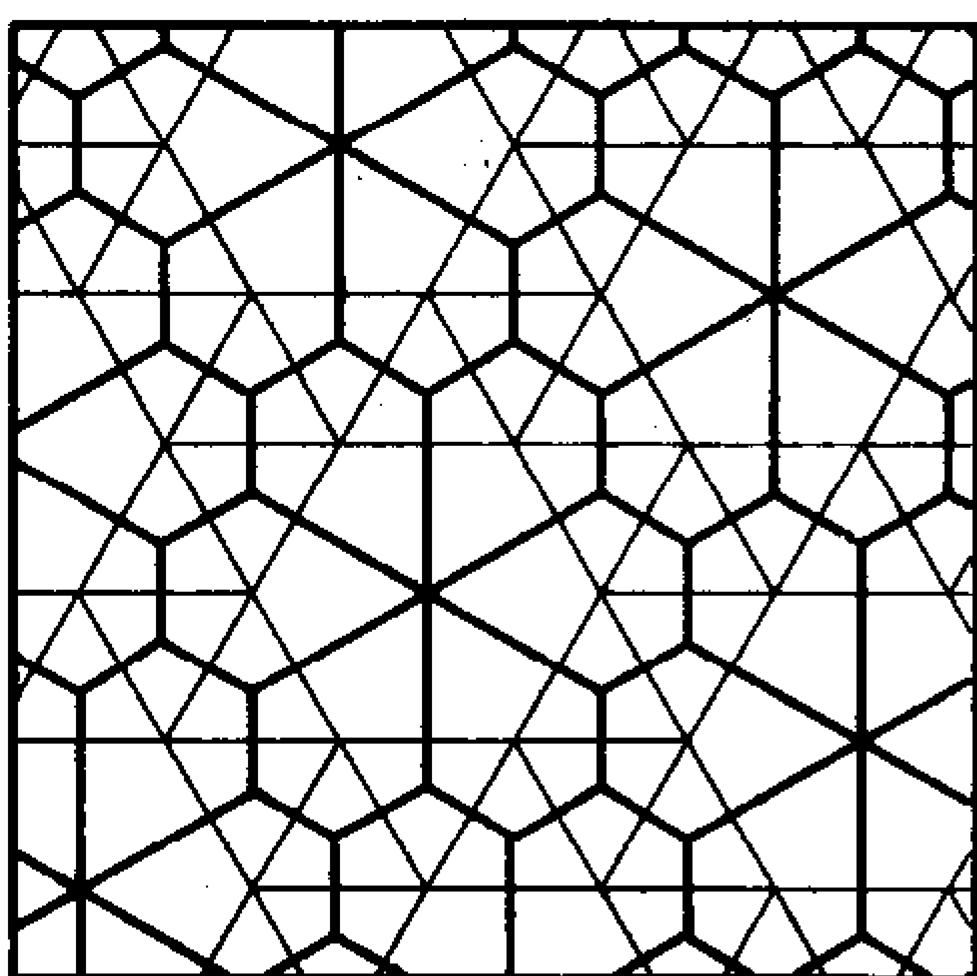
每一种正多边形镶嵌都有一种对偶镶嵌，只要把每一块正多边形的中心作为对偶镶嵌的顶点，并连接相邻两个顶点就可得到.

对三种正多边形的镶嵌而言，正六边形镶嵌和正三角形镶

嵌互为对偶镶嵌，正方形的对偶镶嵌是本身.

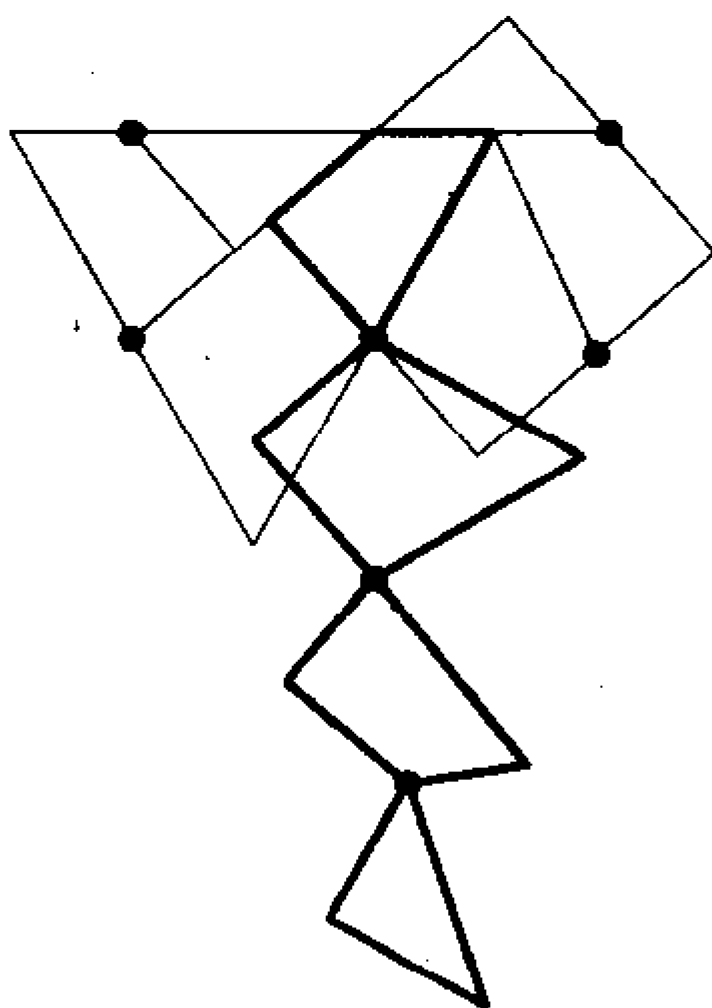
每一种半正多边形镶嵌都有对偶镶嵌，但不很正规. 于是，正方形和正三角形的镶嵌的对偶镶嵌就是开罗镶嵌.

下图中的粗线表示正六边形成和等边三角形的镶嵌的一个对偶镶嵌.



Dudeney's hinged square-into-equilateral-triangle　杜德尼的变为等边三角形的铰链正方形

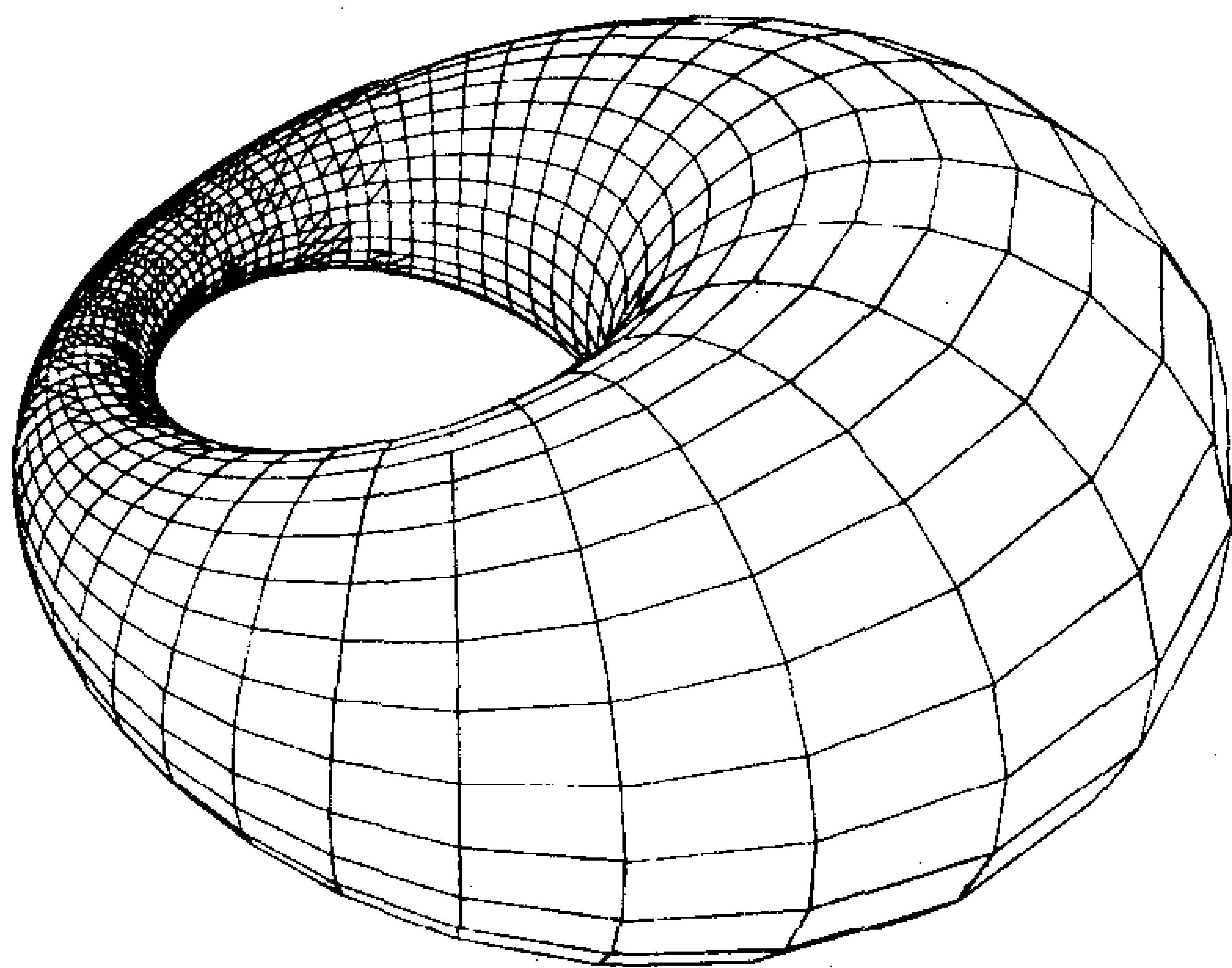
杜德尼(Henry Erdeney Dudeneys)在他的许多数学难题中开创了分割. 这是他的杰作. 用铰链连接的一片片多边形绕一个方向旋转就得到正方形，绕另一个方向旋转就得到等边三角形. 其中两个铰链平分三角形的两边，第三个铰链和两个三角形的



公共顶点把第三边分成的比大约是 0.982:2:1.018.

Dupin cyclide 杜平式轮胎

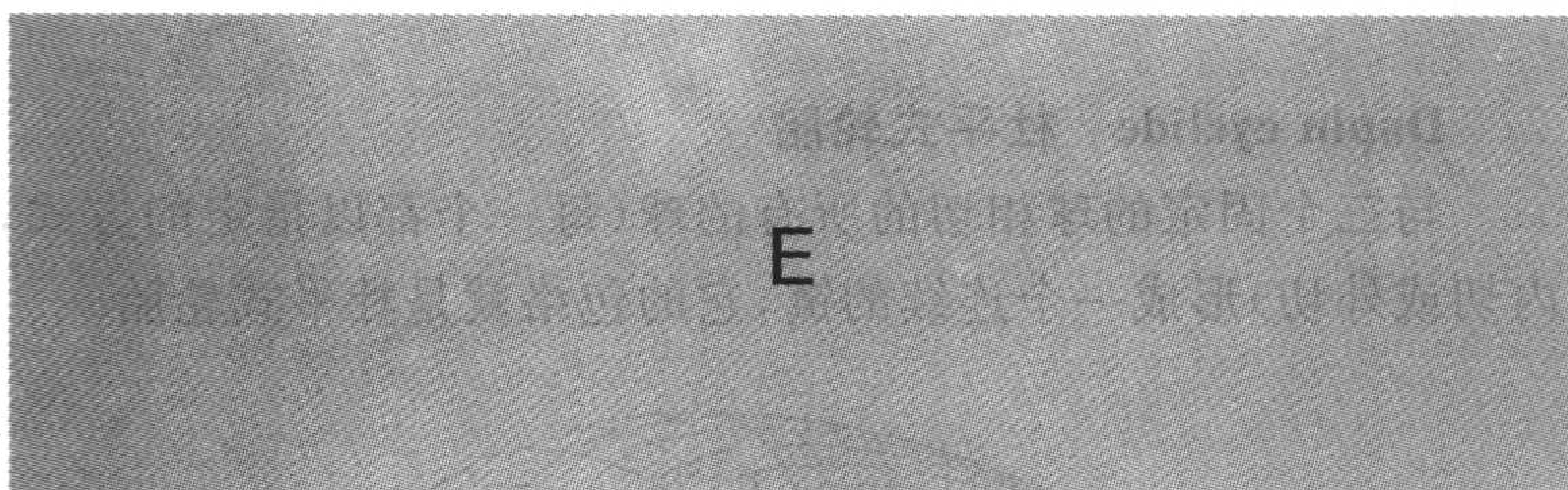
与三个固定的球相切的所有的球(每一个都以指定的方式,内切或外切)形成一个连续的链,它的包络就是杜平式轮胎.



由于所有相切的球的球心都在一个圆锥曲线上,所以杜平式轮胎的另一种定义是中心在一条圆锥曲线上,并且与一给定的球相切的所有的球的包络.

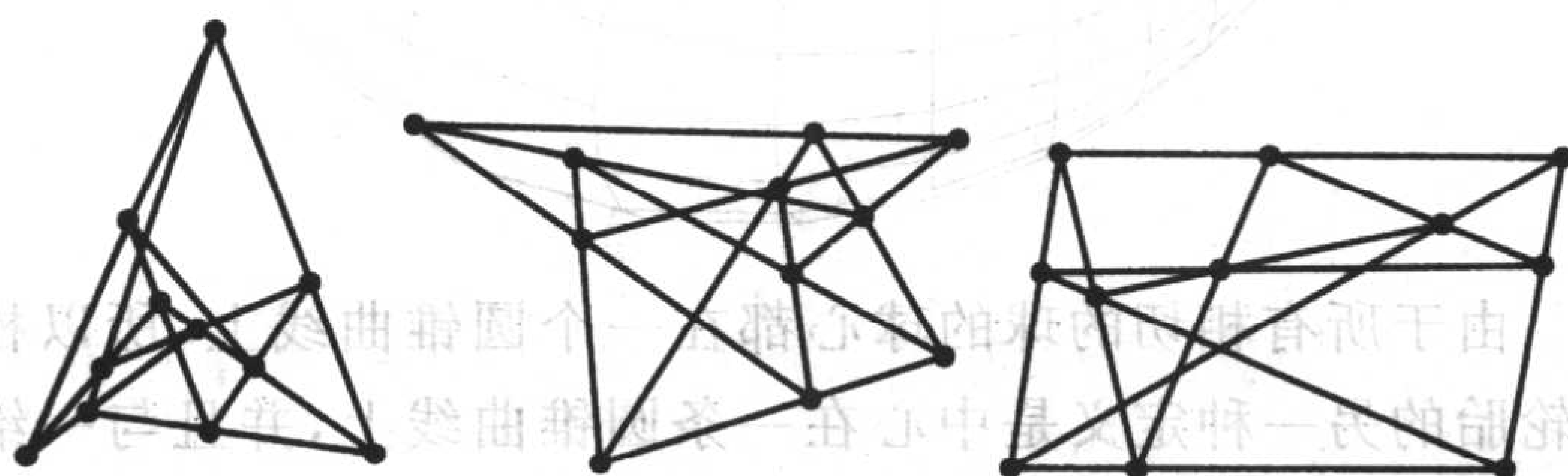
第三种定义是作为球心在已知球上,并且与已知球正交的球的包络.

圆环面是杜平式轮胎的特殊情况,令人惊讶的是每一个杜平式轮胎是一个圆环面的反演.



eleven-three configurations　十一-三构形

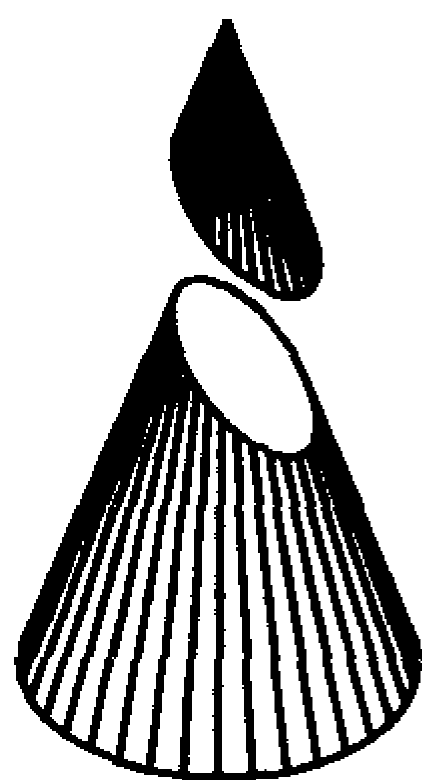
本质上不同的 11_3 构形有 31 种. 每一种都有 11 条直线和 11 个点，经过每一个点的直线有三条，每一条直线上的点有三个. 下图就是其中之三.



参考书：W. PAGE and H. L. DORWART，Numerical patterns and geometrical configurations，*Mathematics Magazine*，March，1984.

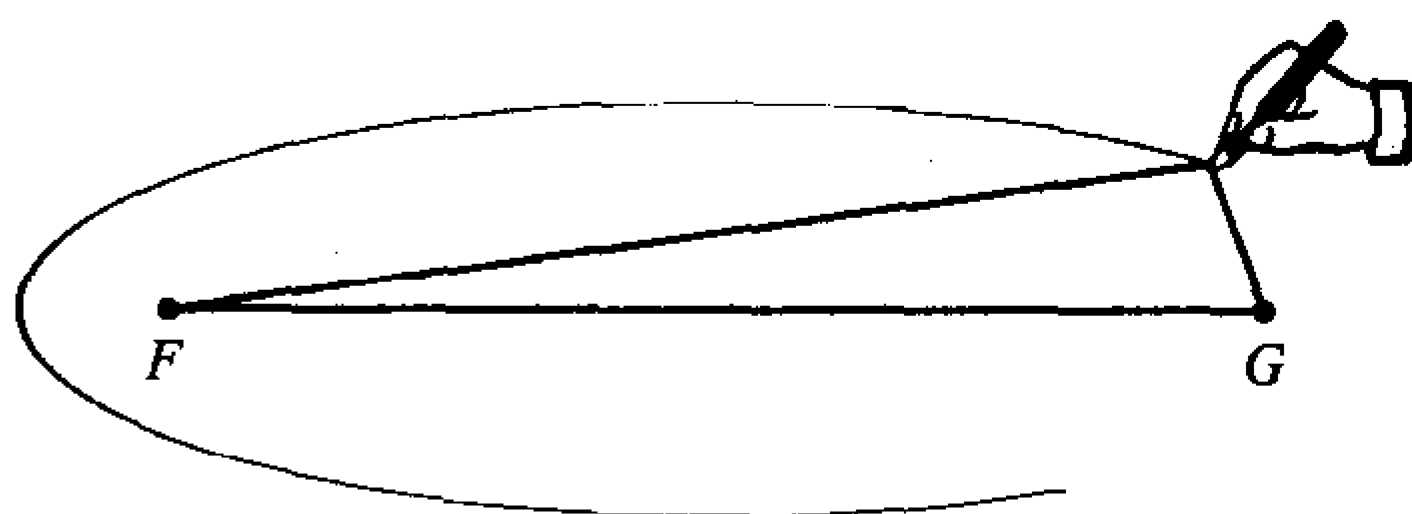
ellipse　椭圆

椭圆是圆锥的截面. 如果将圆锥在其顶点的两侧都延伸后得到的另一部分也看作为同一圆锥，那么椭圆所在的平面只截得这个圆锥的一半. 截得抛物线的平面平行于圆锥表面上过顶点的直线，截得双曲线的平面与圆锥的两个一半都截到.



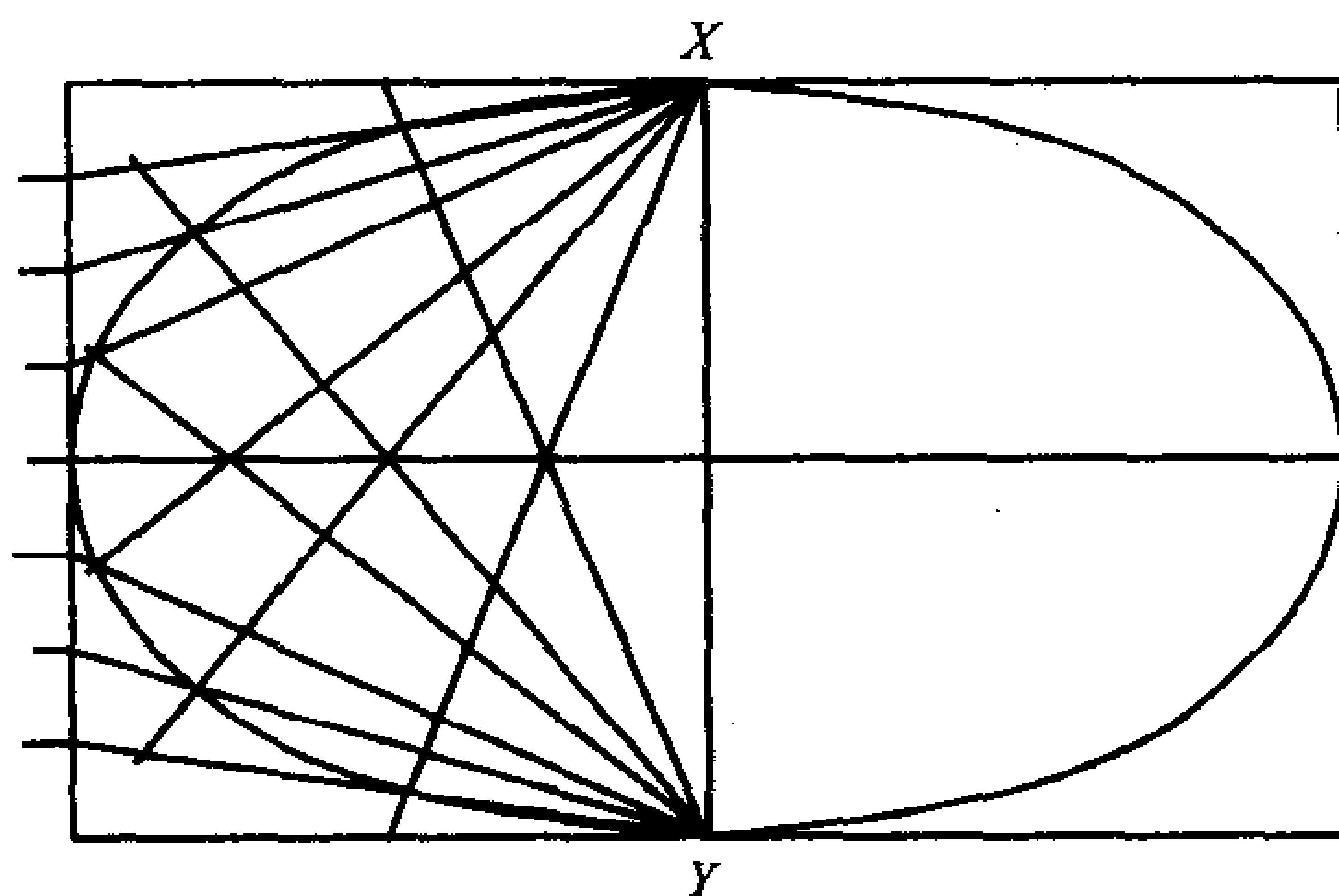
将一条环状的细线套住两根针 F 和 G，用一支铅笔就可以画出椭圆. 把细线拉紧，铅笔运动的轨迹就是一个椭圆，F 和 G 就是该椭圆的焦点.

椭圆也有两条准线，每个焦点一条. 椭圆可定义为到定点(即焦点)与到定直线(即准线)的距离的比是小于 1 的常数的动点的轨迹.



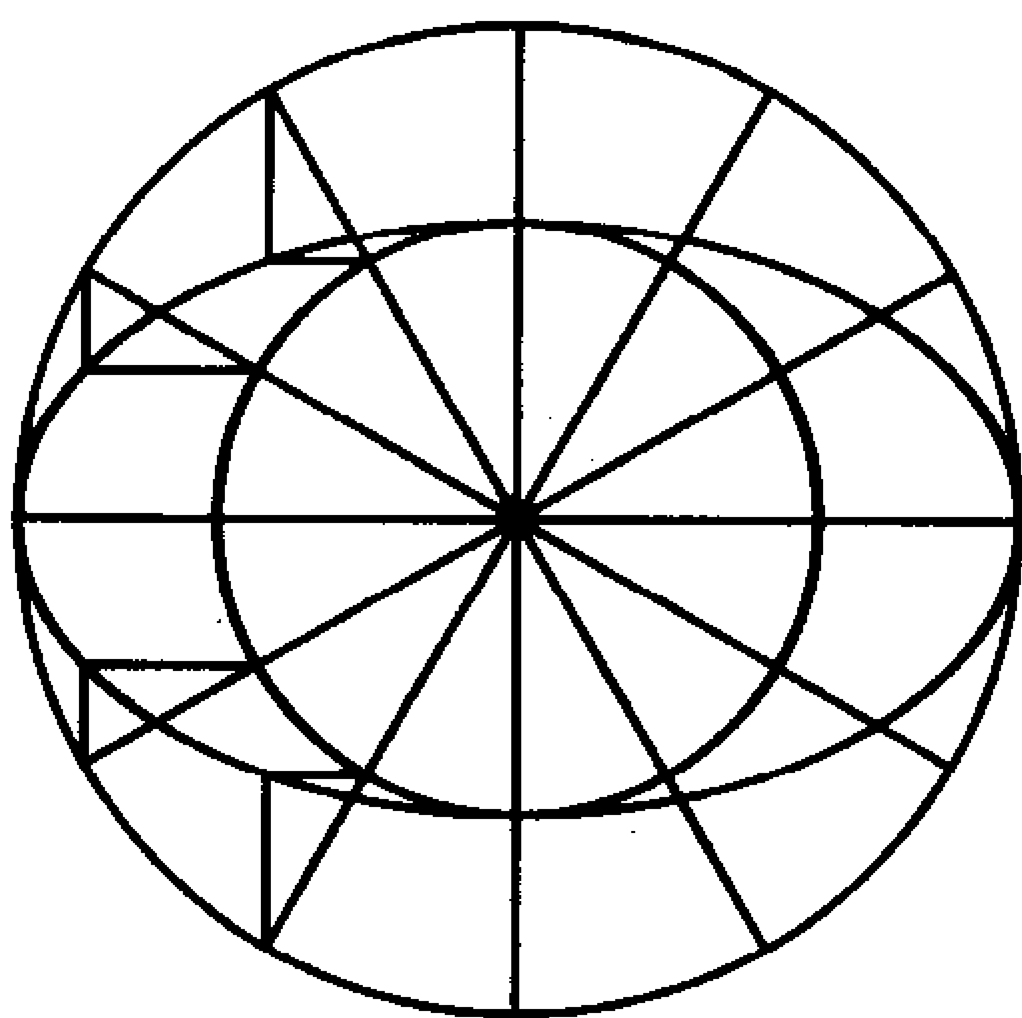
如果不用两根针，而把线绕另一个椭圆，那么铅笔仍然画出一个与原椭圆有相同的焦点的椭圆.

要在一个矩形内画椭圆，可以把该矩形的每一条边的一半和连接一组对边中点的线段的一半偶数等分，然后求出连接 X，

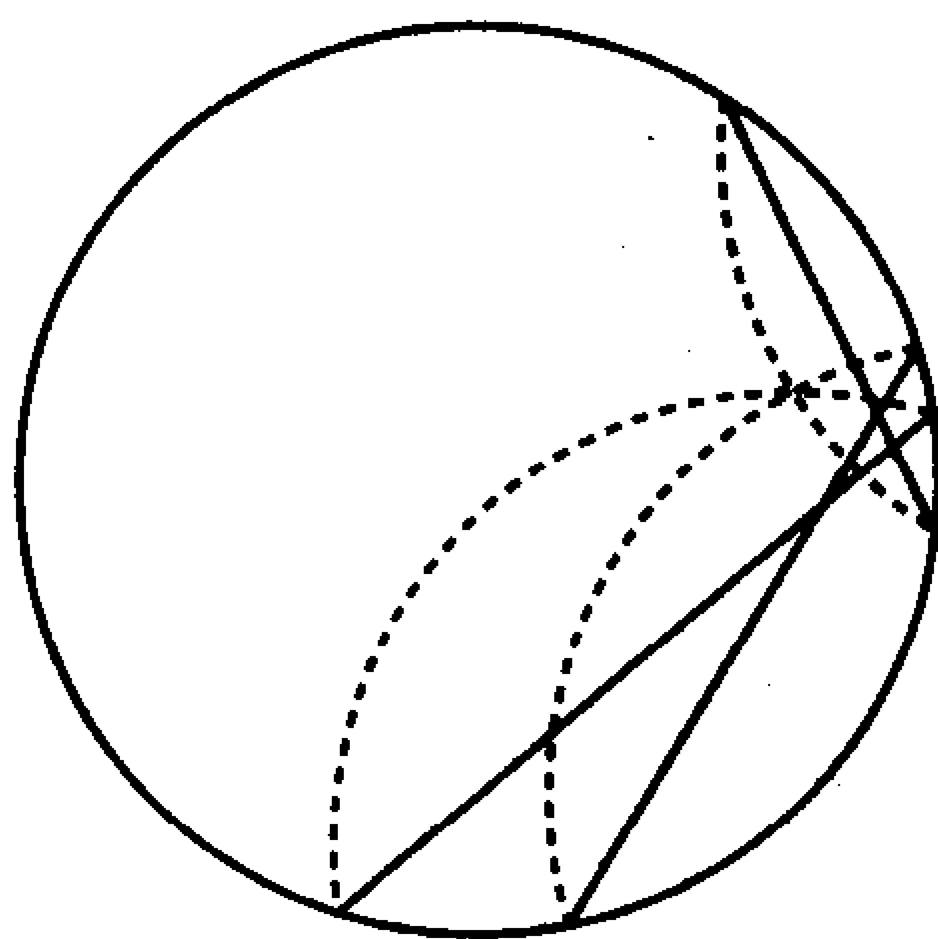


Y 与分点的直线的交点.

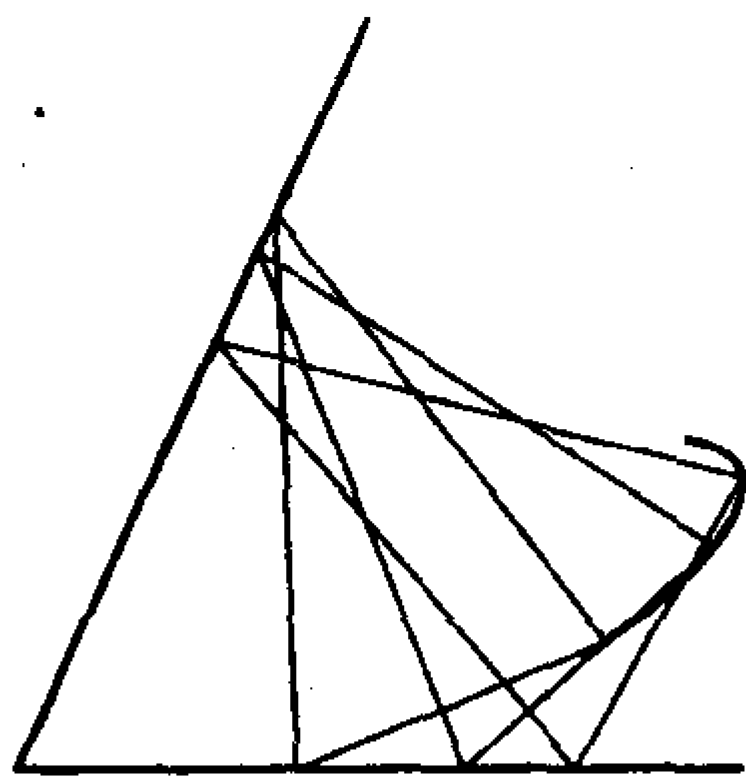
椭圆可以认为是被压缩的圆. 下图表示将外圆在竖直方向上压缩到 0.6 倍,或者将内圆在水平方向上伸展而作出的椭圆.



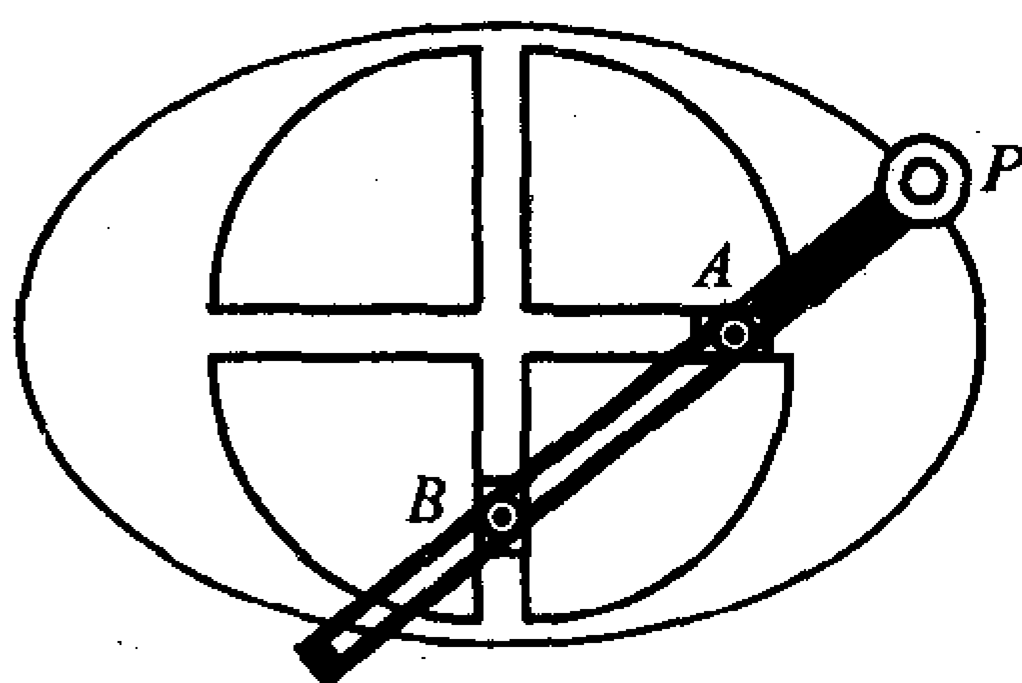
若要用折纸的方法得到椭圆,可先画一个圆并在圆内取一点. 将纸对折,使圆周落在所取的点上,再折出折痕. 重复折出不同的折痕将包络出一个椭圆.



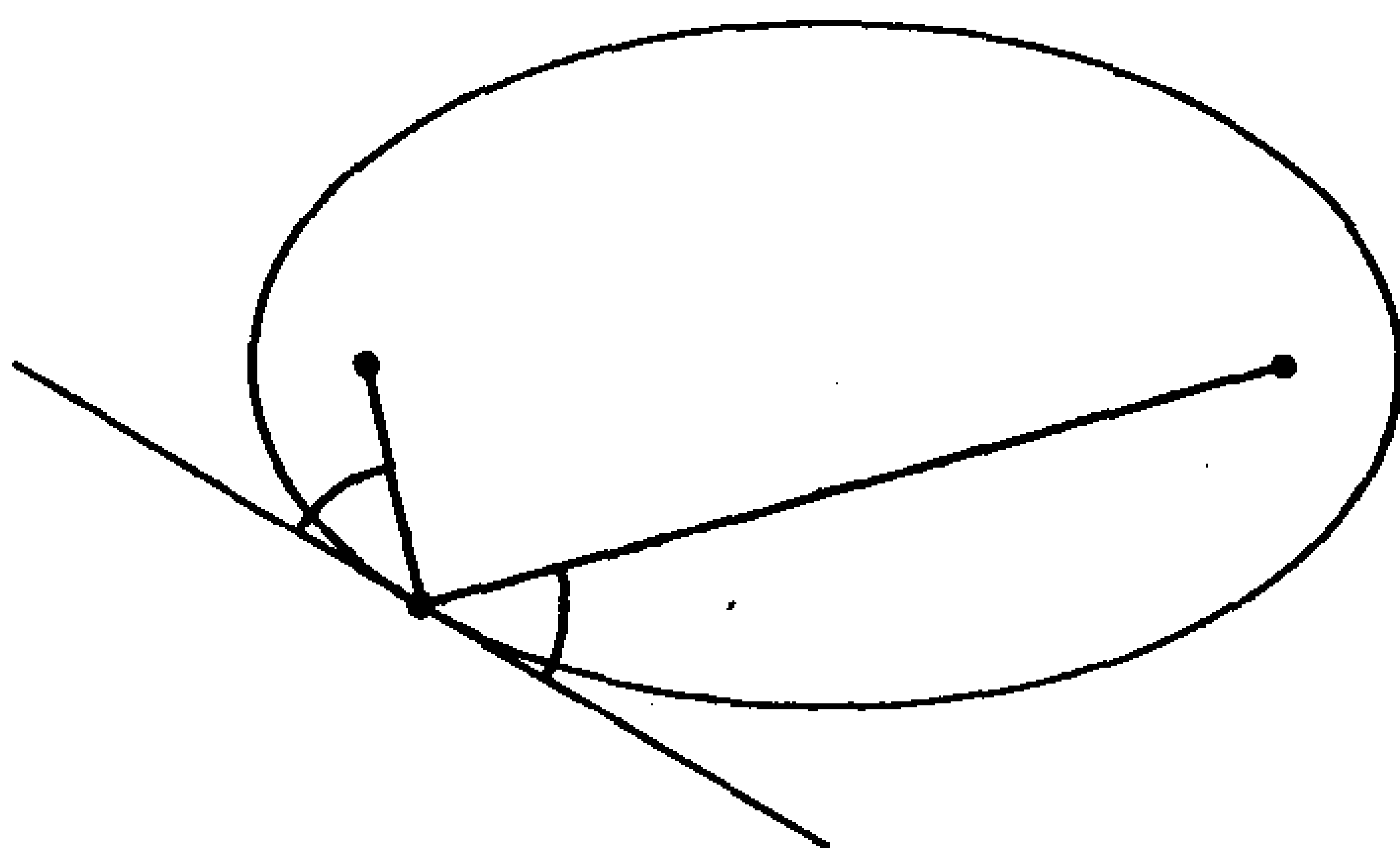
以下画椭圆的方法是列奥那多·达·芬奇(Leonardo da Vinci)发现的. 剪一个三角形 ABC. 在纸上画两条轴,不必垂直,使三角形的两个顶点分别在两条轴上移动. 第三个顶点的轨迹就是椭圆.



靠墙的梯子滑落下来就是这种作法的一种特殊情况.梯子上的任意一点,例如还站在梯上的人的脚,就在椭圆的一部分上运动.这就是用椭圆规画椭圆作为商业工具的依据.将一根杆的两点限制在两条槽内滑动,杆上一点的轨迹就是一个椭圆.



椭圆的切线和连接切点和两个焦点的线段所成的角相等.

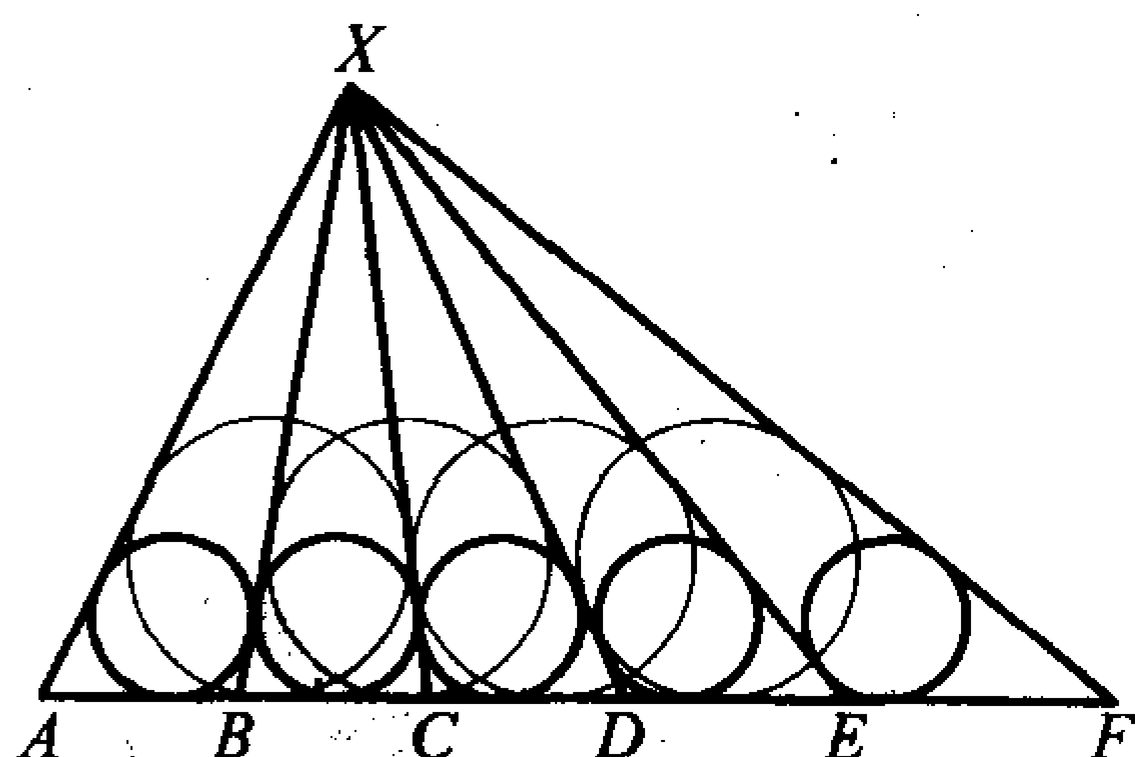


在力学中,考虑在悬挂在两个钉上的细线上滑动的小砝码可以推断出这一点.根据定义,砝码的轨迹是一个椭圆.只要砝码在细线上的滑动是光滑的,椭圆的最低点处的切线就是水平

的. 细线与水平方向的夹角相等是因为砝码不运动时所需要的张力相等. 所以切线与连接切点与焦点的直线的夹角相等.

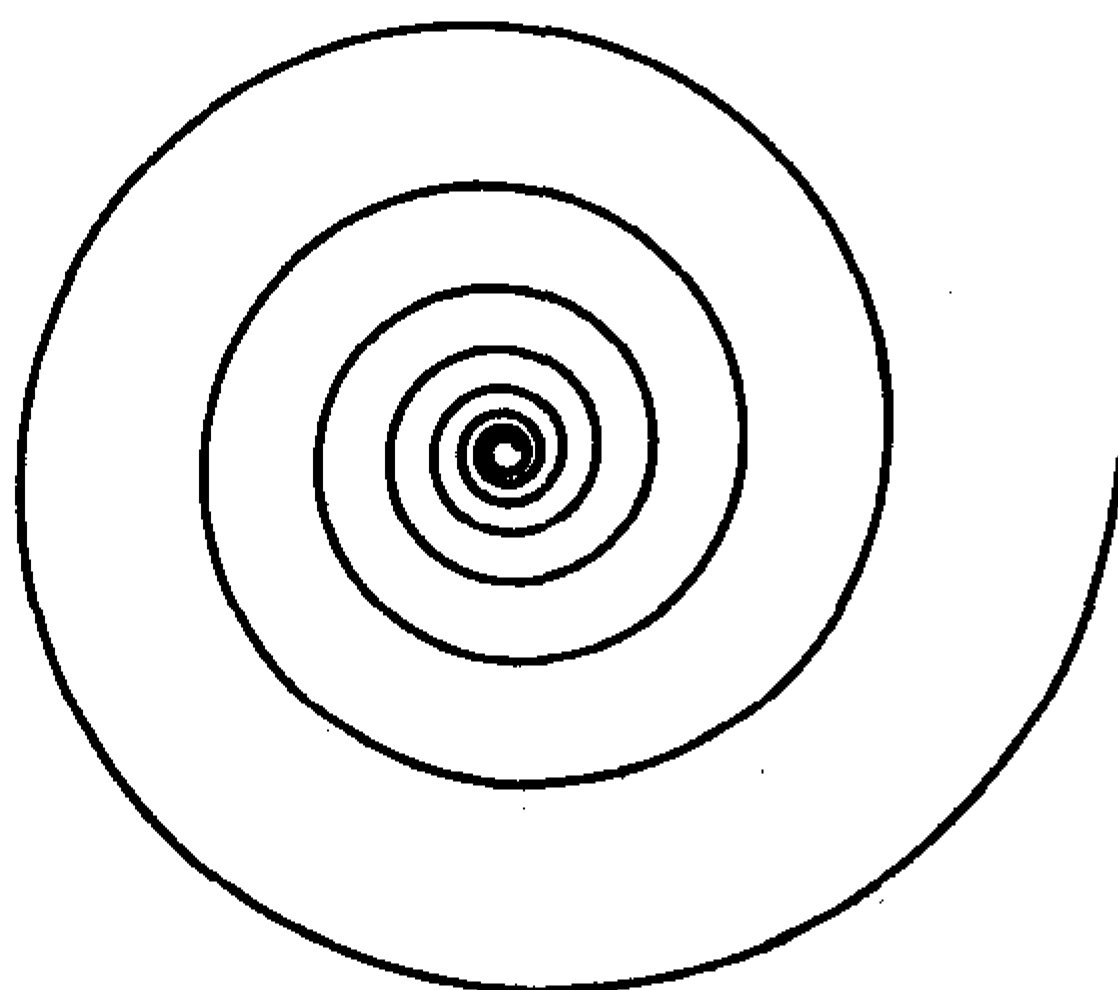
equal incircles theorem　等内切圆定理

过 X 点引若干条射线，使三角形 XAB，XBC，XCD，等等有相等的内切圆. 这样一来，三角形 XAC，XBD 等等也有相等的内切圆. 类似地，三角形 XAD，XBE，等等也有相等的内切圆，三角形 XAE，XBF 也有相等的内切圆.



equangular *or* logarithmic spiral　等角螺线或对数螺线

它是笛卡儿在 1638 年发现的，等角螺线与经过原点的半径相交成等角. 如果用 ρ 这个角表示，那么螺线的极坐标方程是 $r=a\exp(\theta\cot\rho)$.

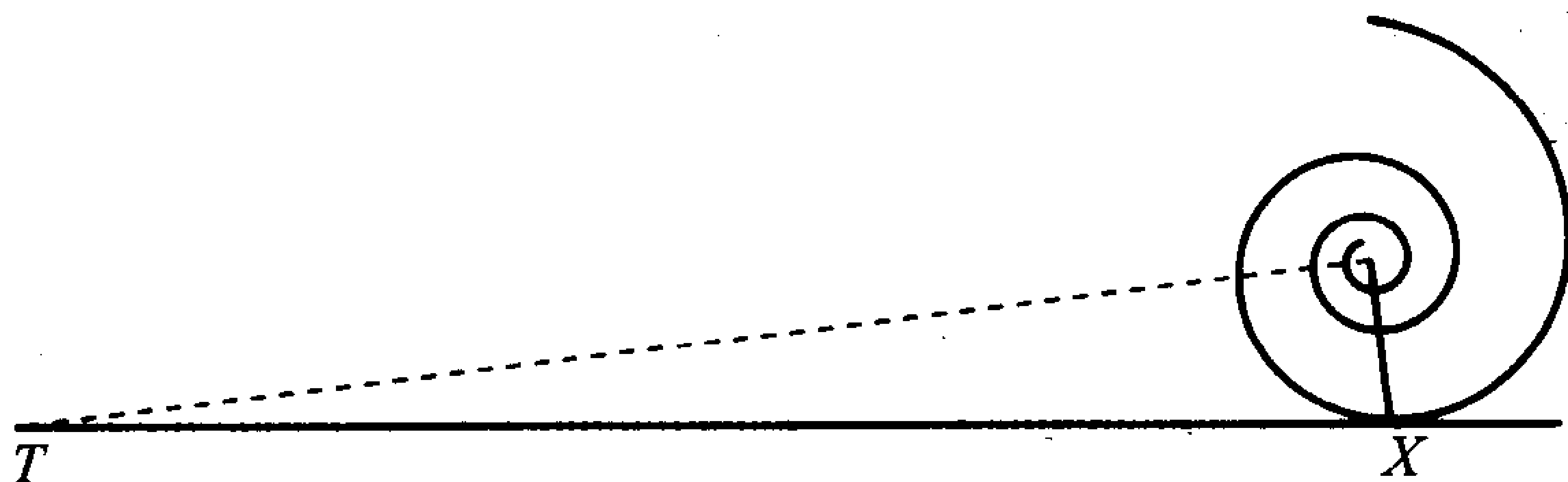


雅各伯·贝努里(Jacob Bernoulli)曾研究过出现这样倾向的等角螺线:进行某些变换后所得到的曲线仍是本身,这一性质深深地打动了他,以至他留下遗言,要把这一曲线刻在他的墓碑上,并且附上一句颂词"*Eadem mutata resurgo*",意思就是"虽然改变了,我还是和原来一样".

等角螺线的渐屈线是同样的等角螺线,所以也是它关于原点的反演曲线.如果把光源放在原点,那么它由反射和折射得到的焦散曲线也是同样的等角螺线.

由于等角螺线与自身相似,在这个意义上,如果把曲线的任何部分放大或缩小,实际上它是同一曲线的另一部分.

如果等角螺线在一条直线上滚动,那么该螺线的称为极的原点的轨迹是另一条直线.曲线上从极(即 O 点)到 X 点的长等于 XT,这里 T 是极的出发点,$\angle TOX$ 是直角.



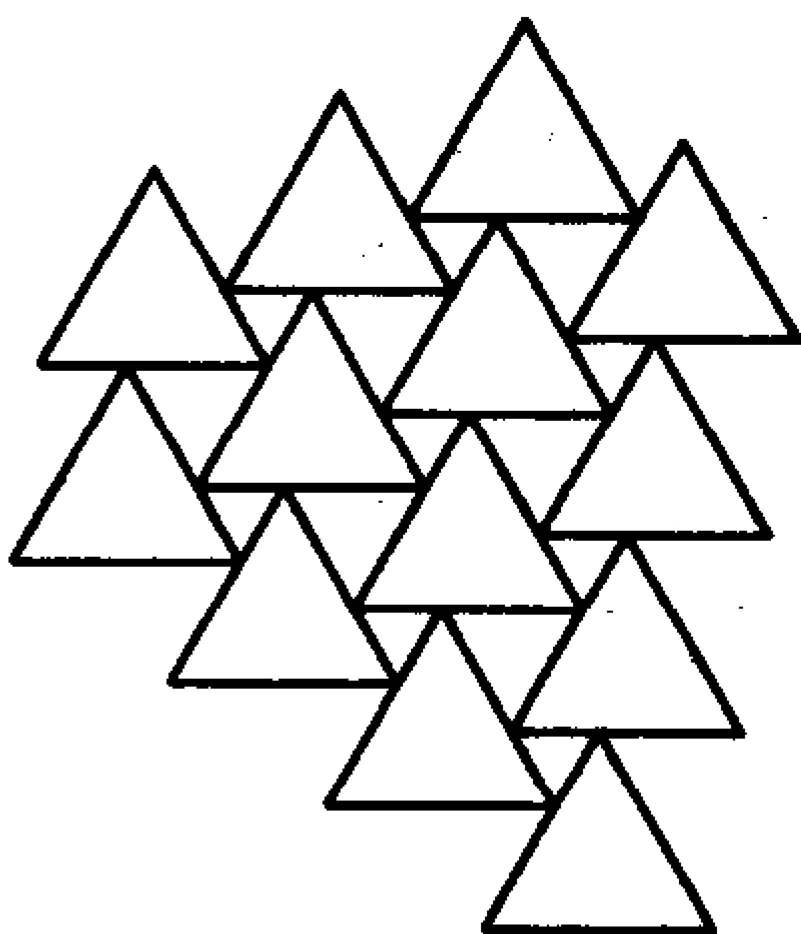
等角螺线在自然界中是经常出现的.例如鹦鹉螺的外壳就是等角螺线.但是向日葵花这样的形状只是近似的等角螺线,最好还是用费尔马螺线来描述.

equilateral triangle tilings　等边三角形铺砌

同样的等边三角形组成的镶嵌图是正规的镶嵌之一.因为在这样的镶嵌中三角形排成带状,所以事实上有无穷多种由同样的三角形组成的平面镶嵌图,但是缺少有规律的性质.

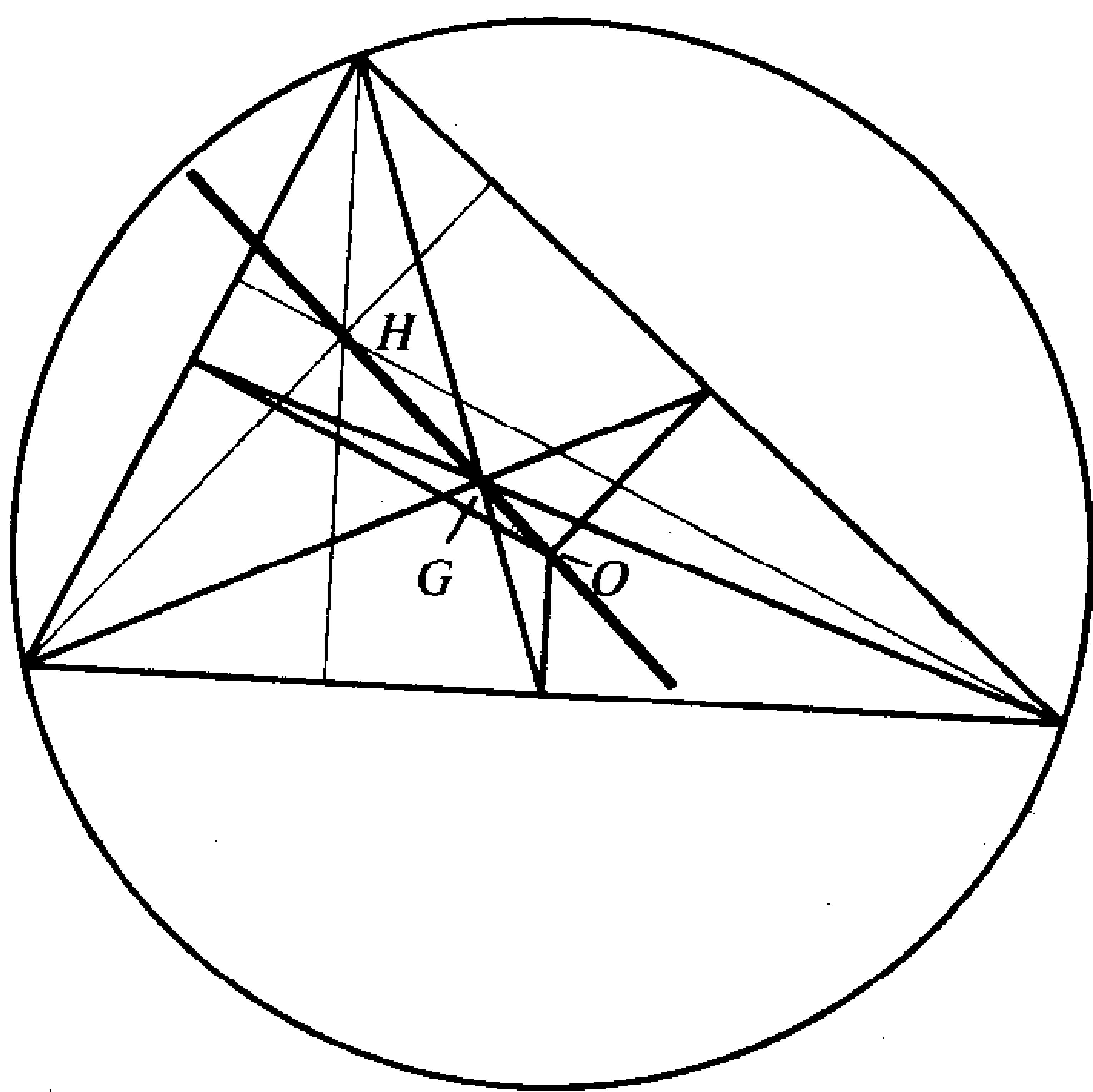
如果三角形的大小可以不同,那么可能性就多了.下图表示

由三种不同大小的等边三角形组成的镶嵌图.



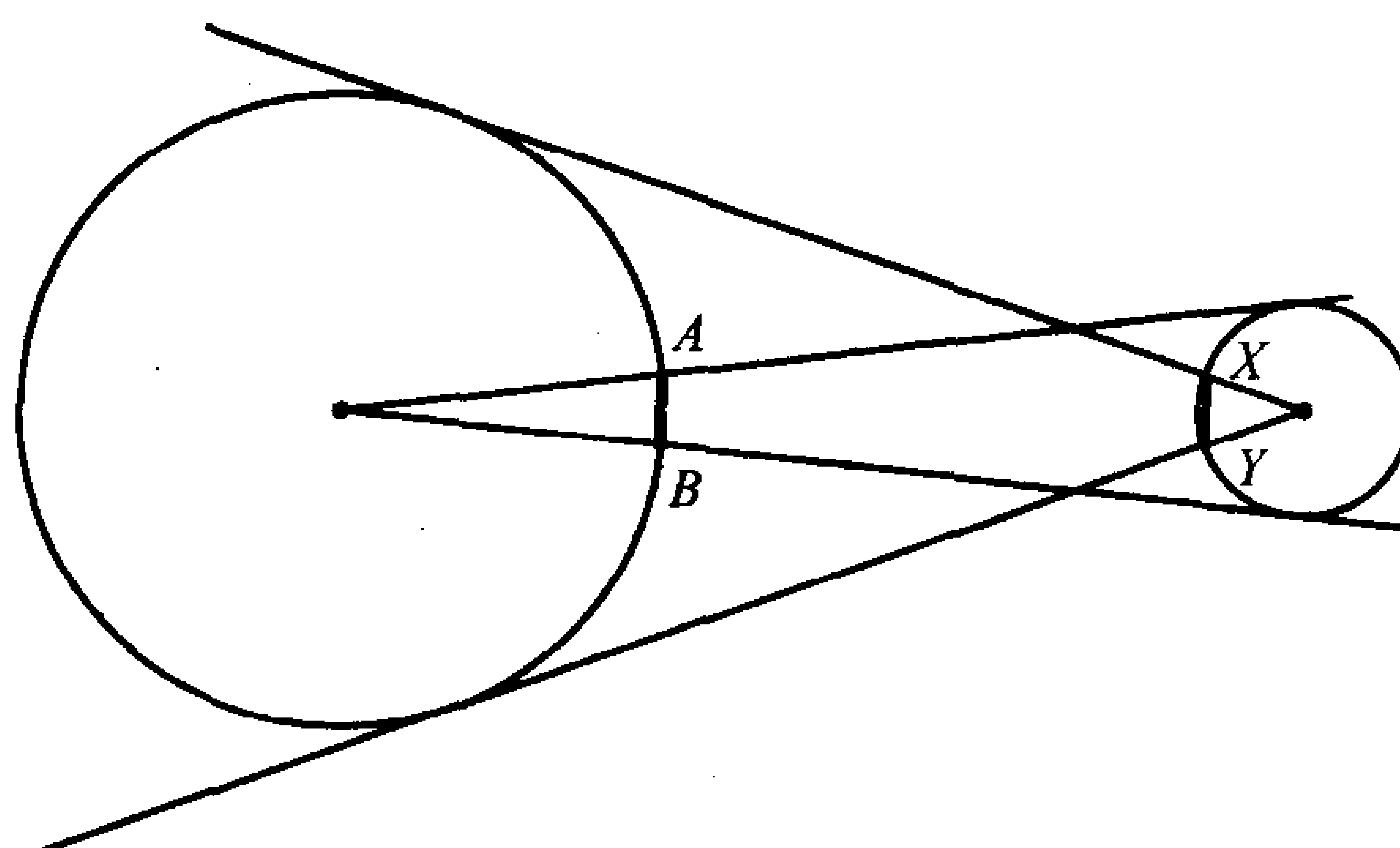
Euler line　欧拉线

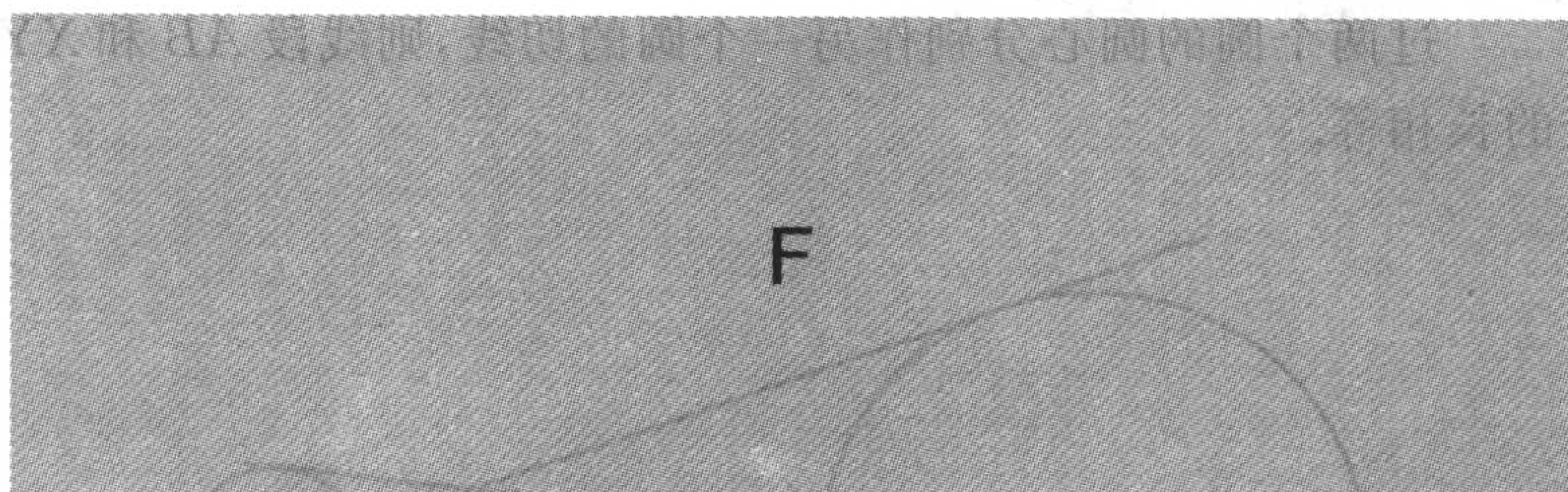
在任意三角形中,如果 O 和 H 分别为外心和垂心,G 是中线的交点,那么它们在同一直线上.此外,还有 $GH=2OG$.列奥那德·欧拉(Leonard Euler)在 1765 年发表了这一令人赞美的定理.



eyeball theorem　眼球定理

过两个圆的圆心分别作另一个圆的切线，则线段 AB 和 XY 的长相等.

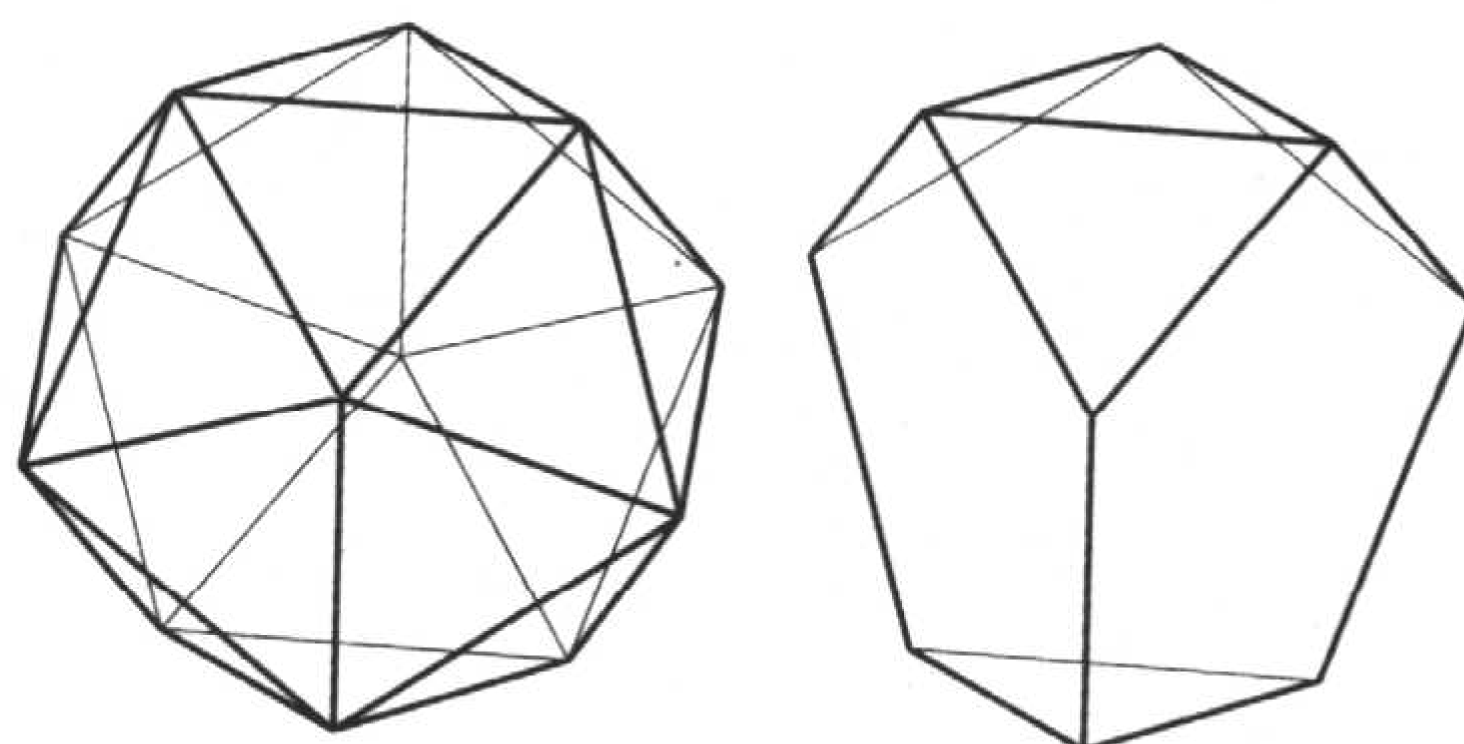




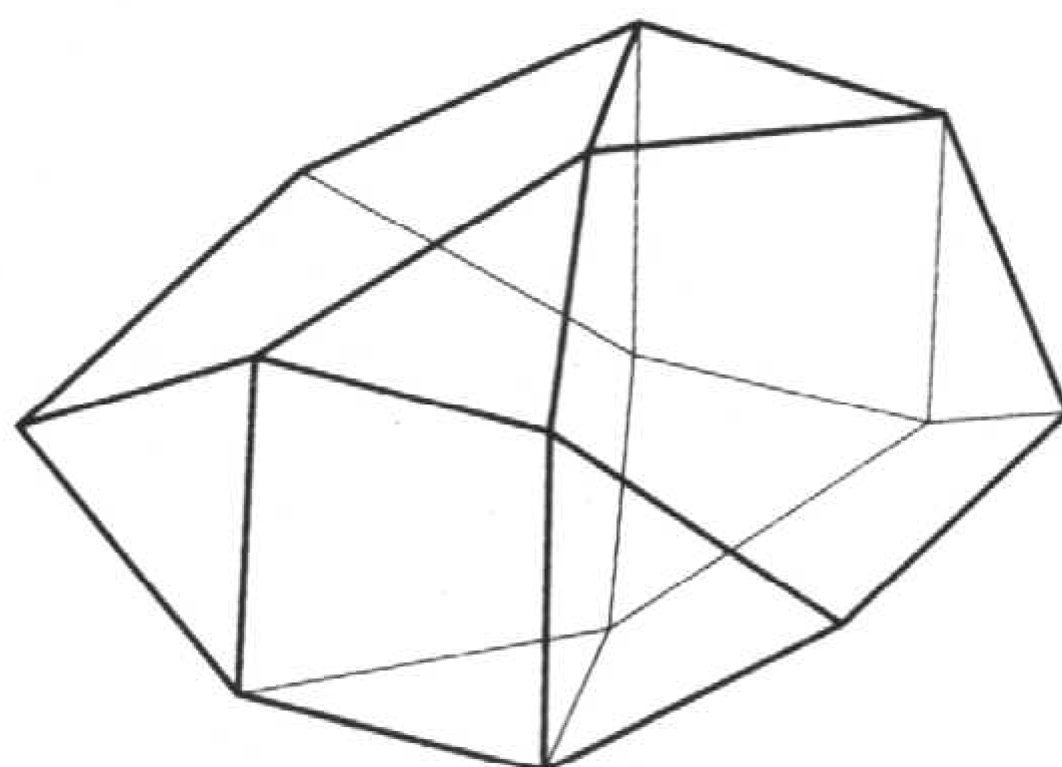
face-regular polyhedra　以正多边形为面的多面体

以正多边形为面可以构成许多多面体,但是它们很少或者没有其他的对称性.

正二十面体的每一个顶点周围都有五个正三角形,它们形成一个扁的五棱锥.如果去掉三个这样的五棱锥,并用正五边形代替,那么结果就得到下图中的缺三块的二十面体.



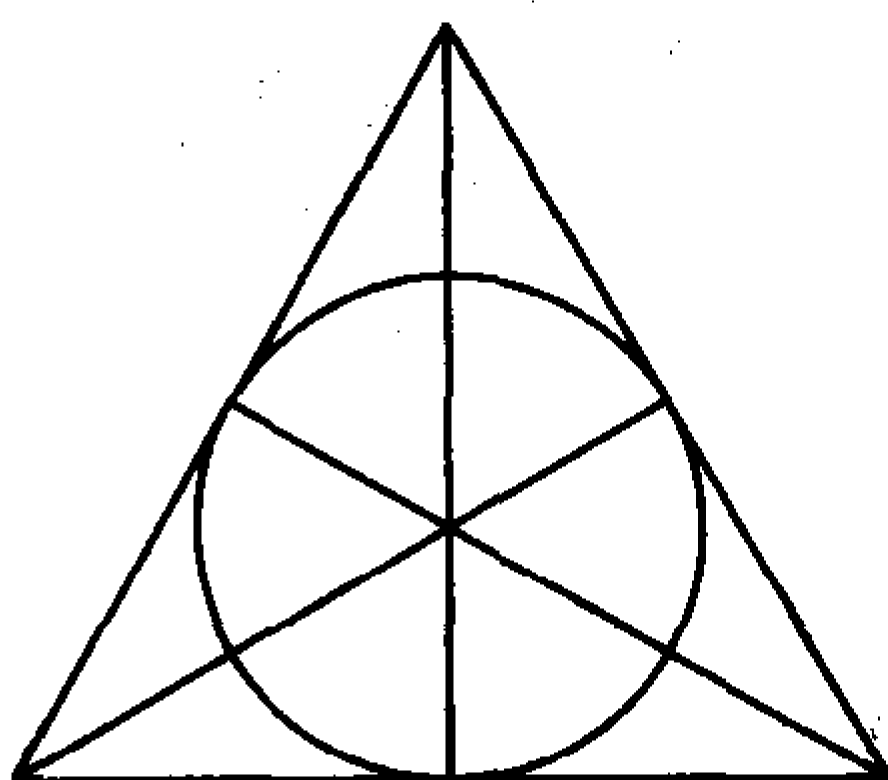
下图中的多面体称为由正三角形、正方形和正五边形组成的多面体(bilunabirotunda).



维克多·扎尔伽勒(Victor Zalgaller)在1966年证明了除了正多面体，半正多面体，正棱柱和反棱柱以外，还恰有92种以正多边形为面的凸多面体. 他对所有这些多面体都予以命名. 例如，gyrofastigium, metabidiminished rhombicosidodecahedron 和 hebesphenomegacorona 等. 在这92种凸多面体中，有二十八种不能分割成另外两个以正多边形为面的多面体，在这种意义下，这二十八种多面体称为是简单的.

Fano plane　法诺平面

法诺平面是一个有限的射影平面，它由点和线组成，经过它的每一点的线的条数都相同，每一条线上的点的个数都相同.



上图表示最小的有限射影平面，即法诺平面，它由7个点和7条线组成，每一条线上有3点，每一点在3条线上. 因此记作7_3. 它说明了这样的事实：实际上并不是所有的有限射影平面都能用几何上的直线画出的. 法诺平面最多也只能这样画：除了一条线以外其他的线在几何上都是直线；圆是第七条"线".

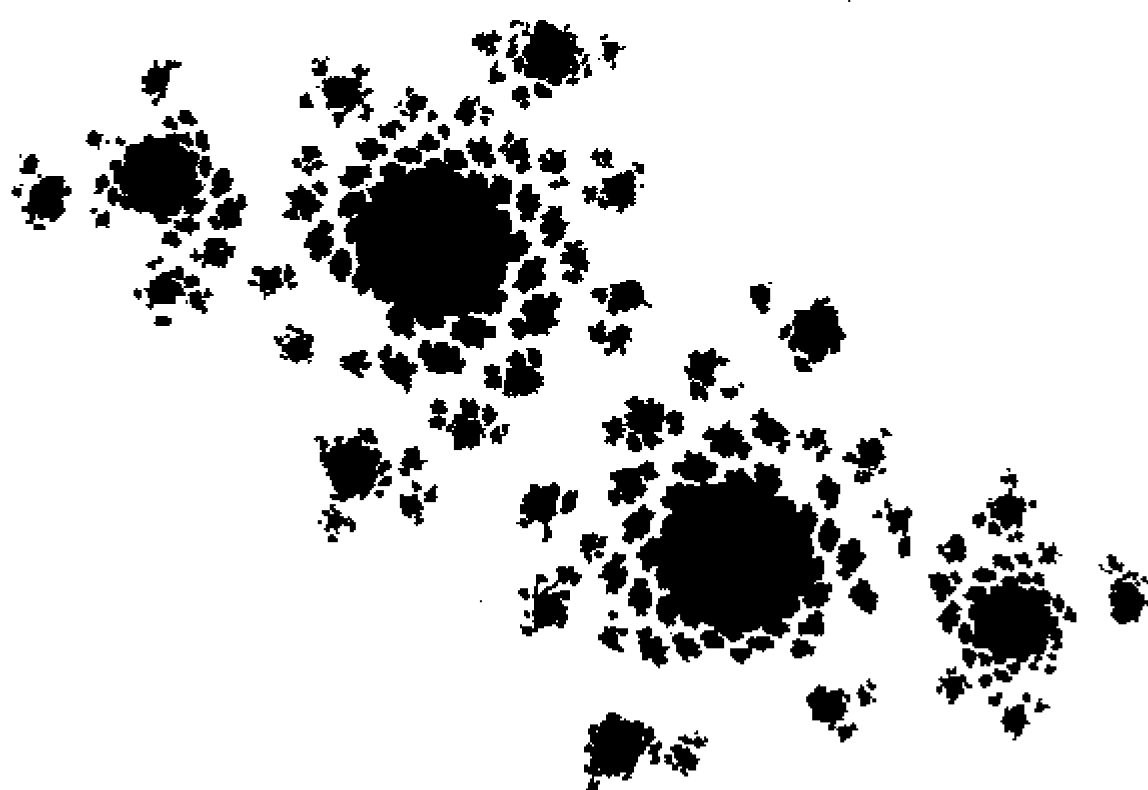
在有限射影平面内，点的总数必定是$1+p^n+p^{2n}$，这里p是质数；每一条线上有$1+p^n$个点，每一个点都在$1+p^n$条线上. 对于上面的法诺平面而言，$p=2, n=1$.

上面的法诺平面是唯一的7_3构形. 8_3构形也是唯一的，它除了一条线以外，都能用几何上的直线画出. 有三种9_3构形，十种不同的10_3构形，三十一种11_3构形和二百二十八种12_3构形.

Fatou dust　法透尘

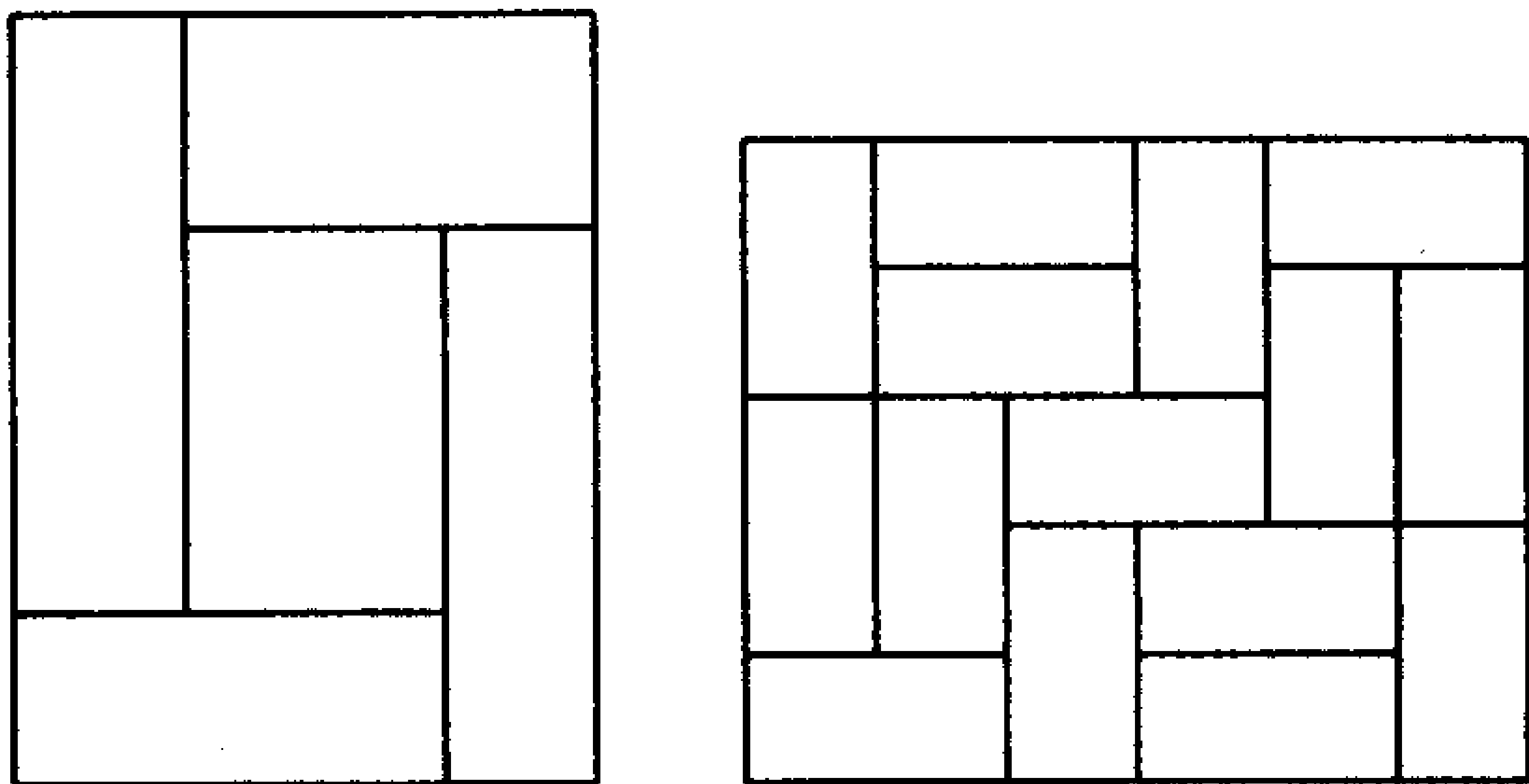
当生成朱里亚(Julia)集合的点被选定在曼德伯罗特(Mandelbrot)集合(或对不同的变换等价的集合)外时,集合就分割成孤立点的集合,这就是以曾与伽斯顿·朱里亚(Gaston Julia)一起工作过的皮埃尔·法透(Pierre Fatou)命名的法透尘.

如果点相对靠近曼德伯罗特集合的边界,法透尘就密,对于曼德伯罗特集合中的邻近的点就类似于朱里亚集合.当点越来越远离曼德伯罗特集合时,法透尘就越稀.



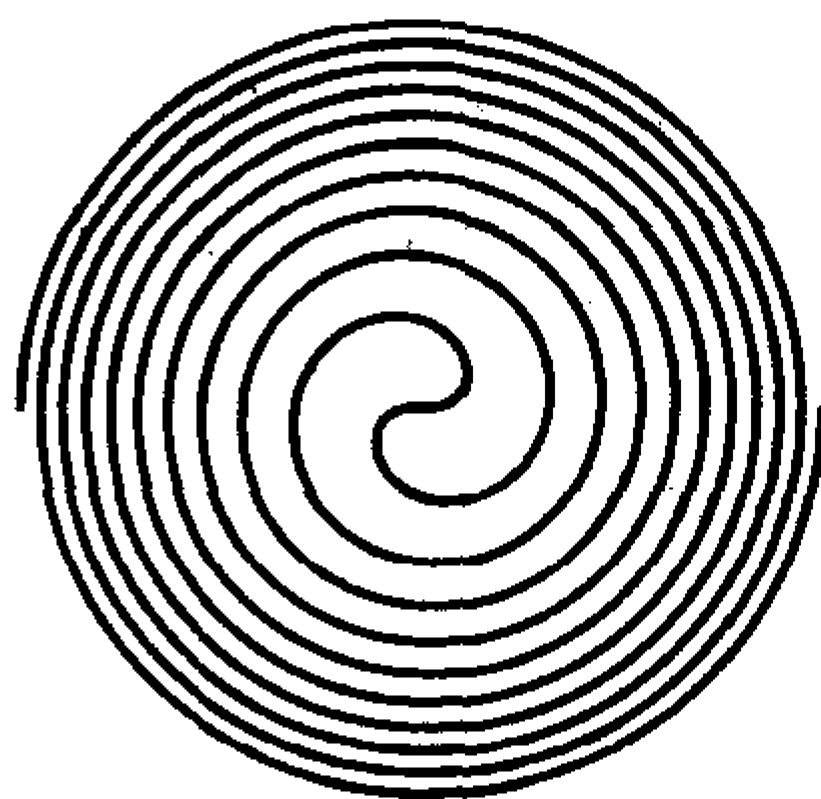
fault-free rectangles　无缝矩形

把矩形分割成若干个小矩形时可能存在连接两边并把原矩形分割成两个小矩形的直线,这样的直线称为缝.不存在这样的直线的分割称为无缝分割.把一个矩形分割成 3 块、4 块或 6 块的分割不可能是无缝分割.下图表示分成 5 部分的无缝分割和把 5×6 的矩形分割成十五个 1×2 的矩形的无缝分割.



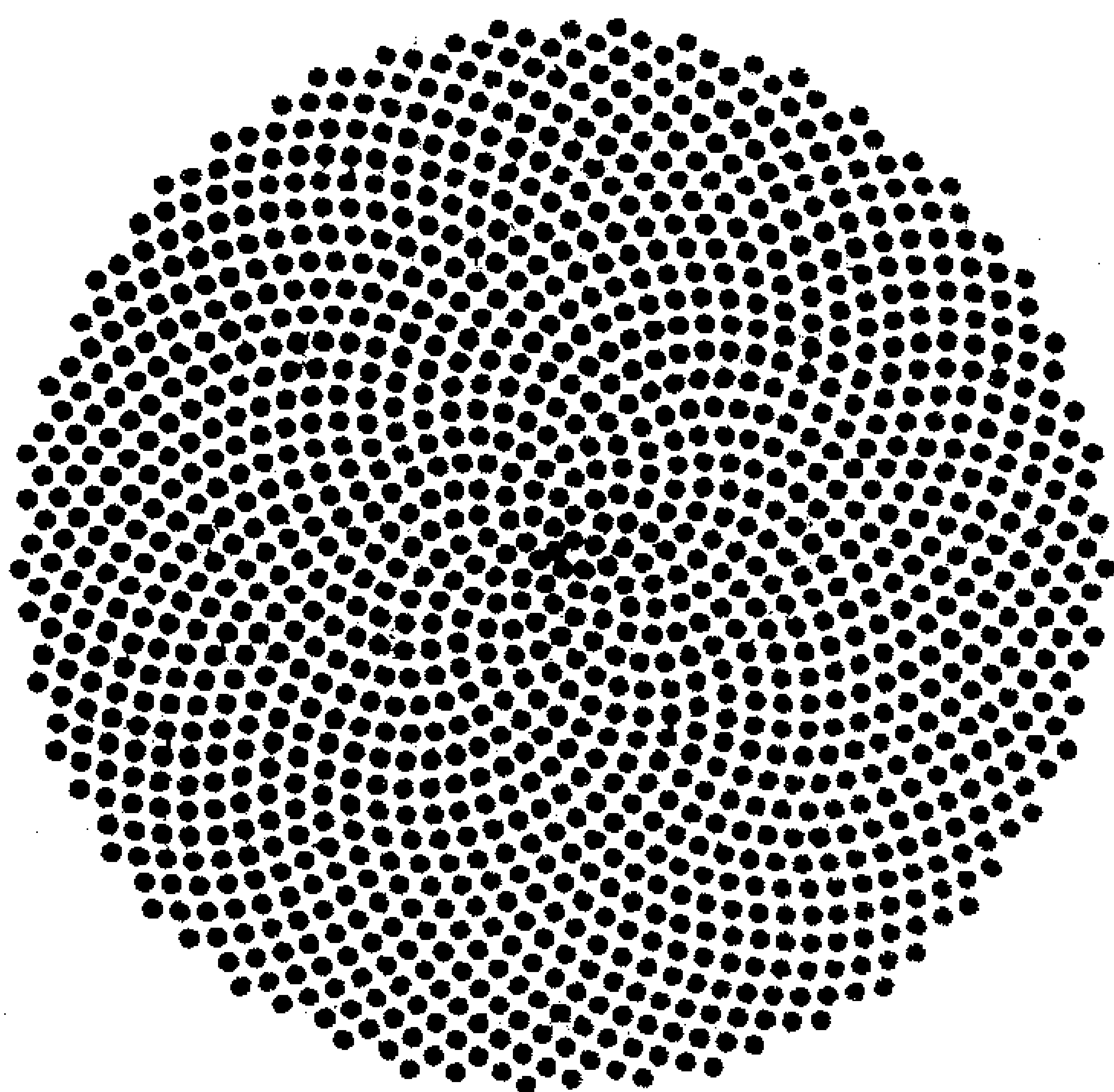
Fermat *or* parabolic spiral　费尔马螺线或抛物螺线

这一螺线是以曾在 1636 年研究过的皮埃尔·德·费尔马命名的，它也称为抛物螺线是因为它的极坐标方程是 $r^2=a^2\theta$. 它很像抛物线的方程 $y^2=ax$.



罗勃特·笛克松(Robot Dixon)解释了费尔马螺线是形成植物生长形式的较为精确的模式. 例如，雏菊花，而不是像通常是用等角螺线解释的：与构成雏菊花序有关的是费尔马螺线，其性质是相继各螺层所围的面积的增量相等.

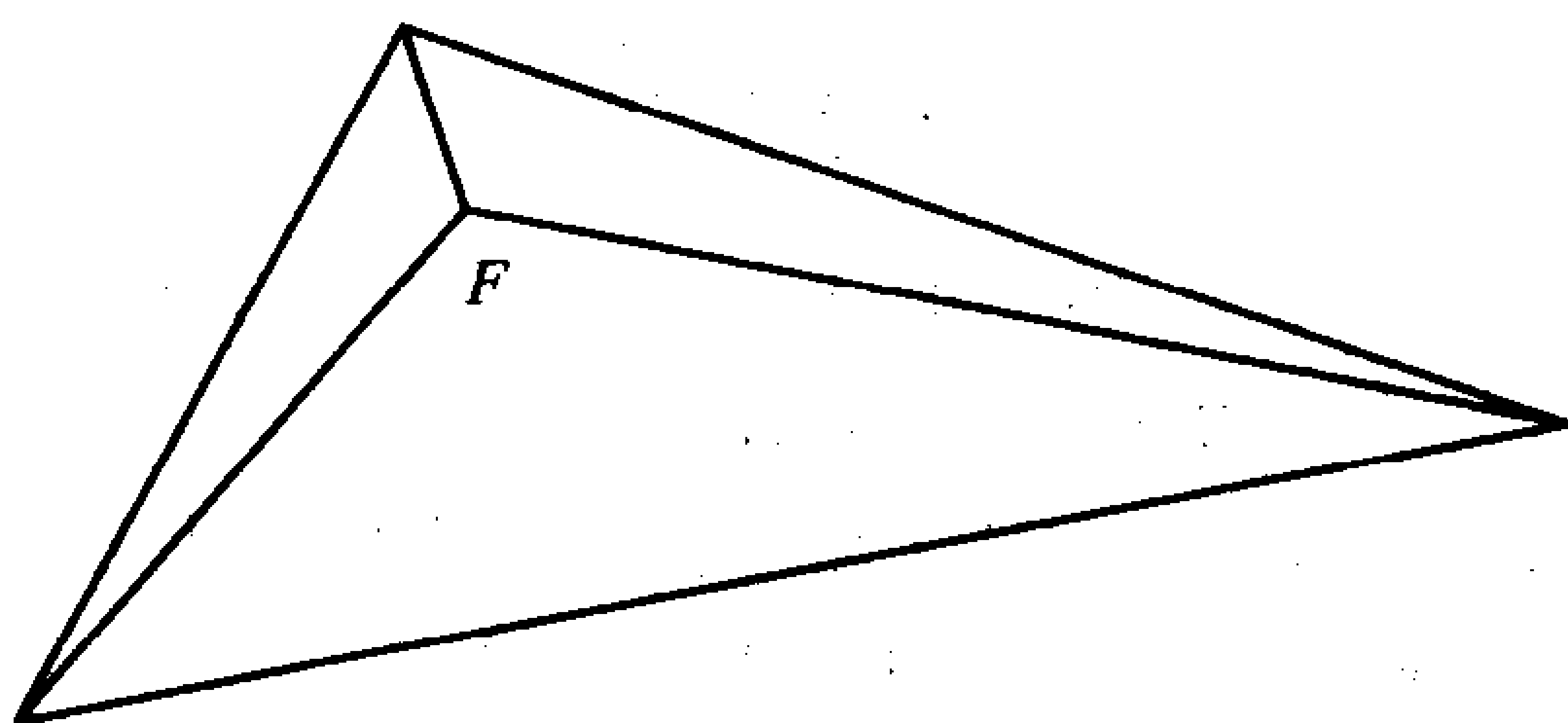
下图就是由费尔马螺线构成的雏菊花序.



参考书：R. DIXON，'The mathematics and computer graphics of spiral in plants'，*Leonardo*，Vol. 16，No. 2，1983；R. DIXON，*Mathographics*，*Basil Blackwell*，*Oxford*，1987.

Fermat point of a triangle　三角形的费尔马点

费尔马向托里拆利（Torricelli）提出挑战，要他求出到三角形的三个顶点的距离之和最小的点. 这一问题很实际，因为如果在三角形的三个角上各有一个村庄，要求算出的需要建造连接所有三个村庄的道路的最短长度.



如果三角形的所有的角都小于 120°，那么所要求的点就是费尔马点，且连接这一点与三个顶点的线段都相交成 120°. 如果有一个顶角至少是 120°，那么费尔马点就是这个顶点.

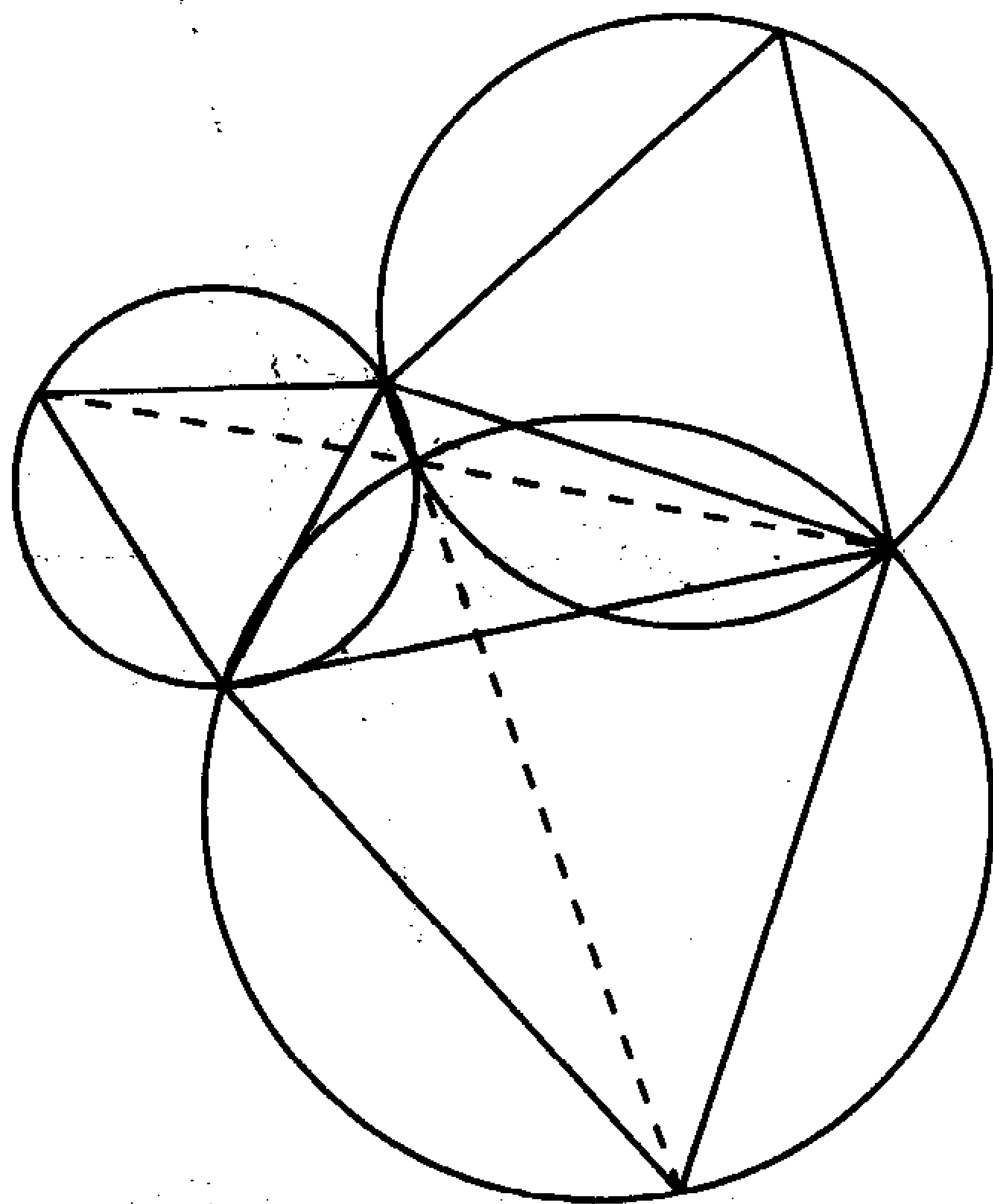
费尔马点能用实验的方法找到. 在三条细线上各挂一个同样的砝码，穿过在三角形的顶点处的洞，然后打一个结，这个结就会移动到费尔马点.

还有一种方法是：在三角形的三边上各作一个等边三角形. 连接新三角形的第三个顶点和相对的顶点的三条直线就相交于费尔马点，它也是这三个等边三角形的外接圆的公共点（见下一页的图）. 此外，这三条直线的长度相等，都等于该道路网络的总长度.

如果这些等边三角形都往里画，即拿破仑定理的一个变式（见下一页的图），那么连接新三角形的第三顶点和原三角形

(ABC)的相对的顶点的三条直线也相交于点 P. 这一点有一个很特殊的性质:如果角 C 小于 $60°$,角 A 和角 B 都大于 $60°$, $PA+PB-PC$ 在这一点达到最小值. 如果这一条件不满足,那么最小值在 A 点或者 B 点达到.

如果三角形的边长分别等于 a, b 和 c,各顶点到费尔马点的距离分别是 x, y 和 z,那么在边长为 $x+y+z$ 的等边三角形内存在一点,它到三个顶点的距离分别是 a, b 和 c.



参考书:DAVID NELSON, Napoleon revisited, *Mathematics Gazette*, No. 404, 1974.

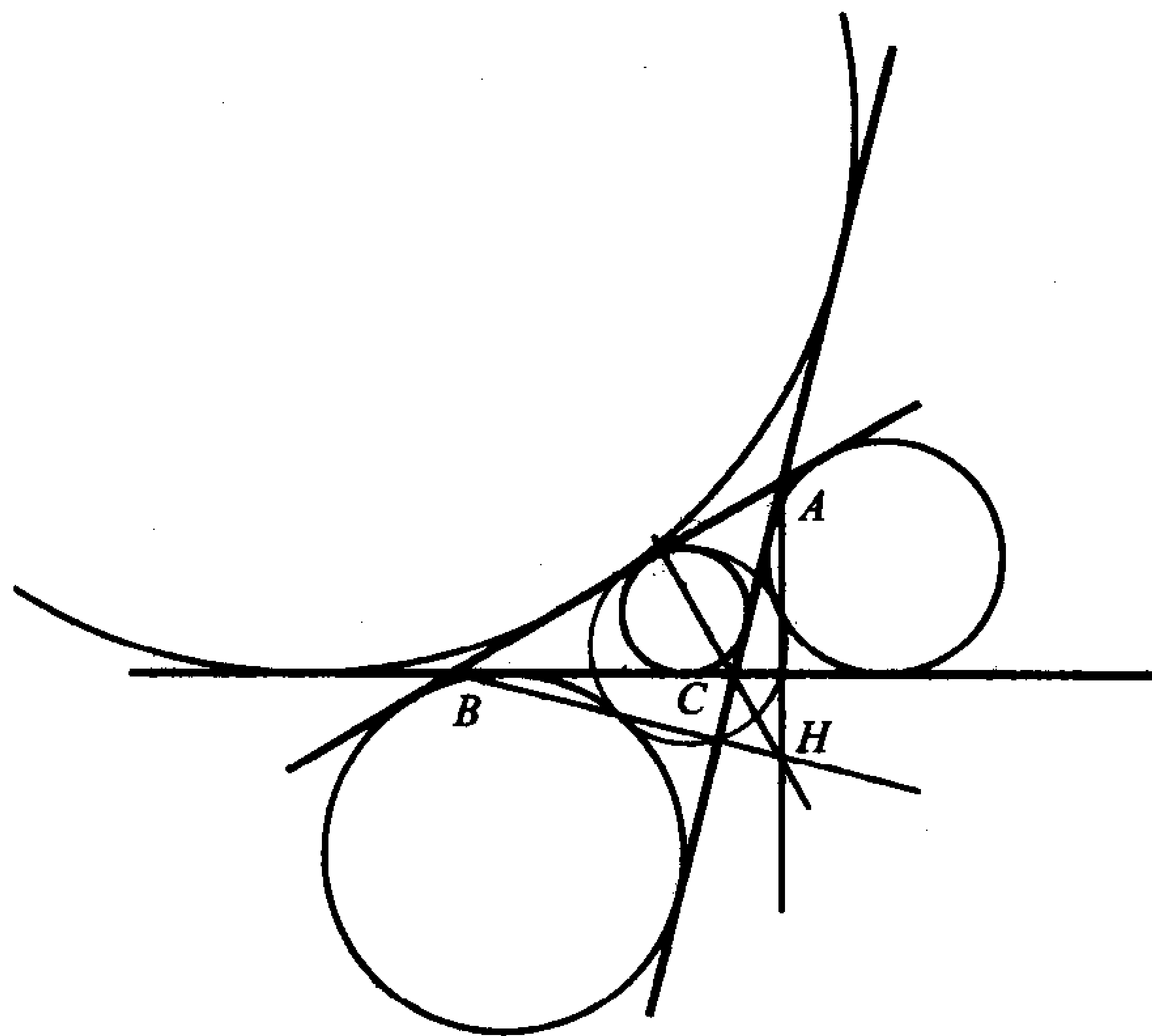
Feuerbach's theorem 费尔巴赫定理

费尔巴赫通过代数计算了三角形的内切圆和每一个旁切圆的半径及其圆心之间的距离,证明了九点圆与这四个圆都相切. 这使九点圆又增加了四个重要的点.

三角形 ABC 的九点圆也是 AHB, BHC 和 CHA 的九点

圆，因此它与内切圆以及每一个旁切圆都相切．这样又加了 3×4＝12 个点，总数达到了 25 个．还有……

如果 T 是九点圆与其他四个圆相切的切点之一，如果 A，B，C 是各边的中点，那么 TA，TB 和 TC 的长度之一等于另两个的和．

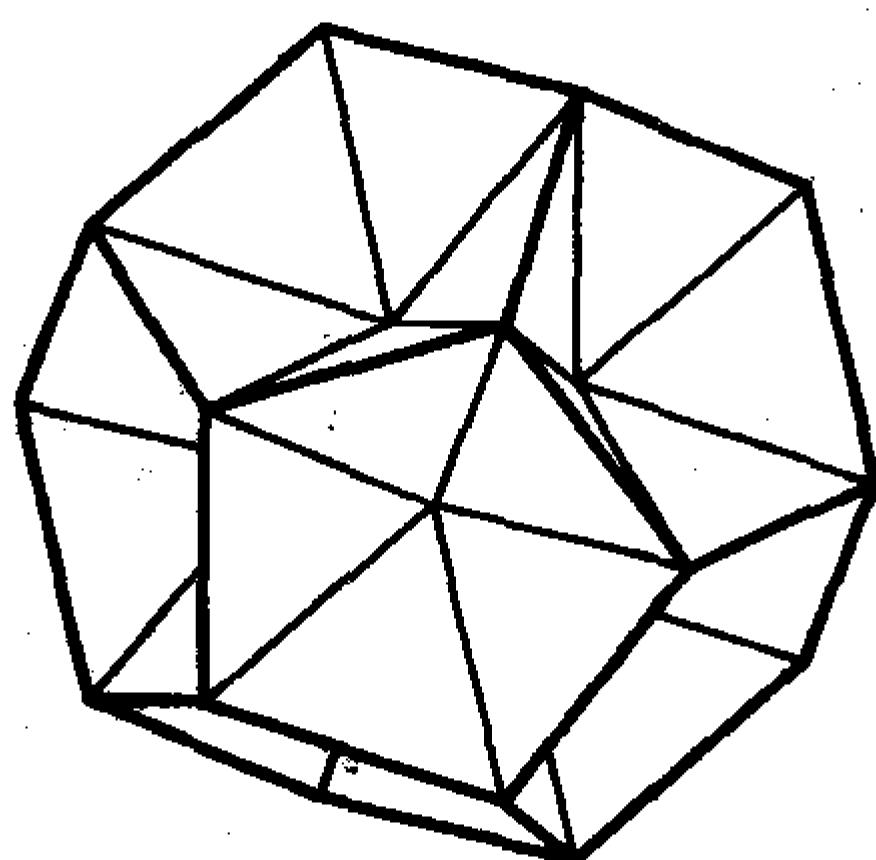


fifty-nine icosahedra　五十九种二十面体

正四面体和正方体不能构成星状多面体，因为把它的各个面延伸后不再相交．正八面体有一个星状多面体，即星状八面体(stella octangula)，正十二面体有三个：小星状十二面体、大十二面体和大星状十二面体．

与此不同的是二十面体有不少于 59 个星状二十面体．M・布鲁克纳(M. Bruckner)，A・H・维勒(A. H. Wheeler)和 H・S・M・考科塞特(H. S. M. Coxter)曾列举过．如果一个立体的正二十面体是由一个大木块被平面所削而成，那么就得到 1＋

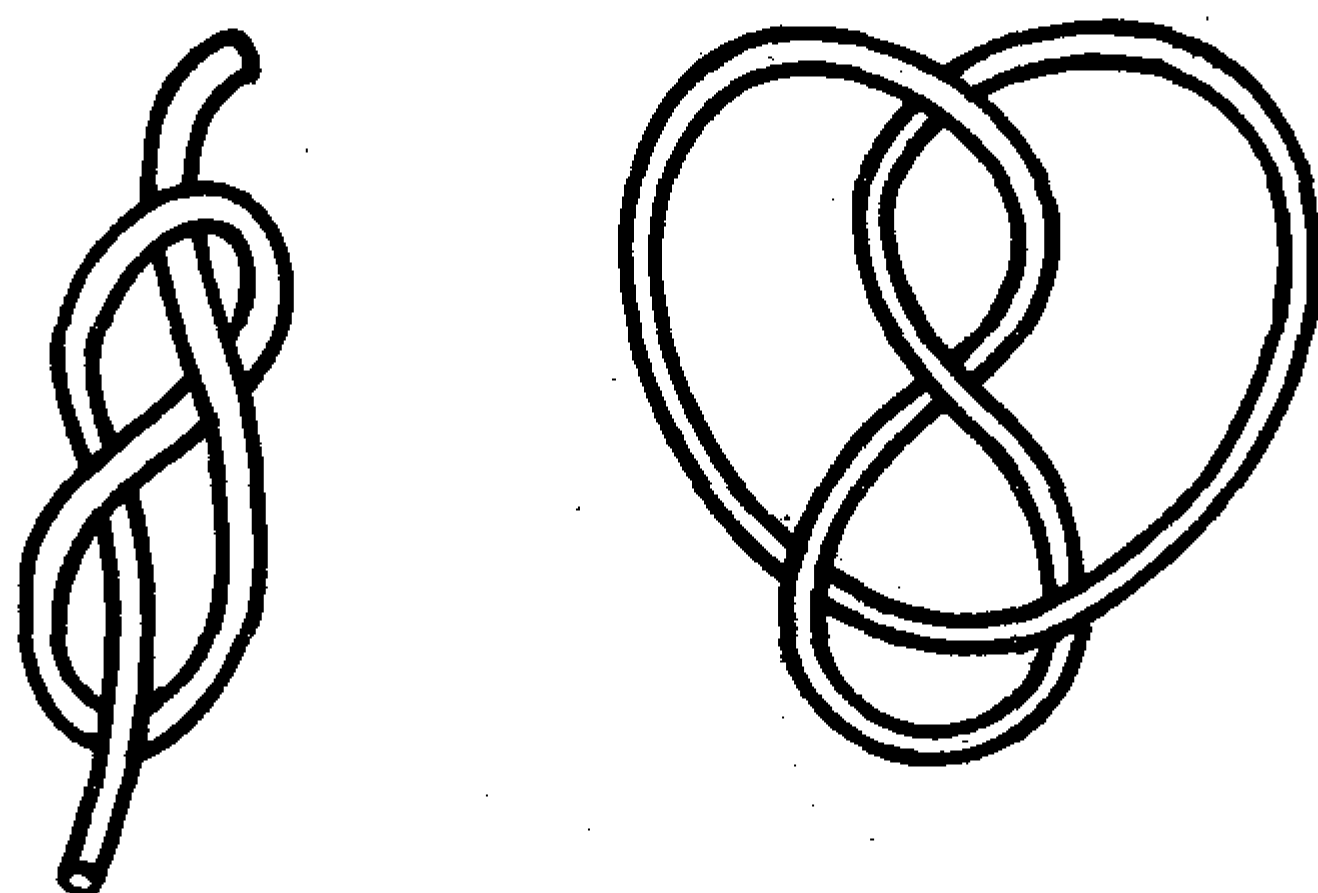
20＋30＋60＋20＋60＋120＋12＋30＋60＋60 块小木块. 这些小木块都能被对称地取代，形成 32 个反射多面体（即具有对称平面的）和 27 个立体，它们以左旋和右旋的形式出现. 其中包括原来的正二十面体，大二十面体和由五个正八面体和十个正四面体组成的复合多面体. 下图表示第三种星状多面体，它的各个面都是三角形.



参考书：H. S. M. Coxter，'*Fifty-nine Icosahedra*'，Springer-Verlag，Berlin，1938.

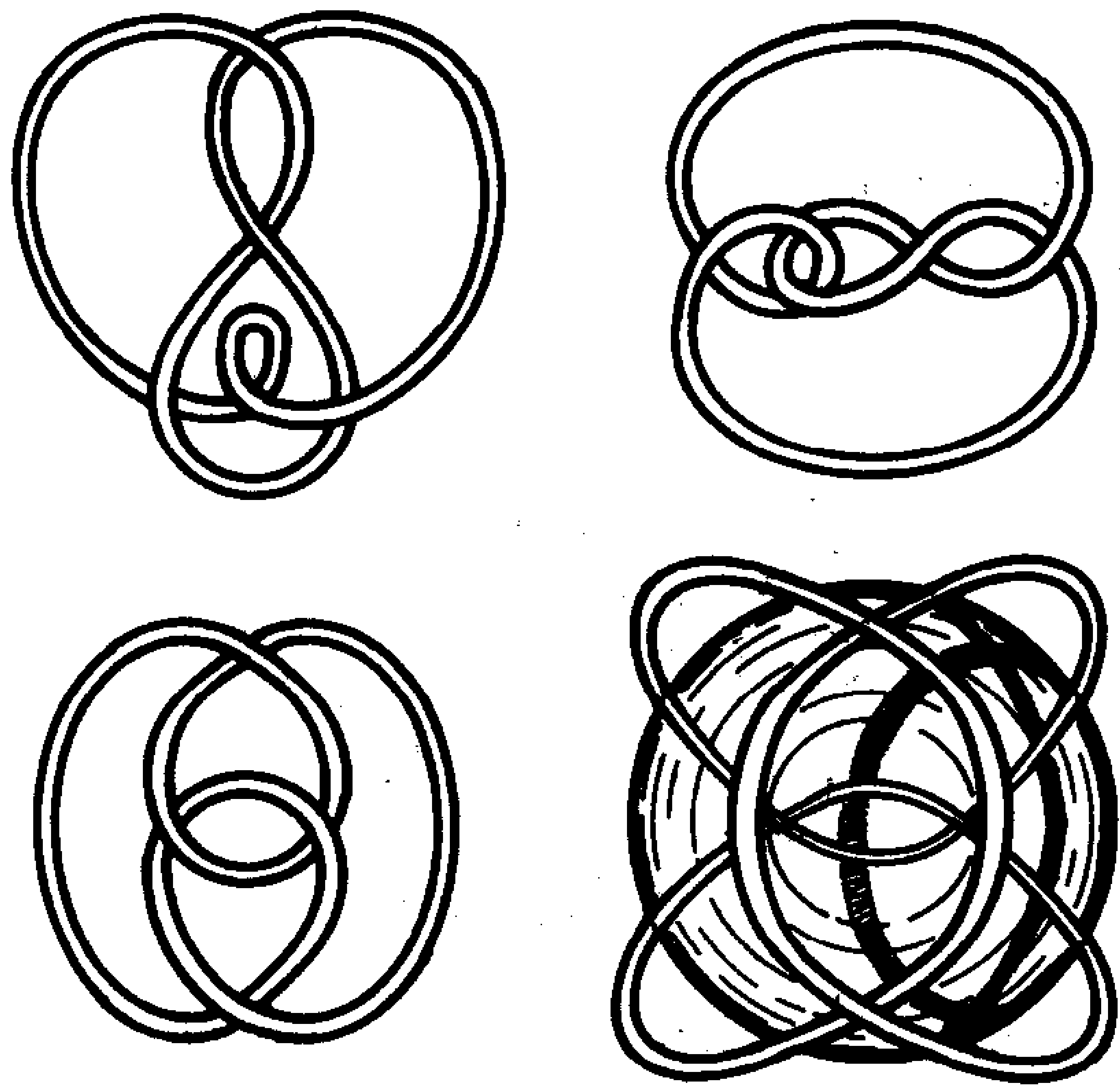
figure-of-eight knot *or* four-knot　8 字形结或四重结

下图是第二种最简单的结，它只交叉四次，依次一上一下. 把左图中的两端连起来就能得到第二种式样.



下面一些图表示上面的似乎是竖直对称的结是如何转化为

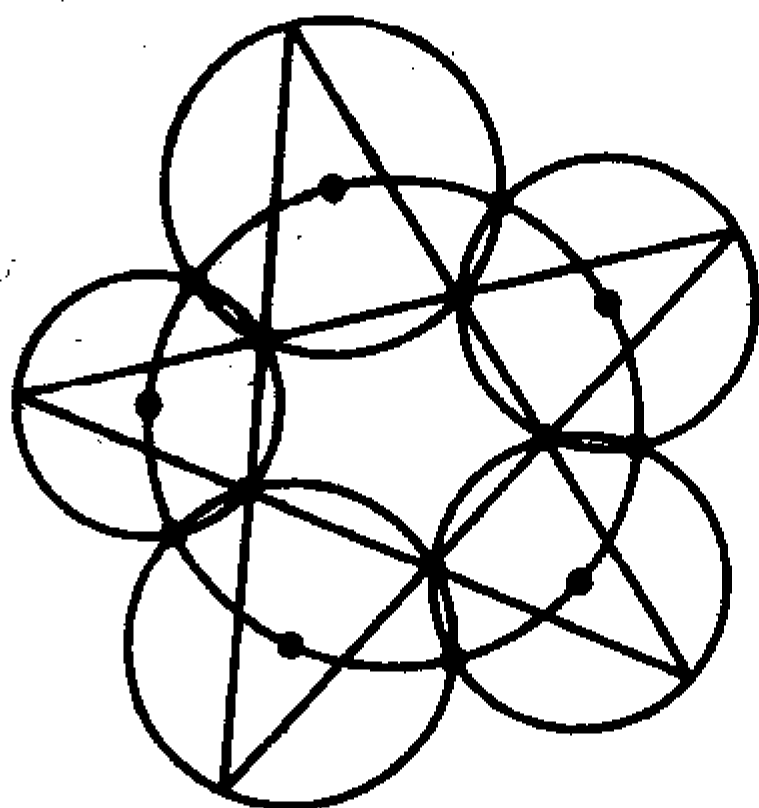
第三种式样的，这种式样既有竖直对称轴又有水平对称轴，最后导致一种在球面上的对称路径.



参考书：G. K. FRANCIS，*A Topological Picture Book*，Verlag，New York，1987.

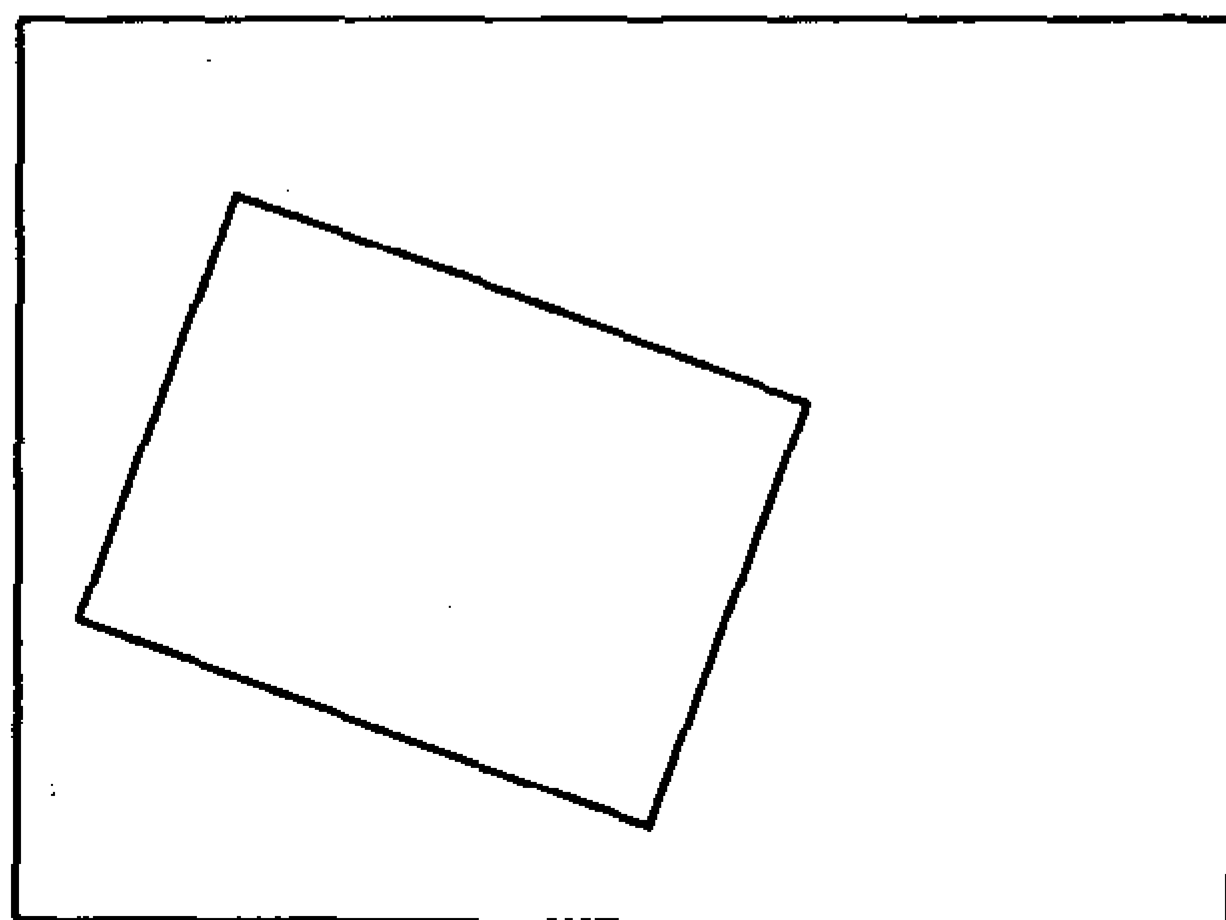
five circles theorem　五圆定理

在一个定圆上取五点为圆心画五个圆，这五个圆的每个圆与相邻的圆相交都有交点落在定圆上. 连接其余的交点就形成一个五角星，它的每一个顶点在五个圆中的一个圆上.

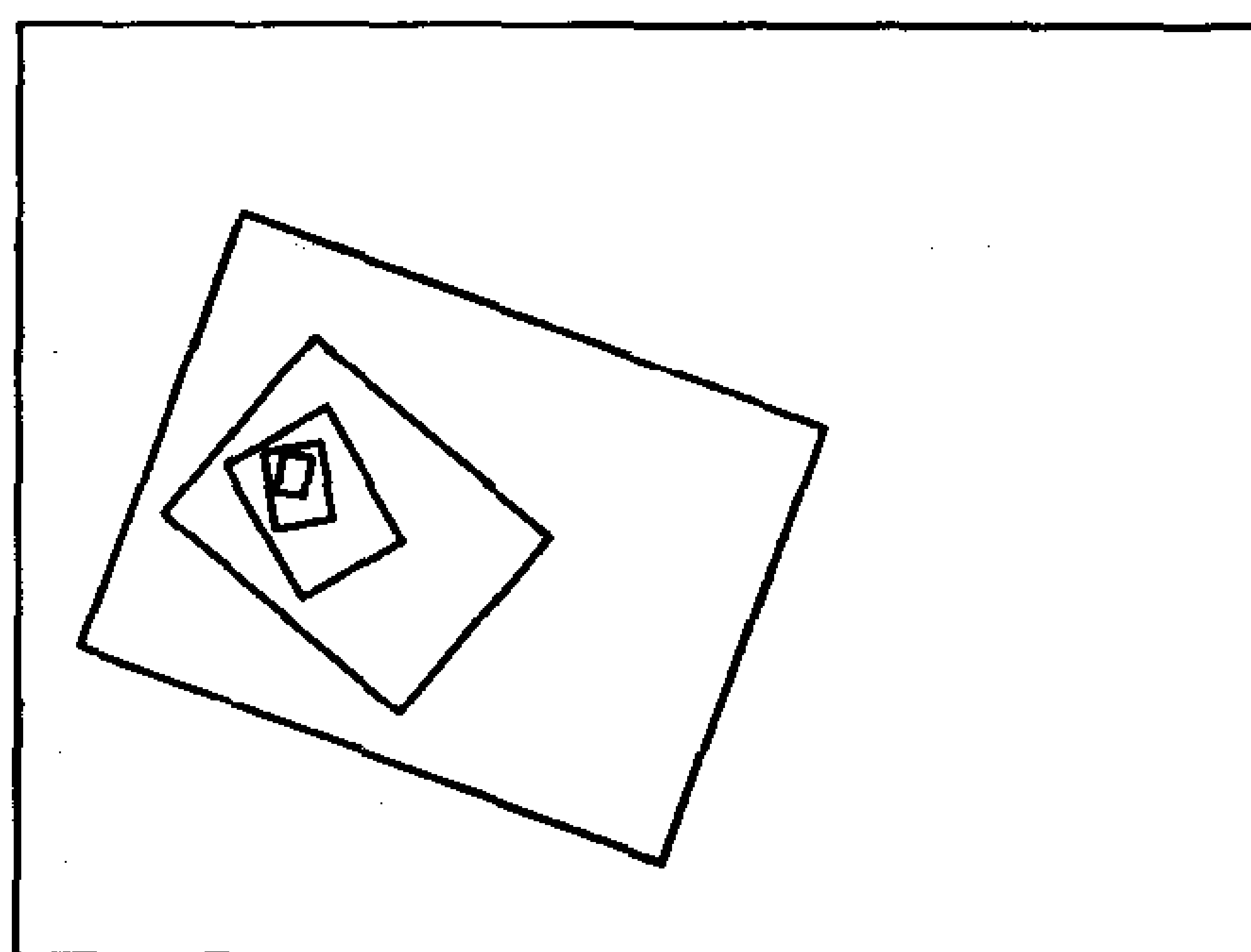


fixed point theorems　不动点定理

下图表示不动点定理的一个简单的例子. 有两张地图,其中一张放在另一张的上面. 它们表示同样的区域,但其中的一张大一些. 较小的一张可以认为是大的一张的缩小的结果. 不动点定理说的是小地图上有一点恰好落在大地图上的同一点上.



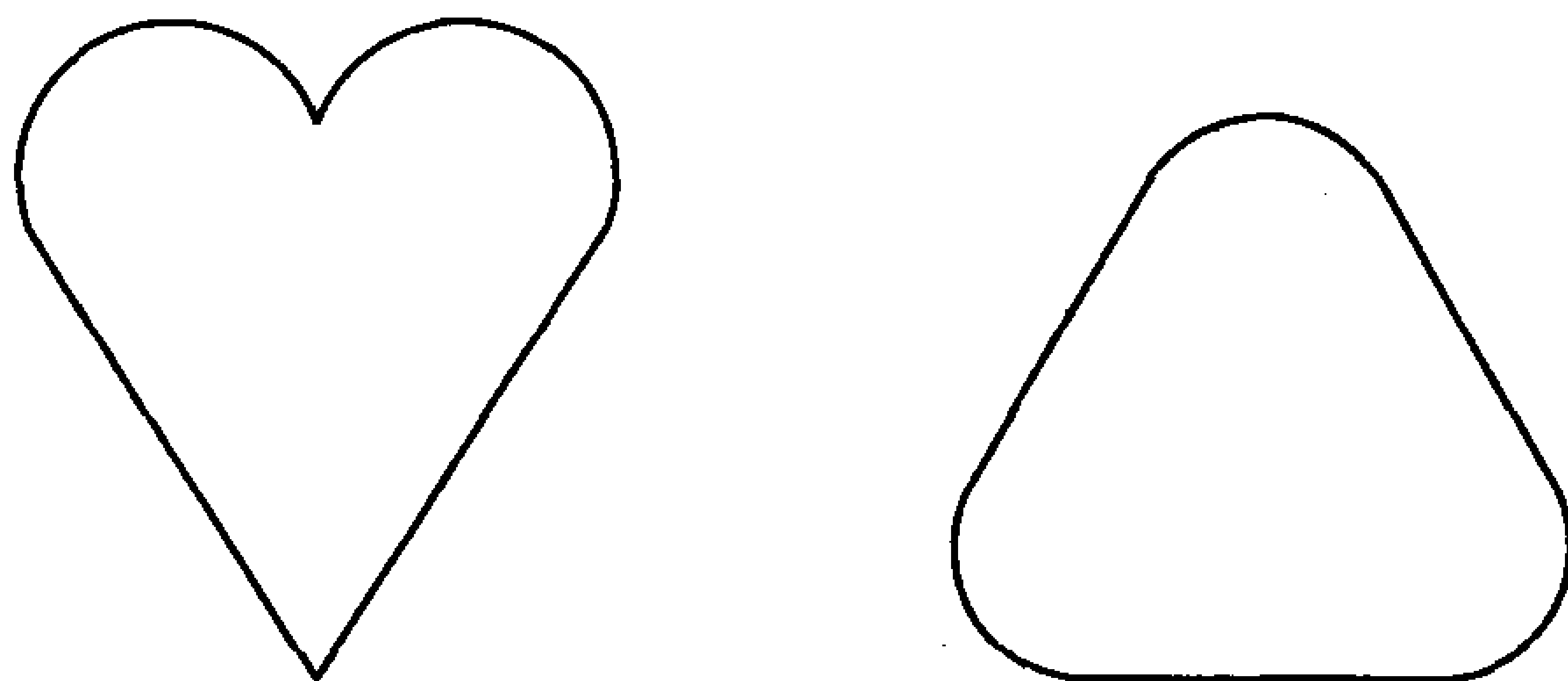
这一点(只能有一点)能够用画第三张地图找到,这张地图与小地图的关系和小地图与大地图的关系一样,然后再重复这一过程,这一系列地图趋向于一个极限点,这一点就是所求的点.



floating bodies in equilibrium　平衡状态下漂浮的物体

斯坦尼斯拉夫·乌拉姆(Stanislav Ulam)提了一个问题:球

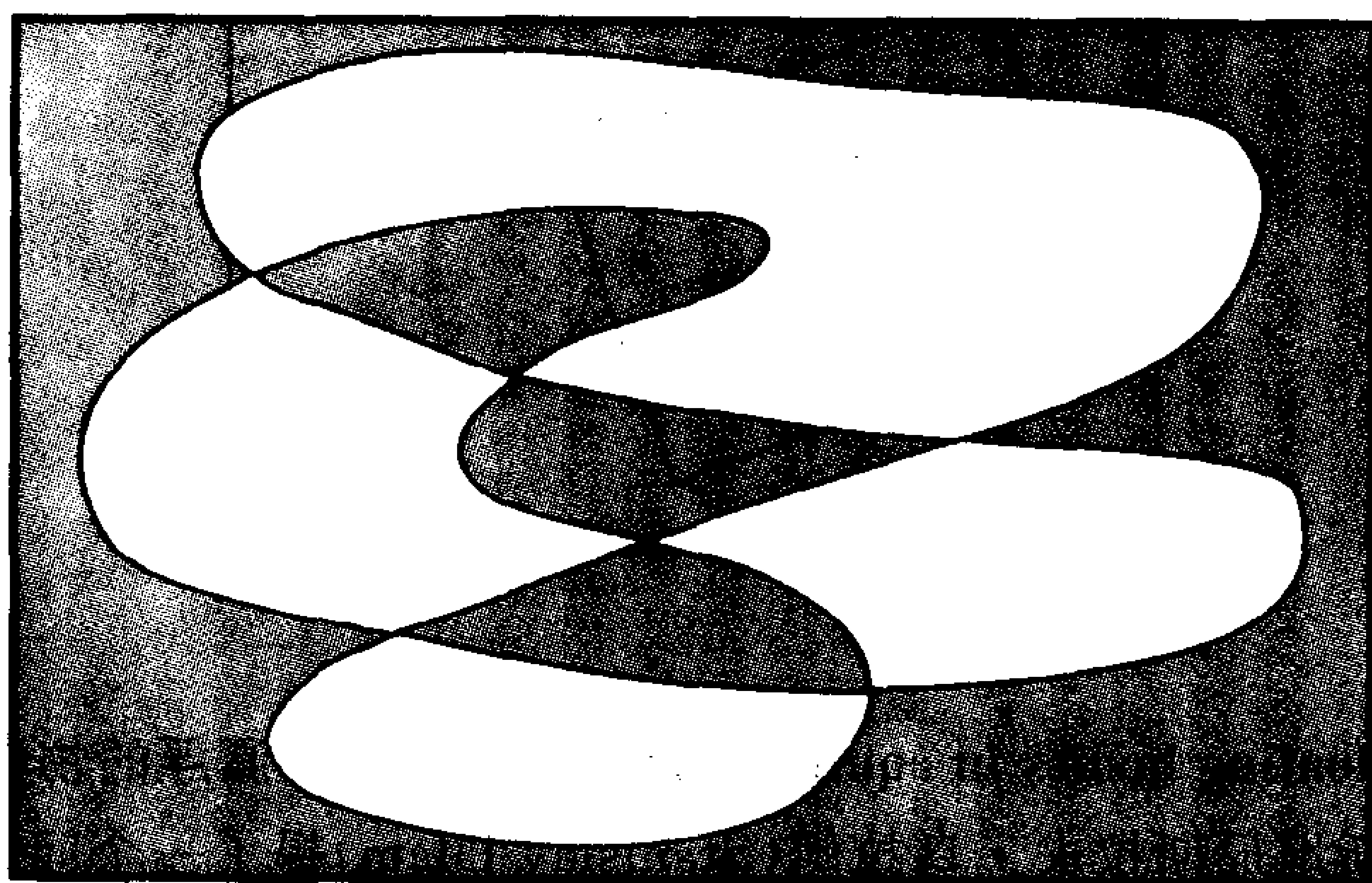
是不是以任何位置放在水里都能浮起，且具有均匀密度的唯一的物体. 在比较简单的二维的情况下，这一问题的回答是否定的！一个密度为 0.5，且以下面两个图形之一为横截面的柱体不管如何放在水上都将是浮的，且不会转动.



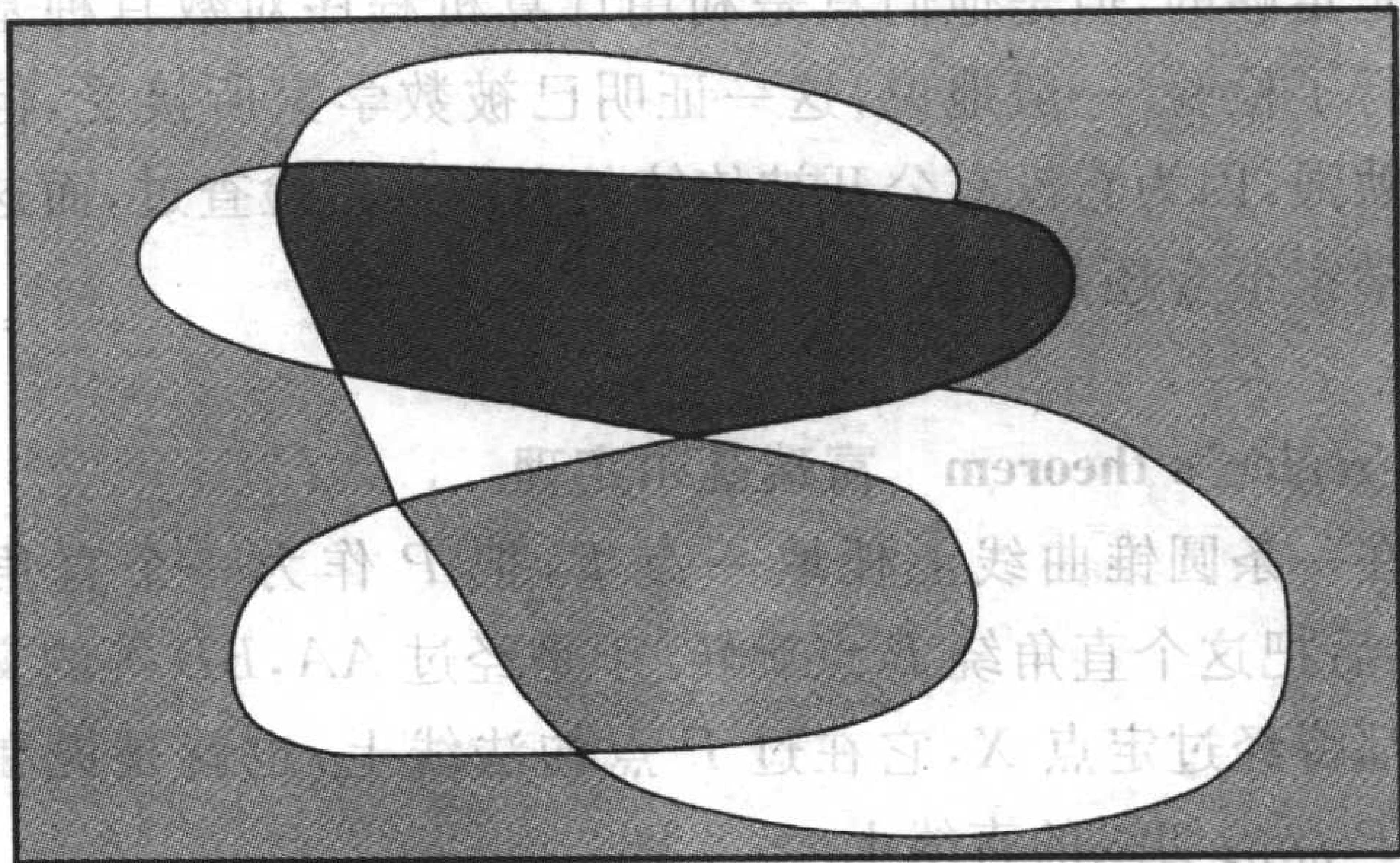
参考书：R. D. MAULDIN(ed.) *The Scottish book*, Birkhäuser, Boston, 1981.

four colour problem　四色问题

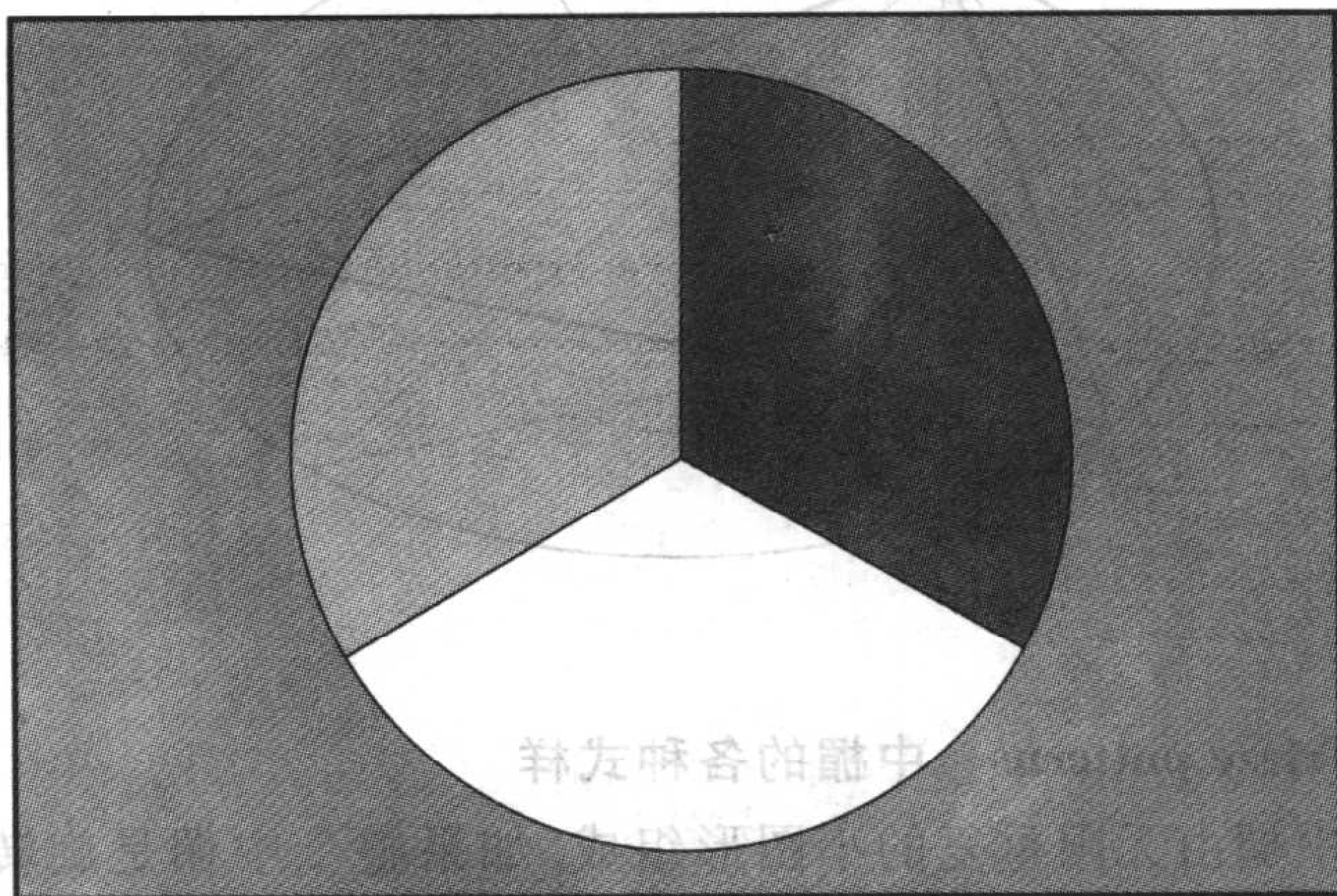
任何平面地图都可用至多四种颜色涂色，使具有共同边界线的任何两个区域的颜色不同. 能用连续曲线画出，笔不离开纸，并回到出发点的地图只需要两种颜色：



如果回不到出发点，那么需要三种颜色：



下面是需要四种颜色的最简单的地图：

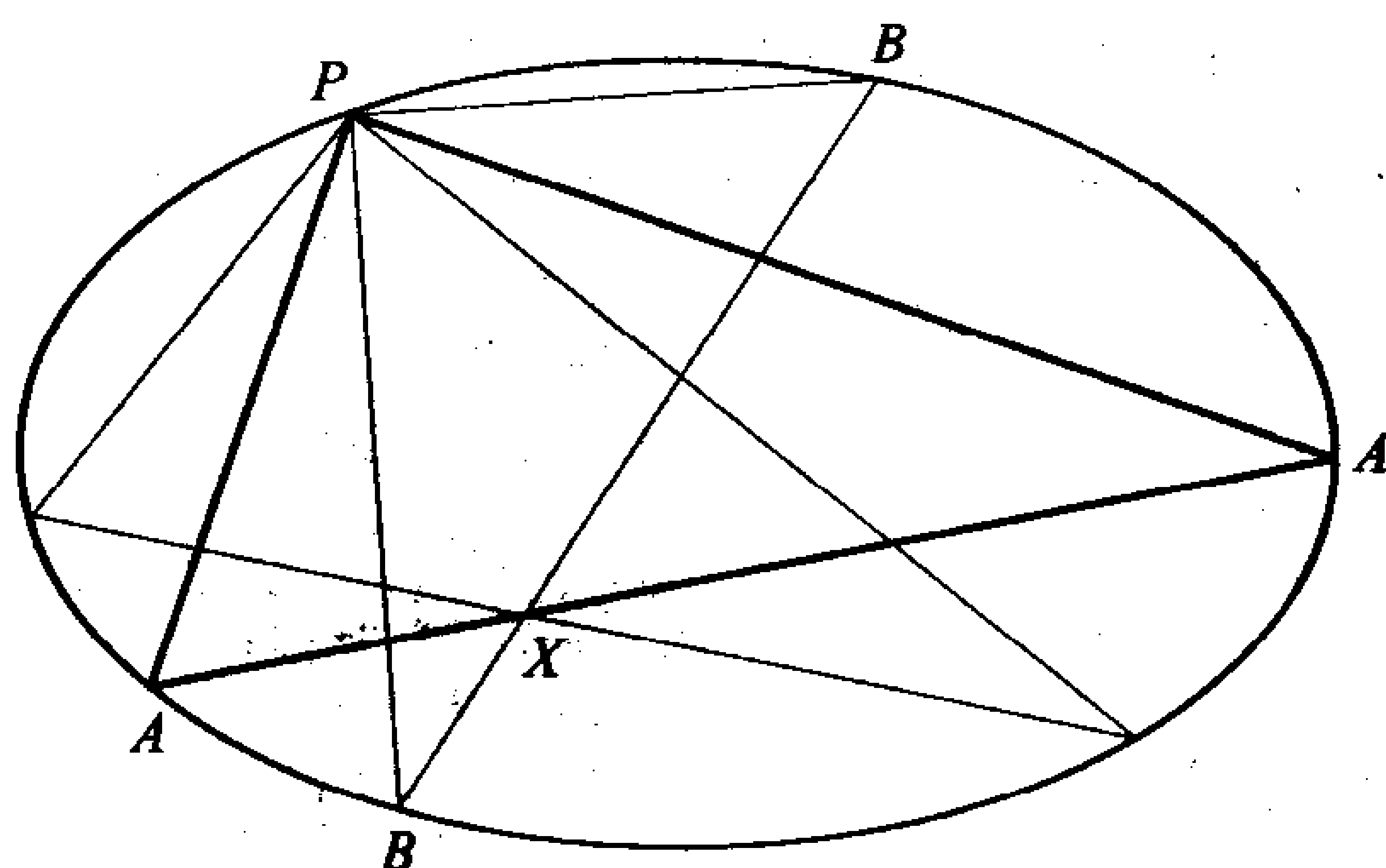


证明四种颜色已足够的问题有一个漫长而曲折的历史，包括坎普（Kempe）在 1879 年公布的“在整个数学中最著名的荒谬的证明可能是什么”在内．在以后的十多年中，人们一直相信它是正确的，直到希伍德（Heawood）在 1890 年指出它的破绽为止．

哈根(Haken)和阿佩尔(Appel)终于在1976年证明了四种颜色是足够的,但是他们只是利用计算机程序对数百种基本地图进行了检验.一般地说,这一证明已被数学家所接受,但是还比较勉强,因为它没有公开被传统的方法逐行检查过,而这一点是数学家至今还是承认的.

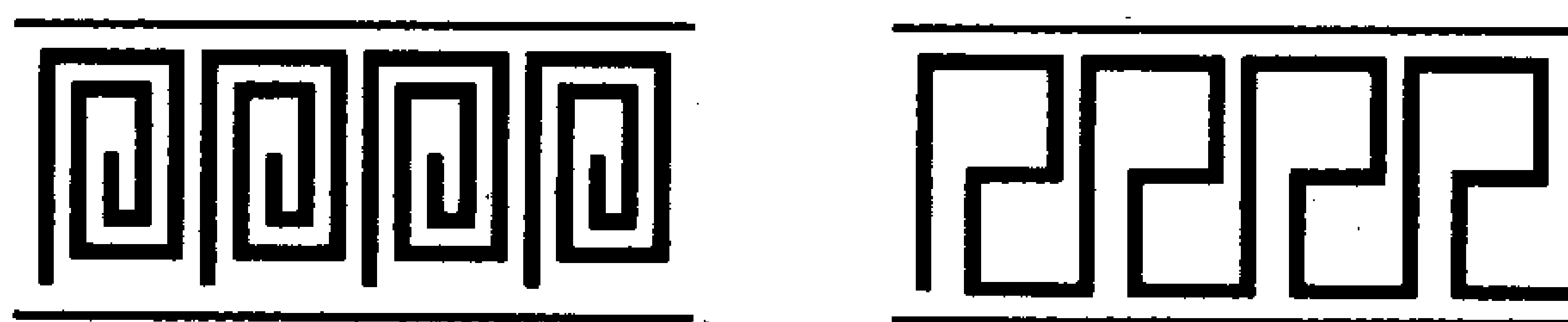
Frégier's theorem　富瑞基尔定理

在一条圆锥曲线上任取一点 P,把 P 作为一个直角的顶点,然后把这个直角绕 P 点旋转.于是经过 AA,BB 等的交点的直线都将经过定点 X,它在过 P 点的法线上,也就是说在垂直于过 P 点的切线的直线上.

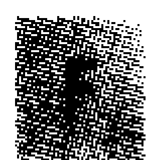


frieze patterns　中楣的各种式样

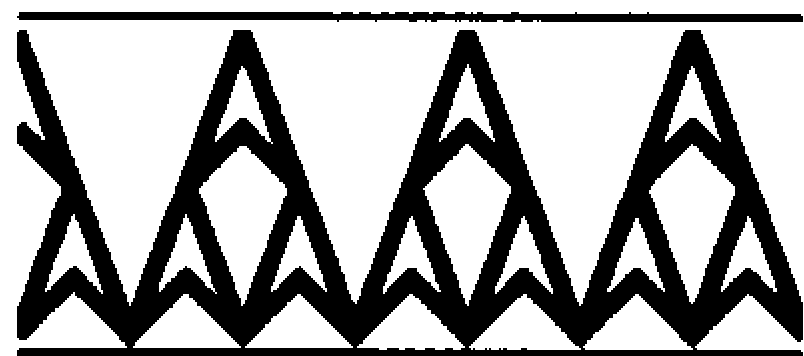
中楣由无限重复的小图形组成.如果整个中楣是旋转对称或反射对称的,那么组成它的小图形也具有同样的对称.

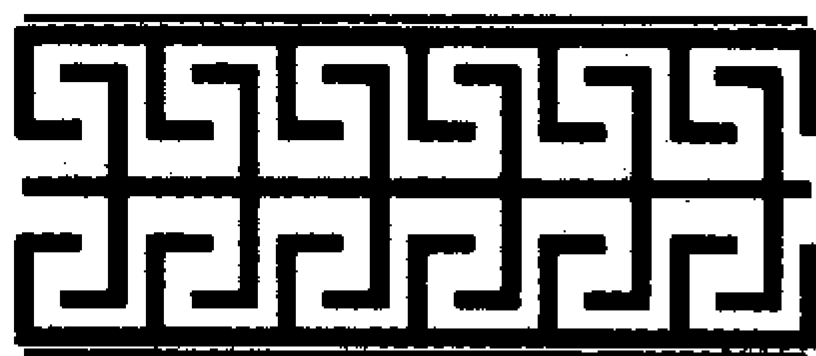


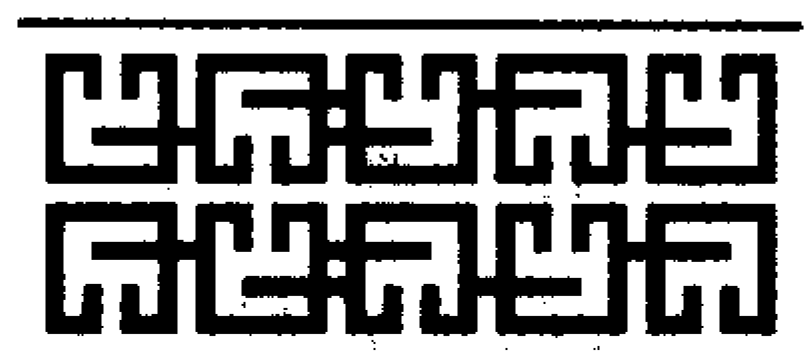
小图形可以没有任何对称性,可以具有关于水平线的对称,

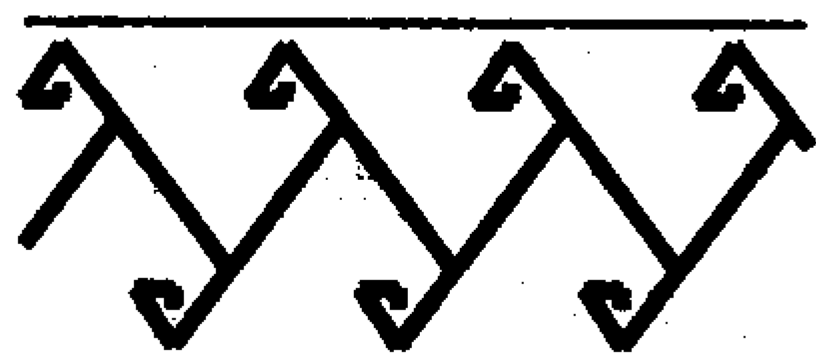


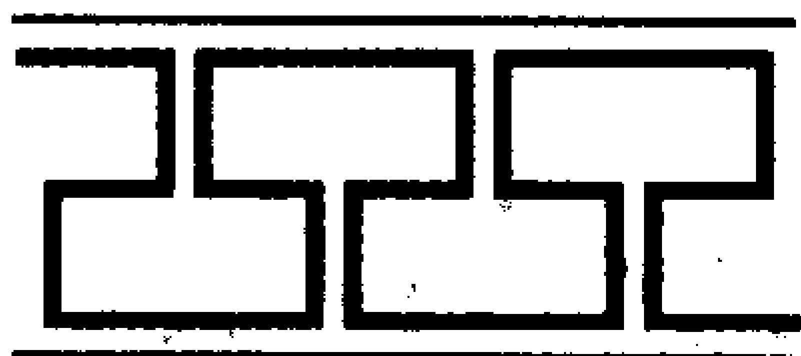
或关于铅垂线的对称，或同时关于水平线和铅垂线这两者的对称，或转半圈的对称. 当一个个小图形在中楣内连成一排时，小图形以滑动反射的形式沿中楣移动，同时还翻转，产生两种以上的可能性，一共作出七种类型的对称.

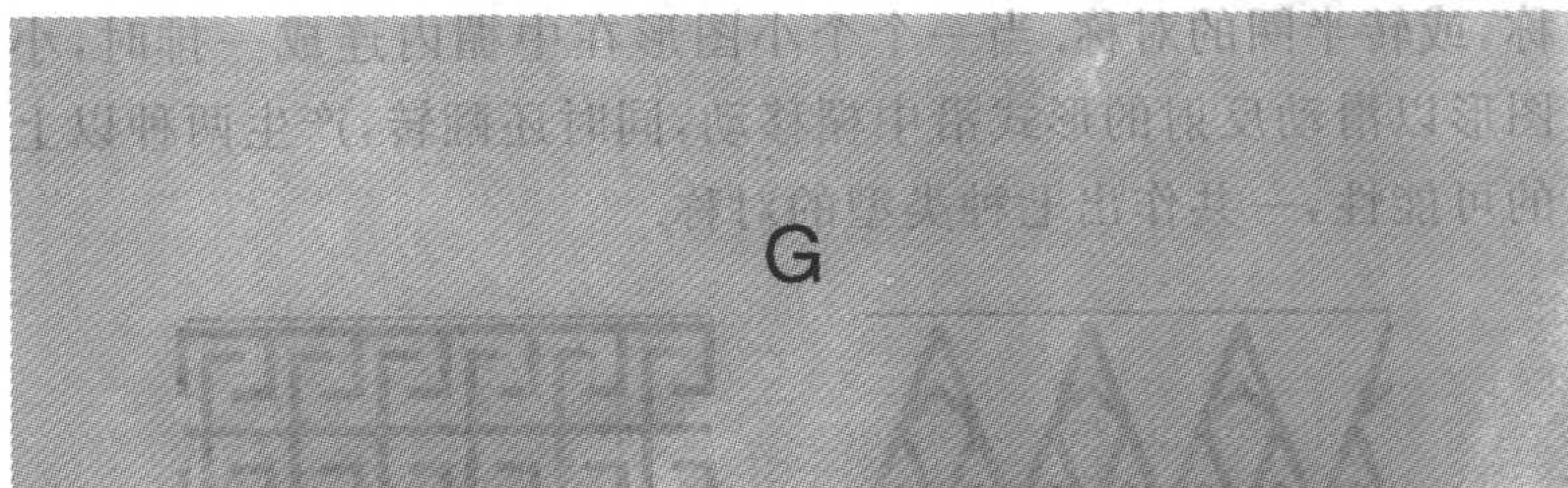






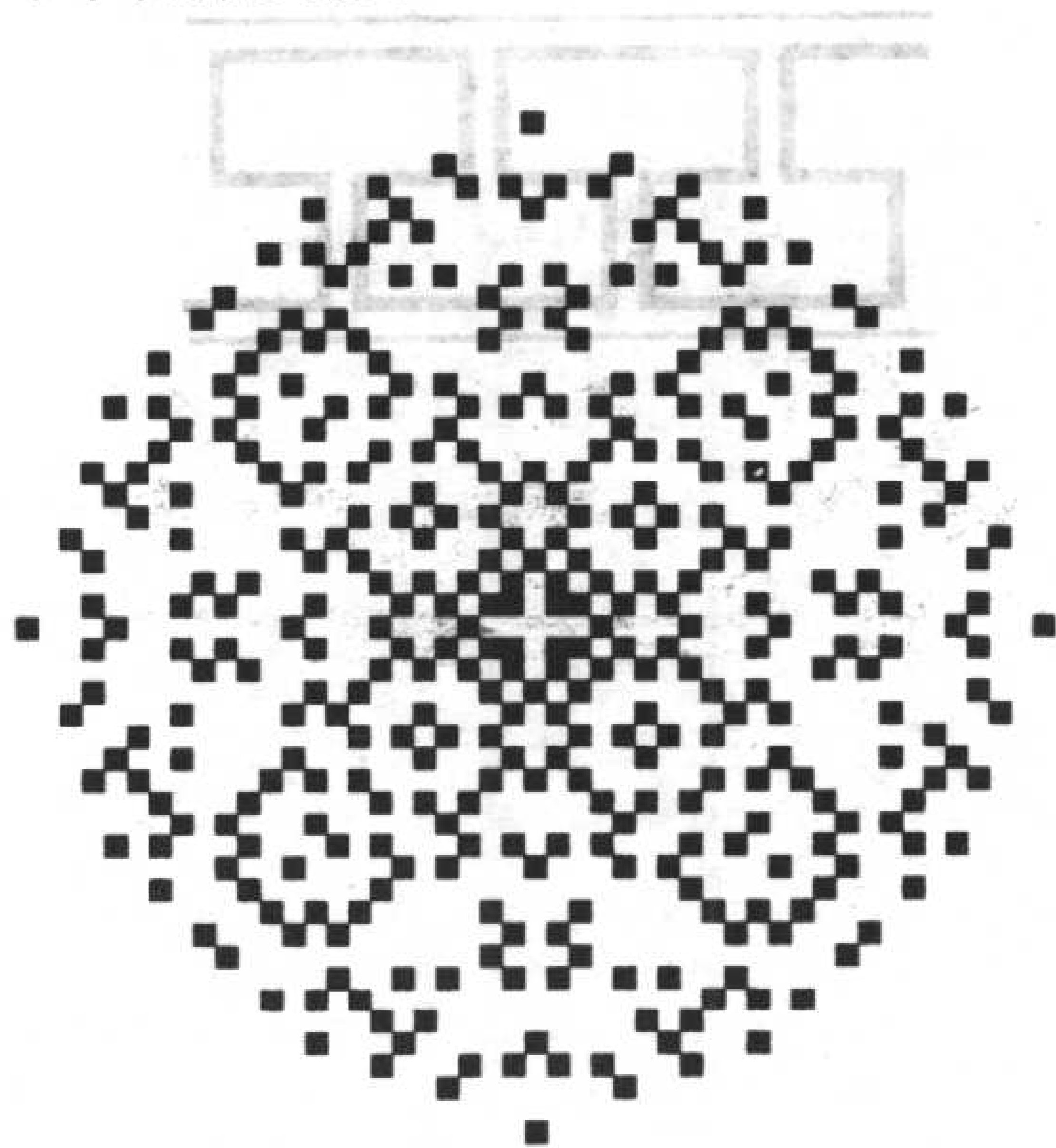






Gaussian primes　高斯质数

如果 p 和 q 是整数，那么 $p+iq$ 是高斯整数，这里 $i=\sqrt{-1}$. 高斯整数或者是这样的质数，它没有也是高斯整数的真约数，或者能分解为若干个高斯质数.



上图是模 $\sqrt{p^2+q^2}$ 小于 500 的高斯质数画在一张阿尔干德(Argand)图上的样式.

参考书：R. K. GUY，'*Unsolved Problems in Number Theory*'，Springer-Verlag，New York，1981.

geodesic dome　网格球顶屋顶

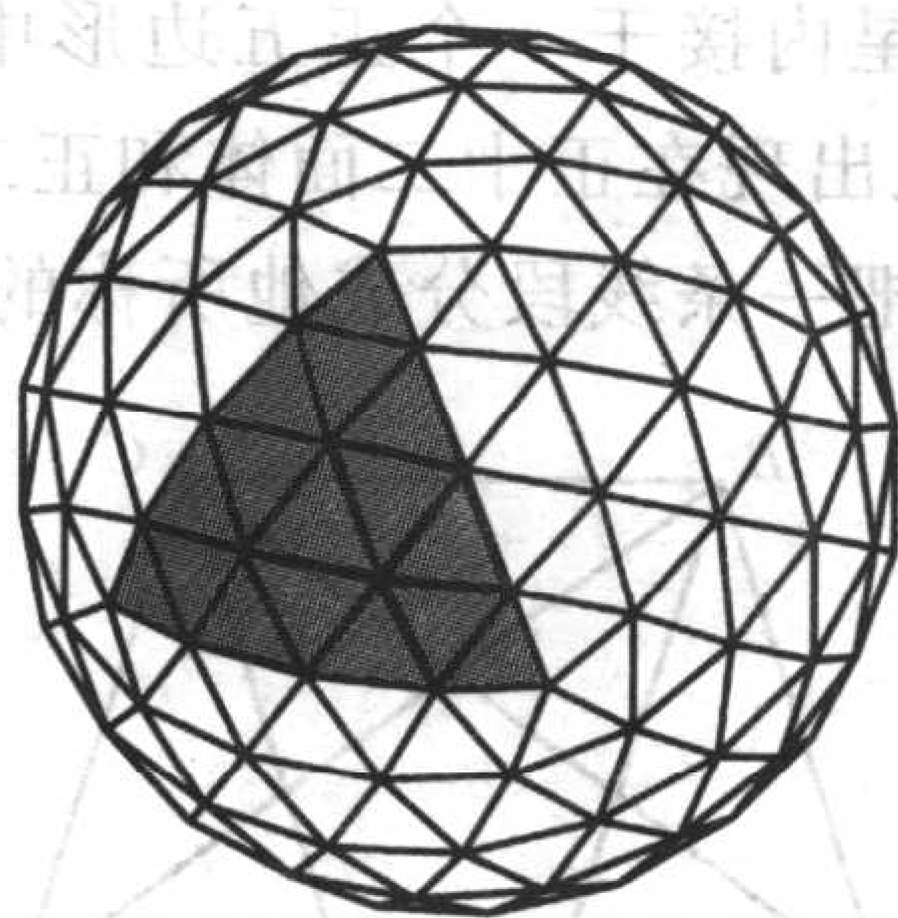
网格球顶式屋顶是工程师兼建筑家布克明斯特·富勒

(Buckminster Fuller)发明的.它的优点是能够把圆屋顶作为一个完整的结构直接放在地面上.在大小方面也很少受到限制.

这里有一个简单的例子.取一个正十二面体及其外接球.把每个面的中心升高到球面上,再用五条新的相等的棱把它与这个面的各个顶点连接起来.所得到的多面体有 60 个三角形的面,其中每个面都是等腰三角形,其各棱之比大约是 1∶1∶1.115.



如果不采用连接各个顶点和各个面适当升高后的中心的方法分成几个面,还可以先把各个面分成许多块三角形,再把各三角形的顶点升高到外接球上.下图中,二十面体的每一个面都由十六个较小的几乎是等边的三角形所构成.



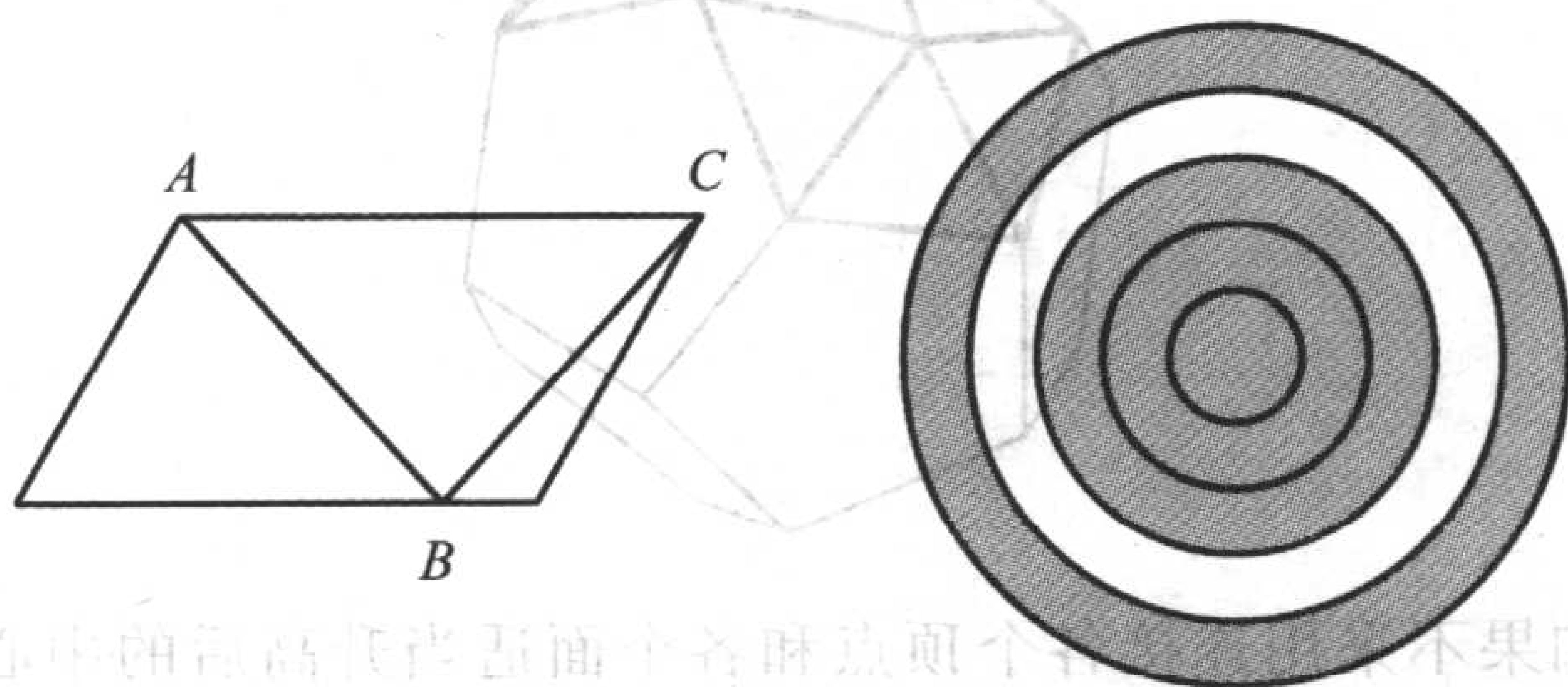
geometrical illusions　几何错觉

如果你画一张图,看上去它不会总是和实际同样的.在几何

上很正确的图看上去也可能有些不同,有些图看上去似乎正确的,但在几何上可能是错的.

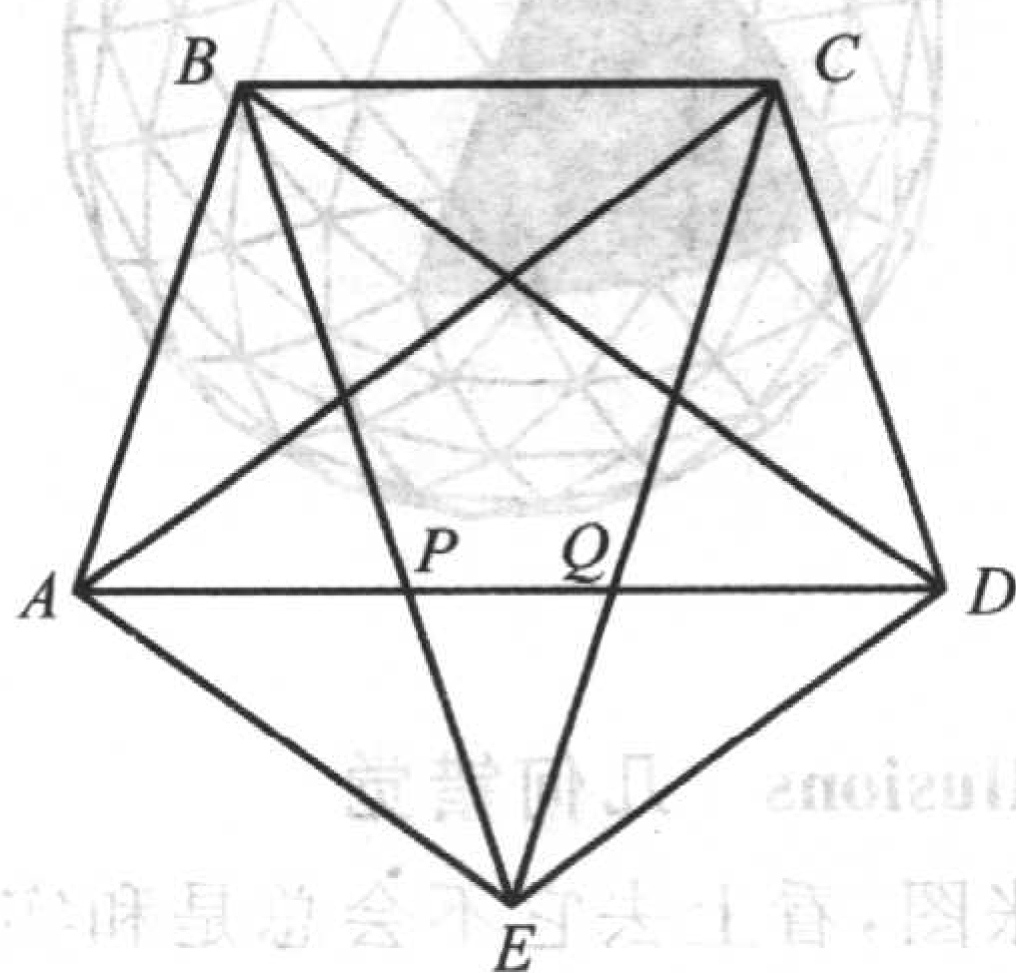
下面第一张图表示两条线段的长度似乎不等,但是度量表明 AB 和 BC 是相等的.

第二张图有两个面积相等的阴影部分,但是看上去中间的圆盘的面积要比圆环大. 容易证明它们的面积是相等的. 各个圆是用半径逐次增加 1 个单位画出的. 中间的圆盘的面积是 $\pi \cdot 3^2$ 平方单位,圆环的面积是 $\pi \cdot 5^2 - \pi \cdot 4^2 = \pi \cdot 3^2$ 平方单位.



golden ratio, golden section *or* divine proportion　黄金比,黄金分割或神妙的比例

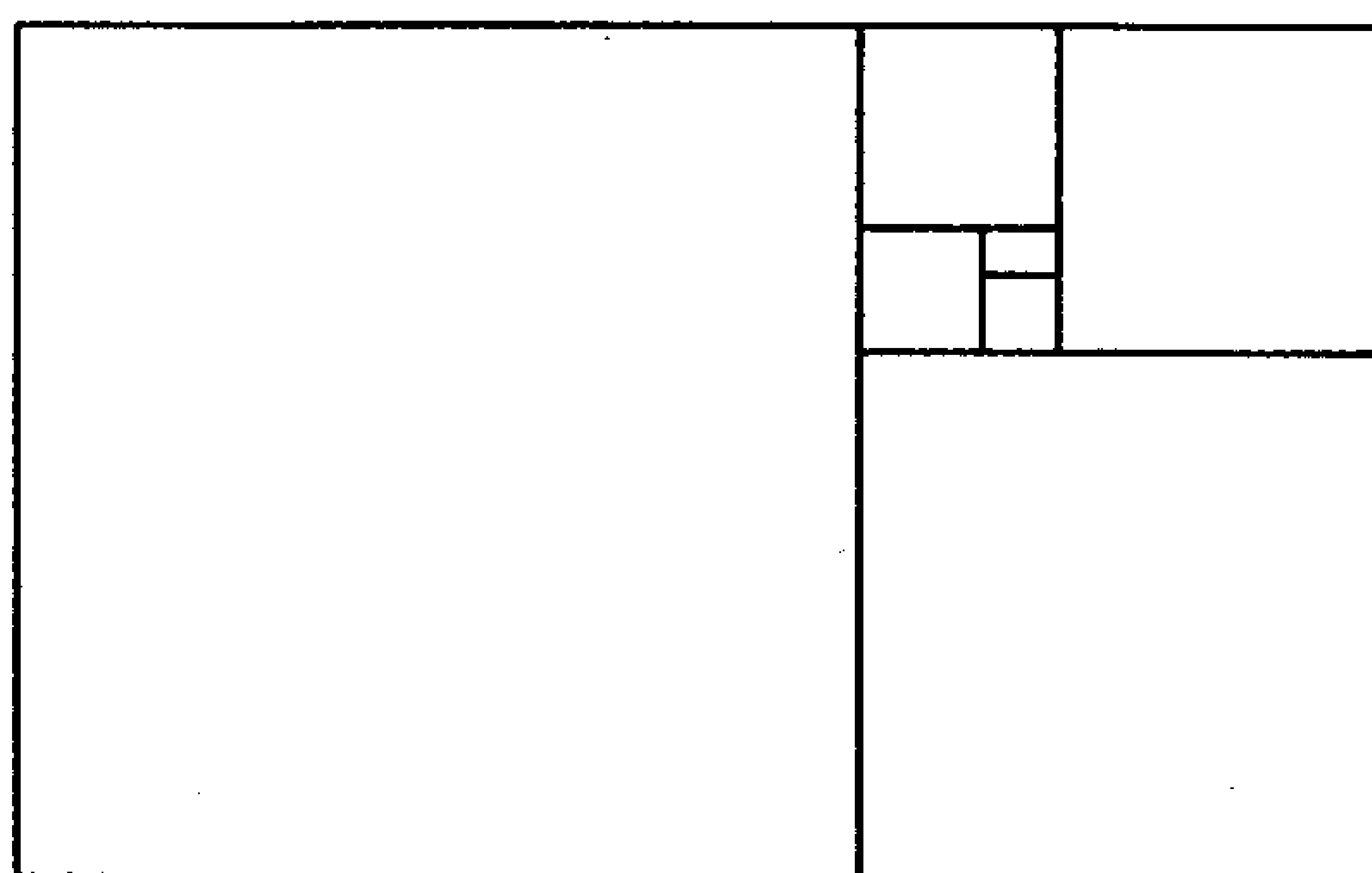
如果一个五角星内接于一个正五边形中,那么就自然出现黄金比. 同样的比也出现在正十二面体和正二十面体中,欧几里得曾用作图的方法把一条线段分成他所称的"中外比".



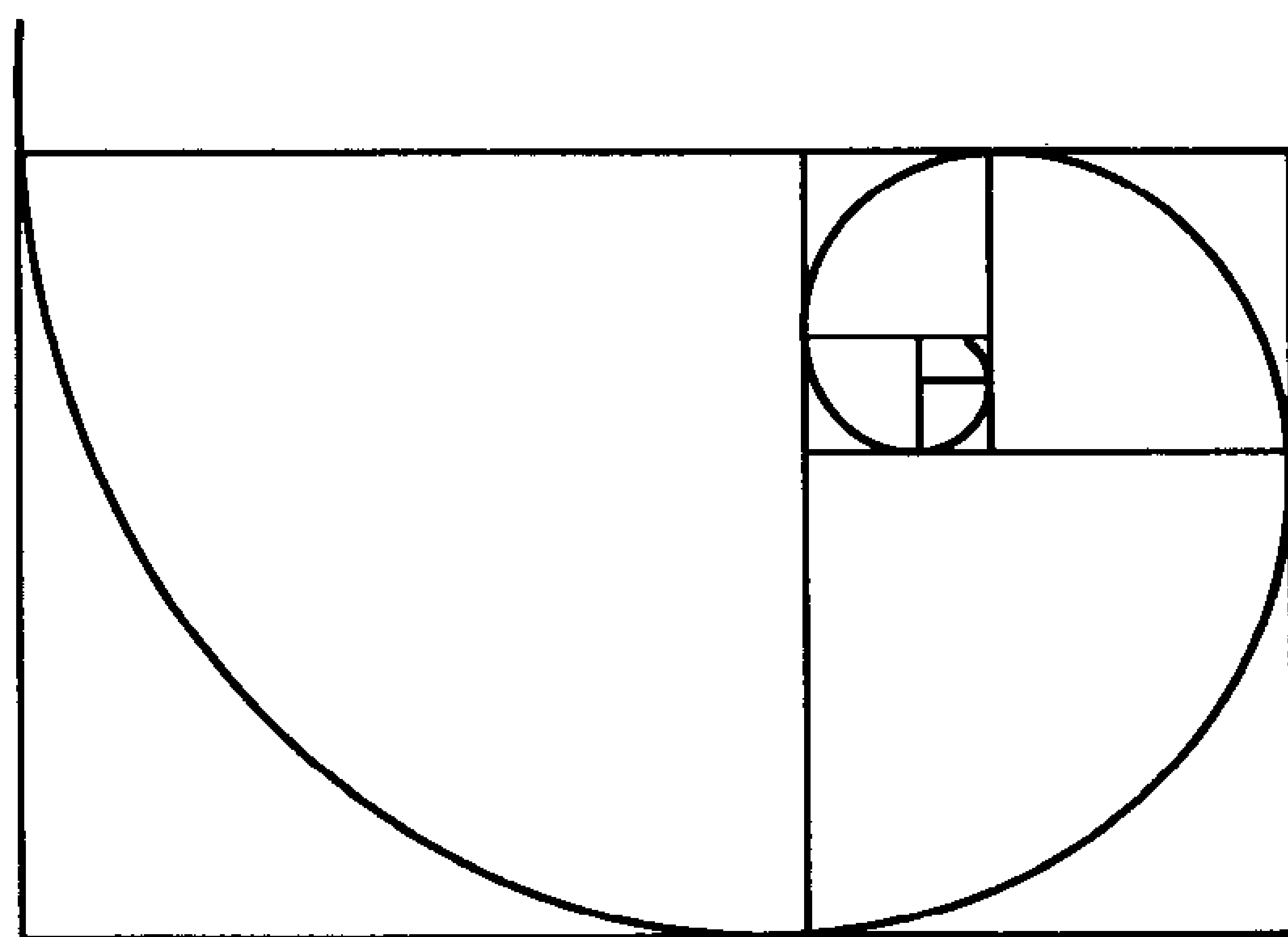
$\frac{AQ}{QD}$,$\frac{AP}{PQ}$和$\frac{AD}{BC}$这三个比都等于$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$,大约是 1.618. 常用希腊字母 ϕ 表示(有时用 τ 表示).

这个比有这样的性质:$\phi=\frac{1}{\phi-1}$,或用另一种形式表示:$\phi^2=\phi+1$.

于是邻边的比是这个比的"黄金矩形"可以分割成一个正方形和另一个同样形状的矩形. 这个过程可以无限重复下去.

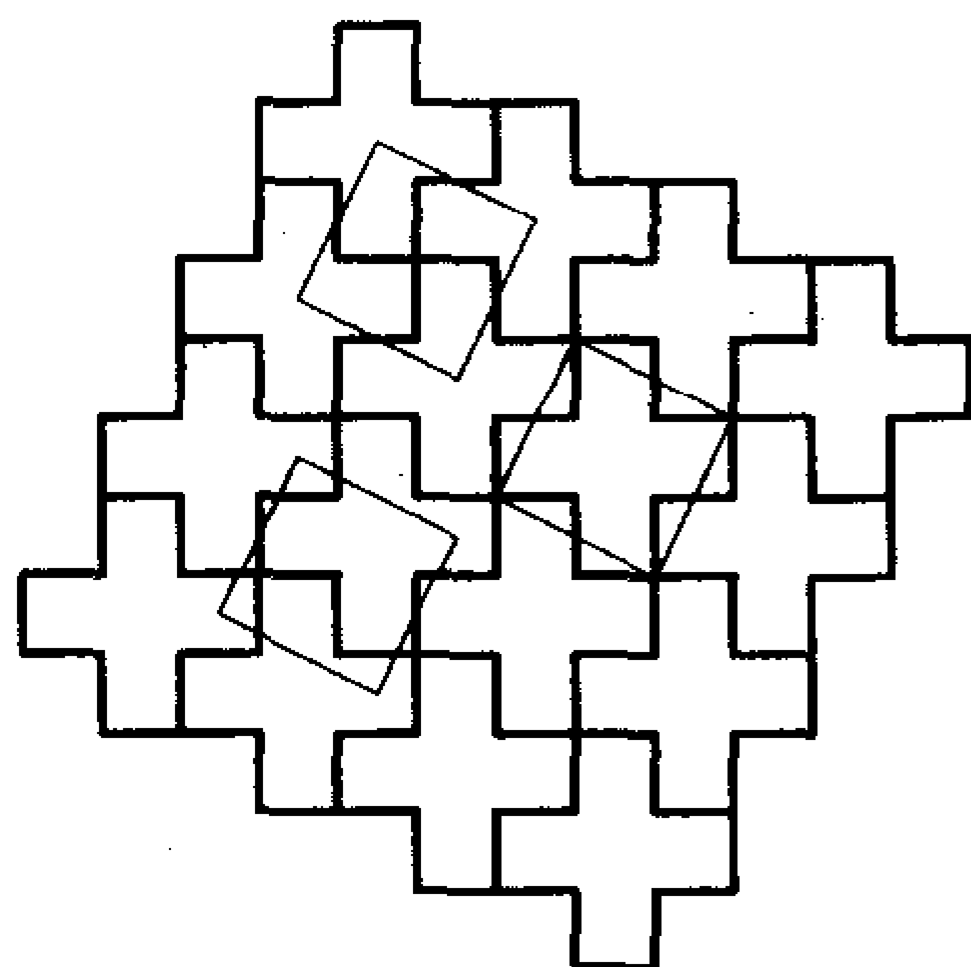


经过这些顶点可以画一个等角螺线. 一系列四分之一的圆是等角螺线的一个很好的近似. 真正的等角螺线实际上并不与矩形的边相切.

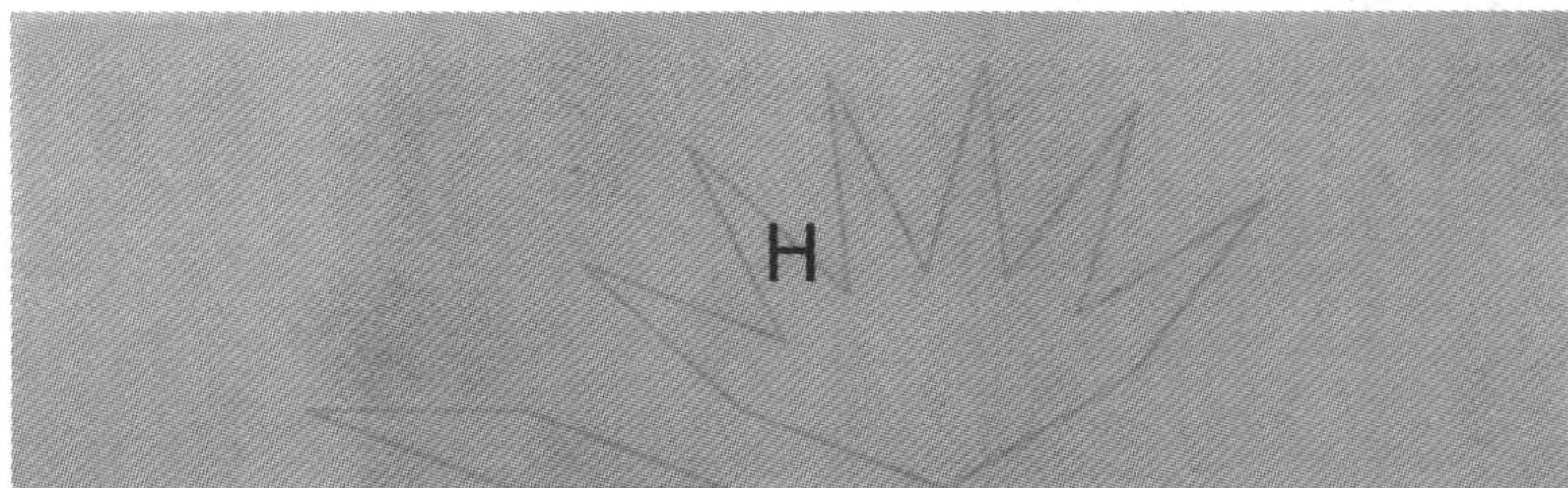


Greek cross tessellation and dissection　希腊十字镶嵌和分割

希腊十字以一种十分简单的方法进行镶嵌，它自然导致把无穷多个十字小块都拼成一个正方形. 在该镶嵌中任取四个对应点，就把十字分割成正方形了.

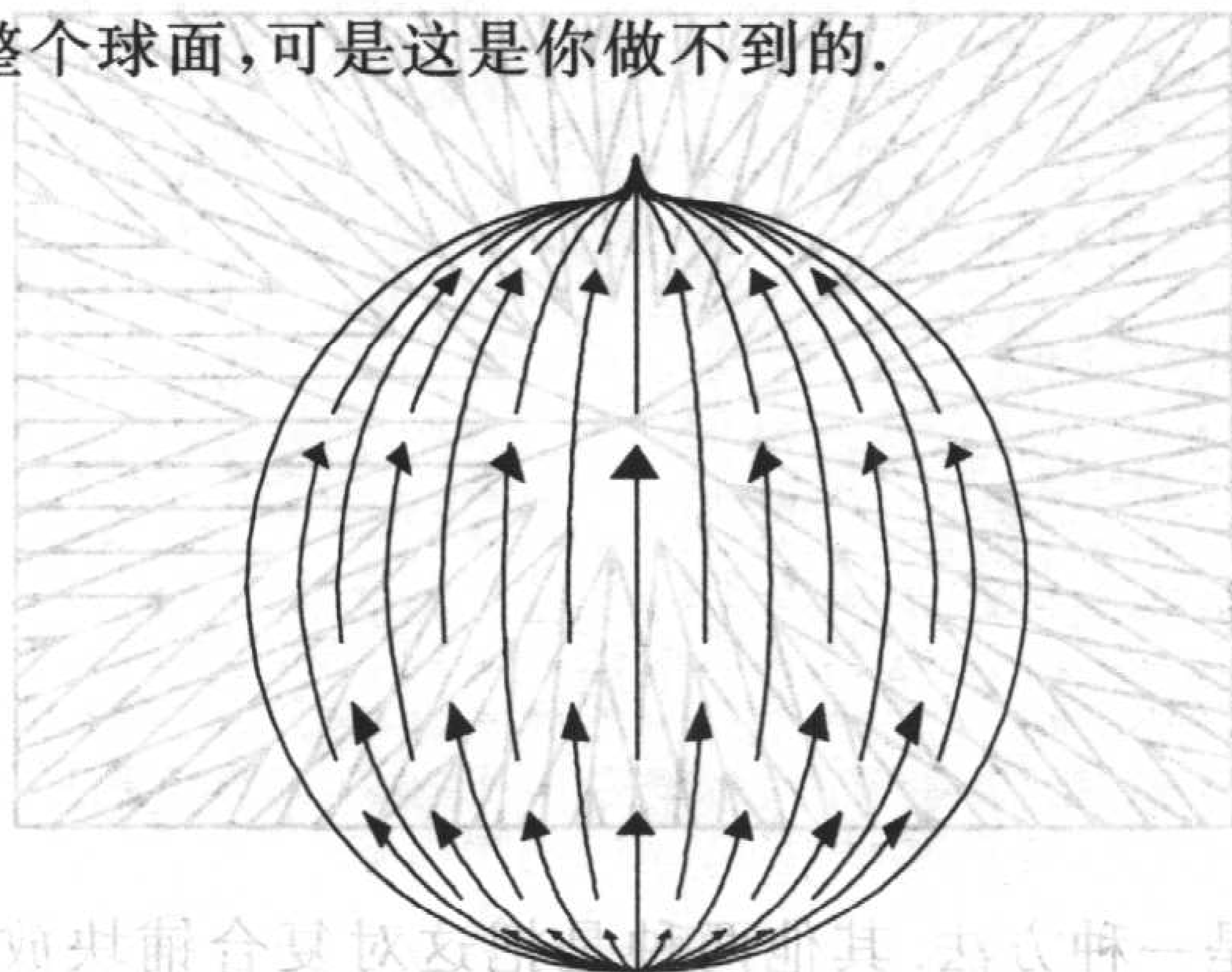


如此简单的一个必要条件是这个十字是由五个单位正方形组成，5 是两个整数的平方和：$5=2^2+1^2$. 但这条件并不是充分的. 所有其他的五连块（由五个边与边完全重合的同样的正方形构成的形状）都满足这一条件，但是只有一部分可得到类似的镶嵌.



hairy ball theorem　毛发球定理

这是不动点定理的一个例子. 假定你要梳理一个毛茸茸的网球,力图把它梳理得使绒毛都平贴在表面上,并且渐渐改变方向,覆盖整个球面,可是这是你做不到的.



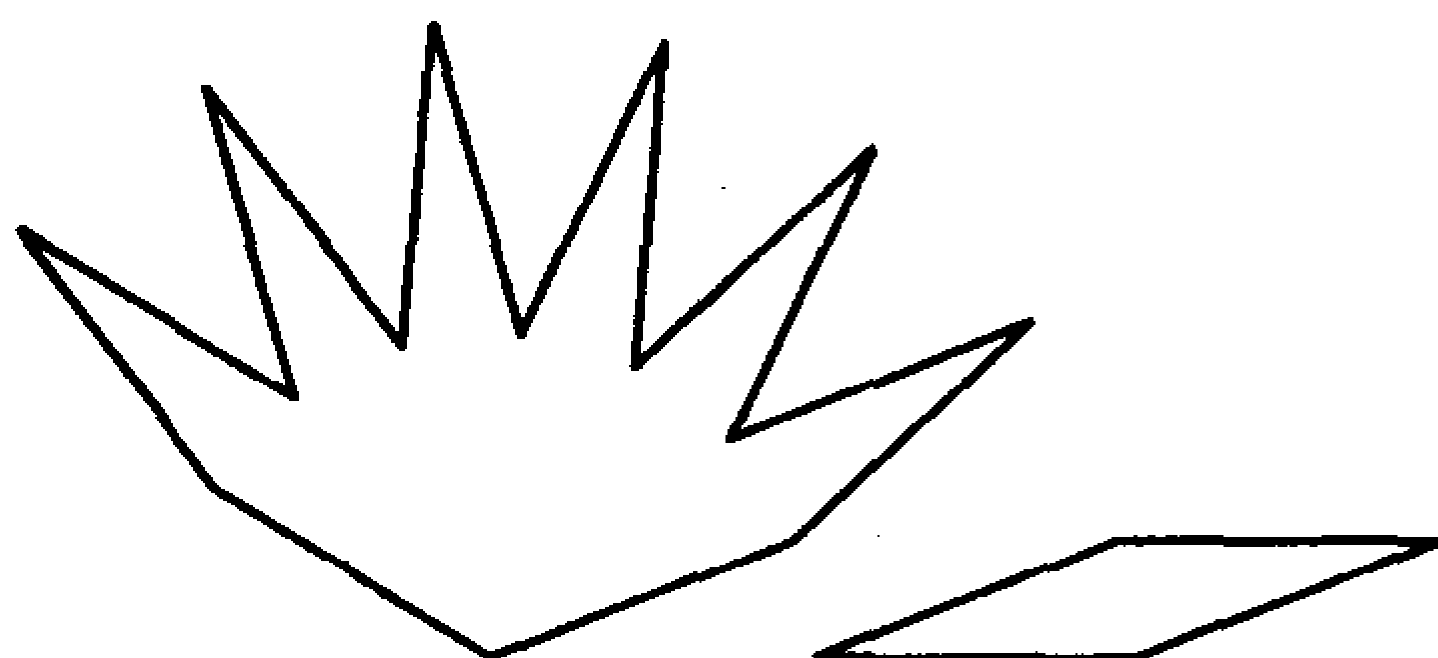
上图表示一个接近成功的例子. 你似乎是沿着经线方向从"南极"向上梳到"北极". 除了这两点以外整个表面平滑地被梳理,其中的一点出现一撮毛,另一点出现一个洞.

由于地球是一个球体,任何一点的风都有一个方向,就像空气在梳理地球的表面一样,结果总会在某处出现一个漩涡.

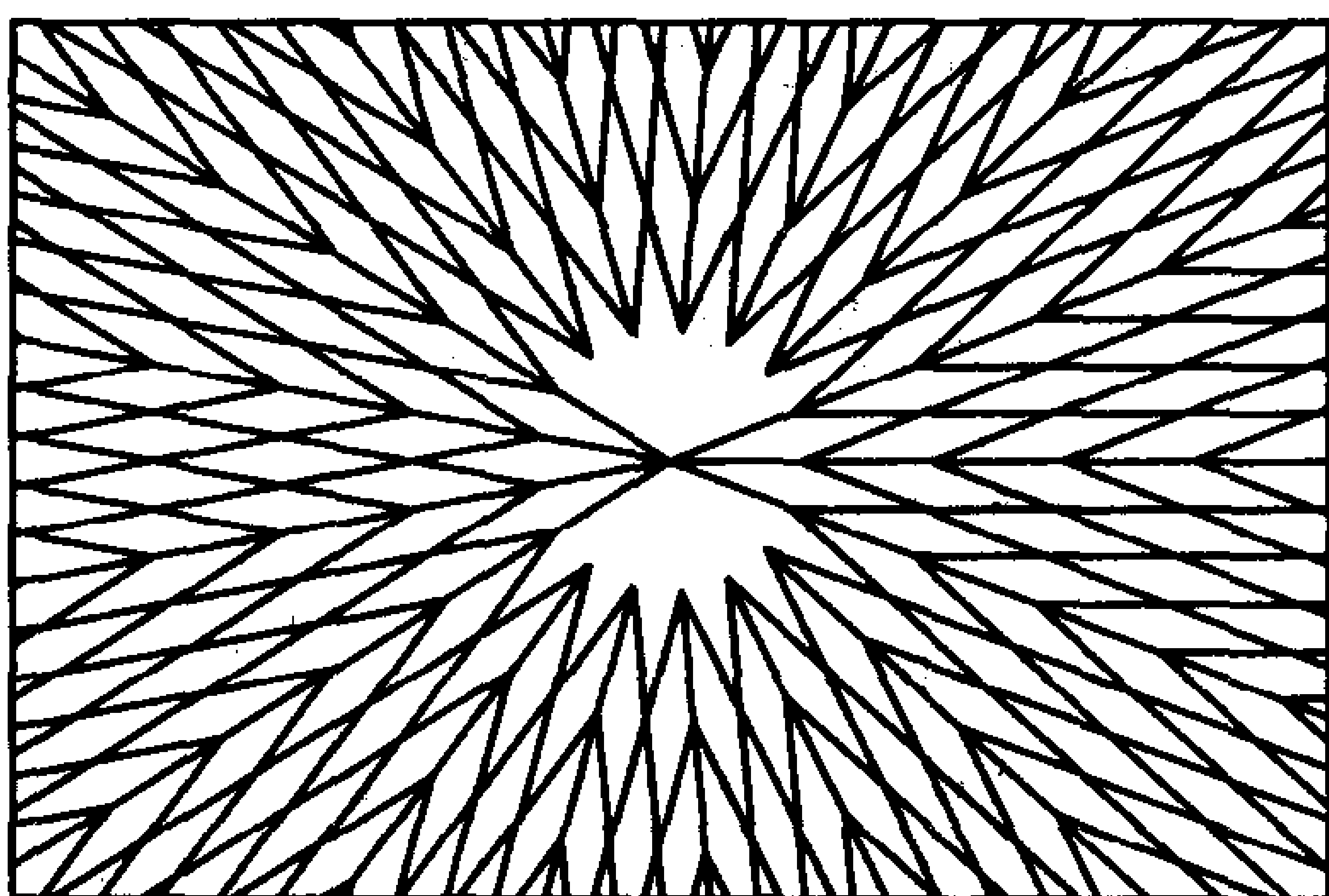
Harborth's tiling　哈尔勃斯铺砌

哈尔勃斯回答了这样一个问题:"是否存在这样的铺块,它

们恰好能用 N 种方法铺满整个平面?”



给出上述两种形状的铺块,一种是一个菱形,另一种是连在一起的六个菱形,使 17 个菱形固定在一点的周围,恰好有 4 种方法用这些铺块铺满整个平面.



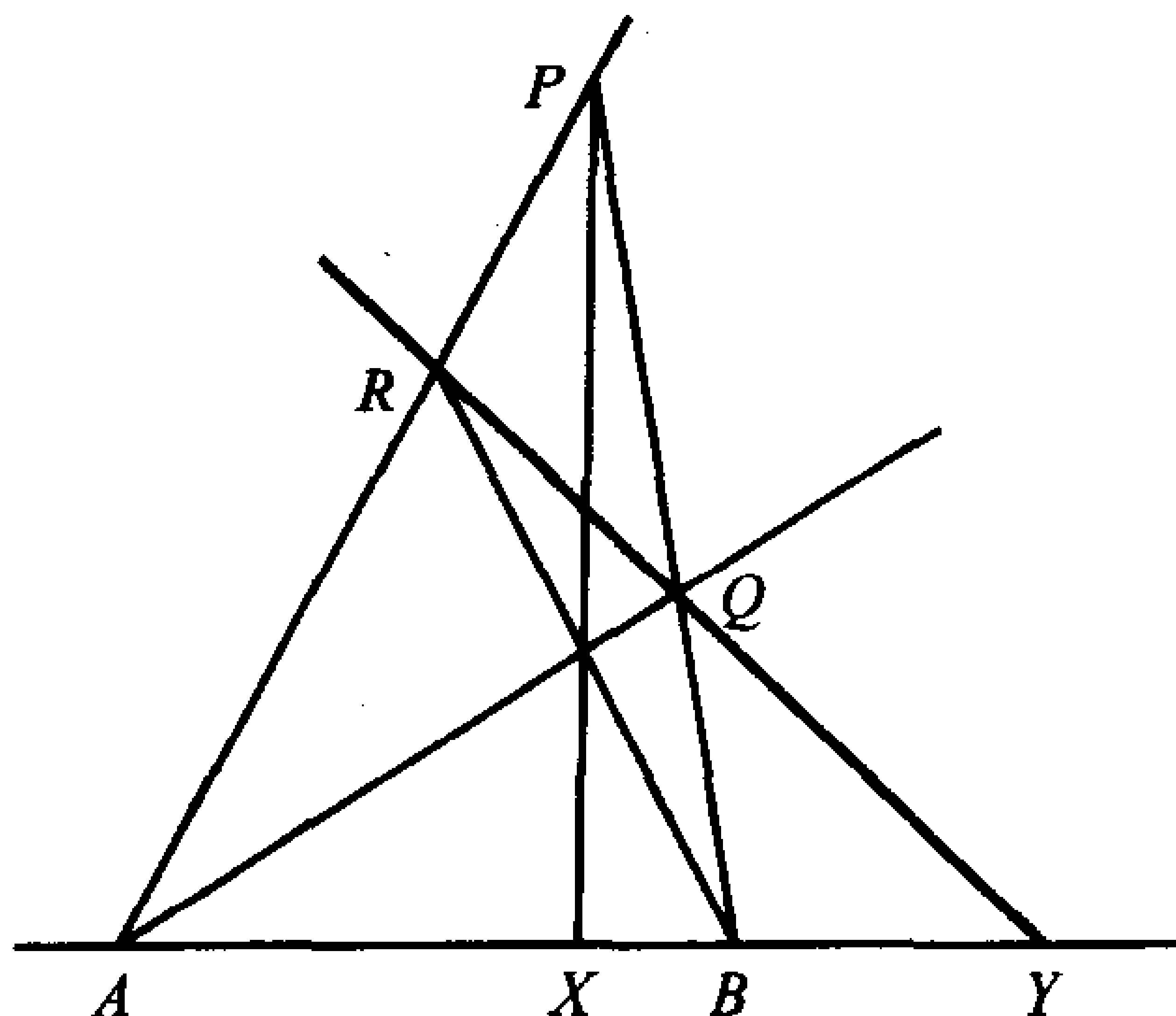
上图是一种方法.其他两种是把这对复合铺块放在相邻的位置拼合成的,或者用一个菱形和四个菱形隔开,第四种只用一块复合铺块.

为了作出用 n 种方法铺满整个平面的两种地砖,用围在一点四周的 $6n-7$ 个菱形.这种复合铺块由 $2n-2$ 个菱形围在一点的铺块周围拼成.

参考书:H. HABORTH, *Prescribed numbers of tiles and tilings*, *Mathematical Gazette*, No. 418, 1977.

harmonic ratio　调和比

任取 A,B 两点以及连接这两点的直线上的第三点 X. 分别过 A,B 作直线，相交于点 P，再作直线 AQ 和 BR 相交于 PX 上. QR 截 AB 于另一点 Y，它的位置只与 A,B,X 的原来的位置有关，与 P,Q,R 的选择无关.



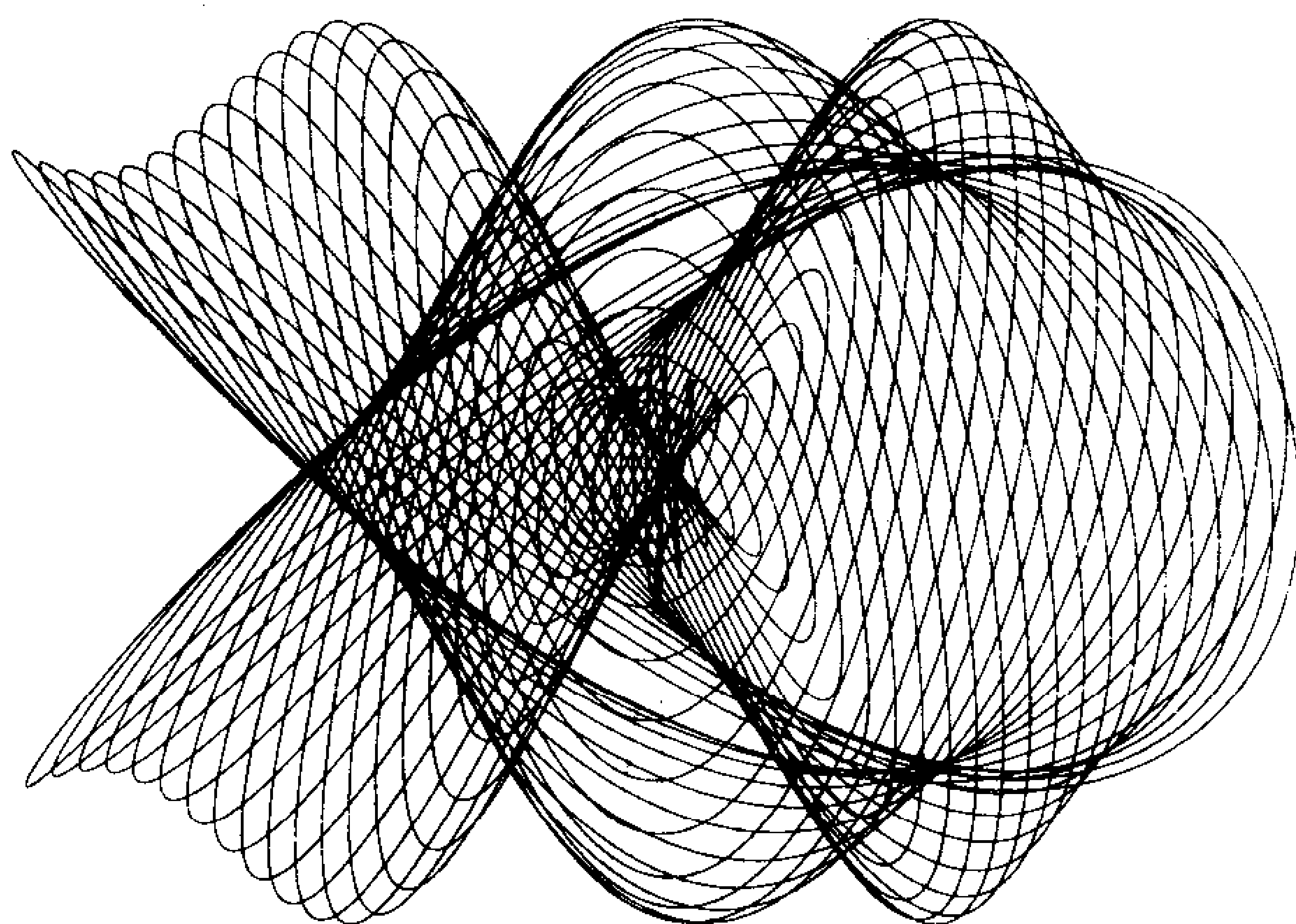
此外，A,B,X 和 Y 的交比等于 -1：

$$\frac{AY \cdot XB}{YB \cdot AX}=-1 \text{ 或者} \frac{AY}{YB}=-\frac{AX}{XB}.$$

这里取负号是因为 BY 是与另一些长度以相反的方向量出的. X 和 Y 称为关于 A 和 B 的调和共轭. 反之，A 和 B 称为关于 X 和 Y 的调和共轭.

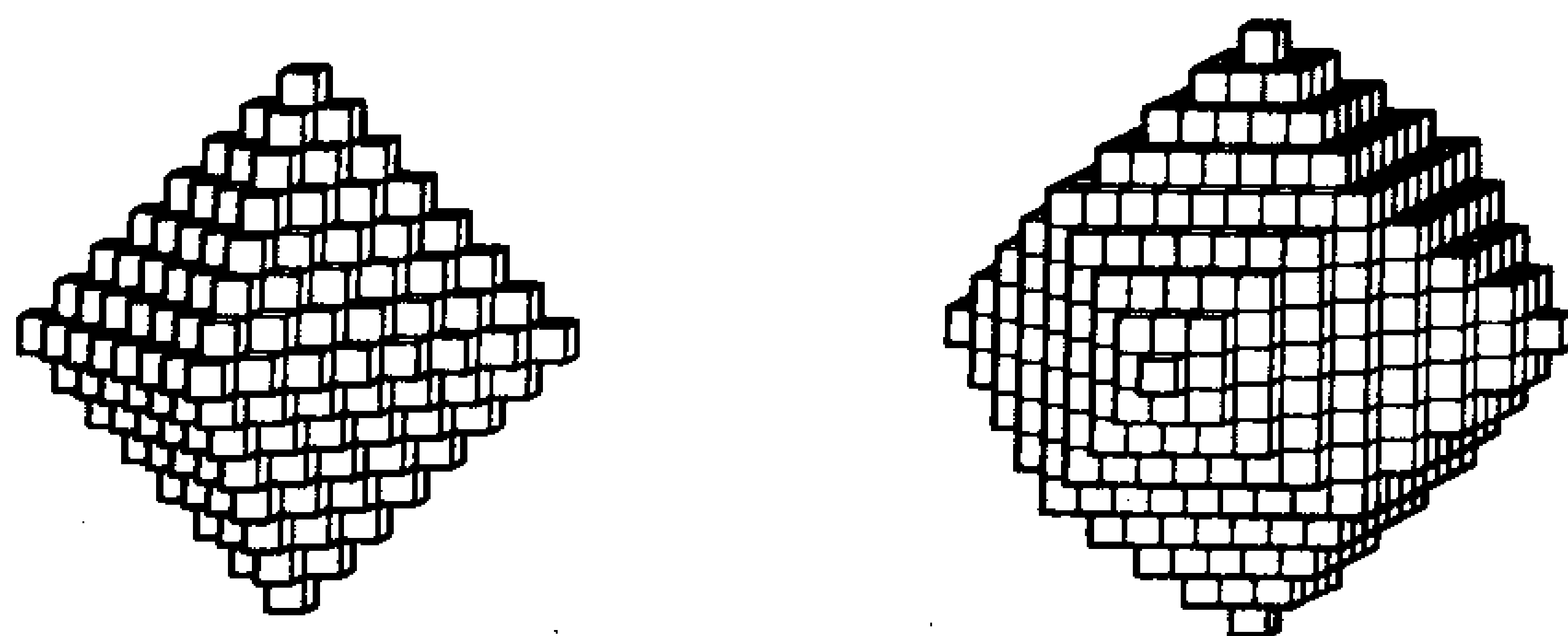
harmonograph　调和图

这一维多利亚时代的古老的消遣每隔一些年就被有胆识的生产商恢复. 最简单的方式是需要两个摆，其中一个摆移动铅笔，另一个移动贴有纸张的桌子，这两个摆的合成的效果产生一种复合运动，这一运动由于磨擦的影响而逐渐减弱. 因此在每一圈中，每一条痕迹偏离前一圈一段很小的距离，整个运动最终趋向于一点.



Haüy's construction of polyhedra　豪易构造的多面体

1784 年阿培·勒内-杰斯脱·豪易(Abbé René-Just Haüy)发表了一篇题为"晶体结构在各类晶体物质中的应用的理论"的论文,在该论文中他曾设想对一种基本的单位进行有规律的复制怎样才能构成某些晶体.下面两图表示豪易巧妙地用小正方体构件作成的正八面体和菱形十二面体.

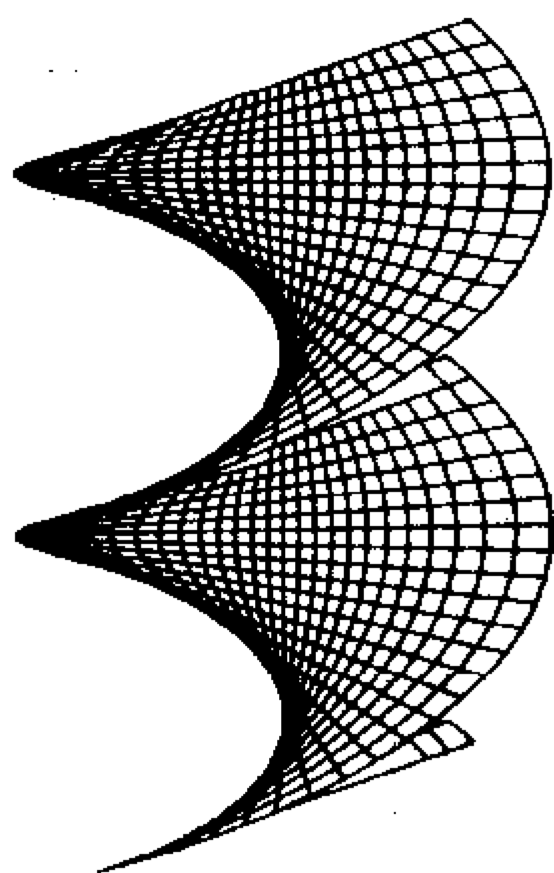


欧几里得在《几何原本》第八卷中利用正方体和五边形的正十二面体之间的同样的关系作出了一个正十二面体.

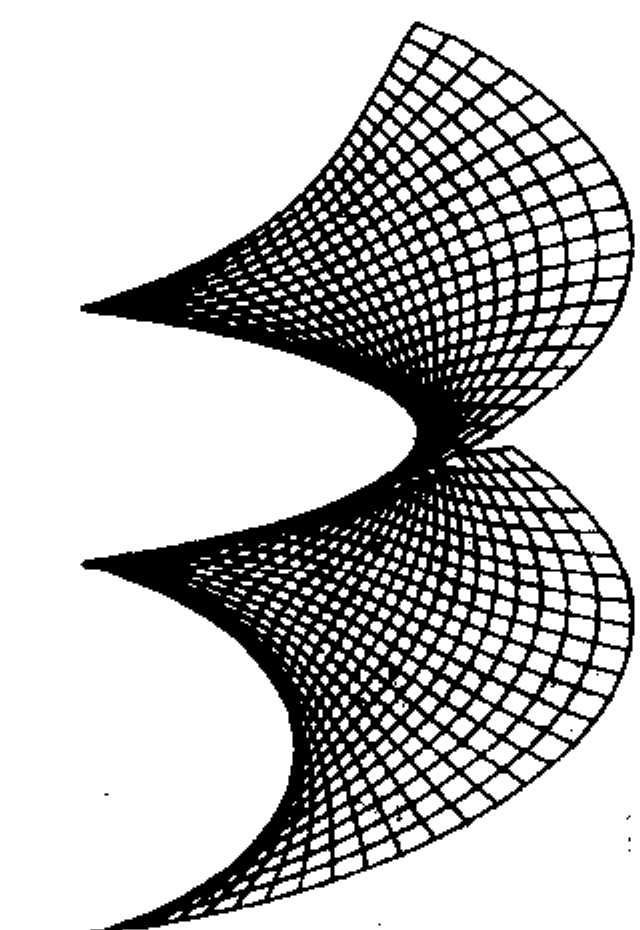
helicoid　螺旋面

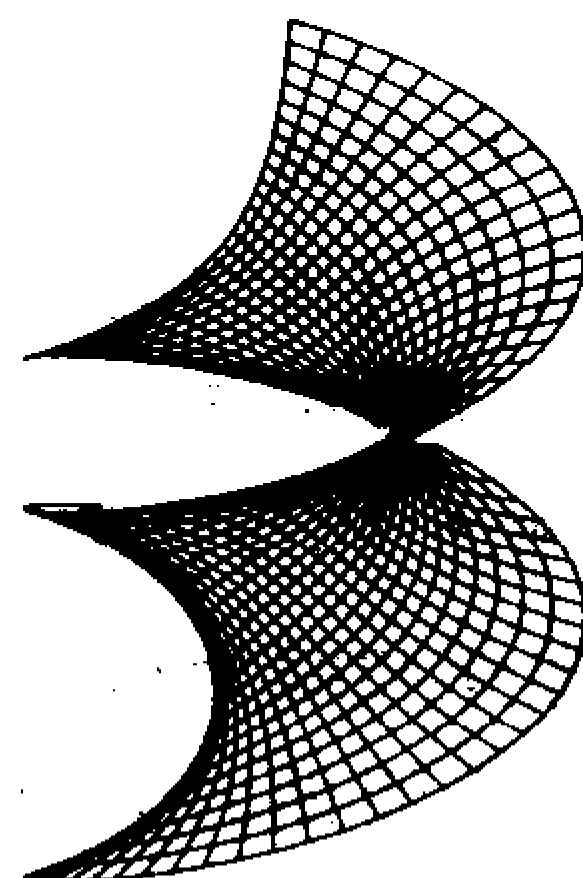
当一条直线绕着一条垂直于它的轴作螺旋运动时就扫出一

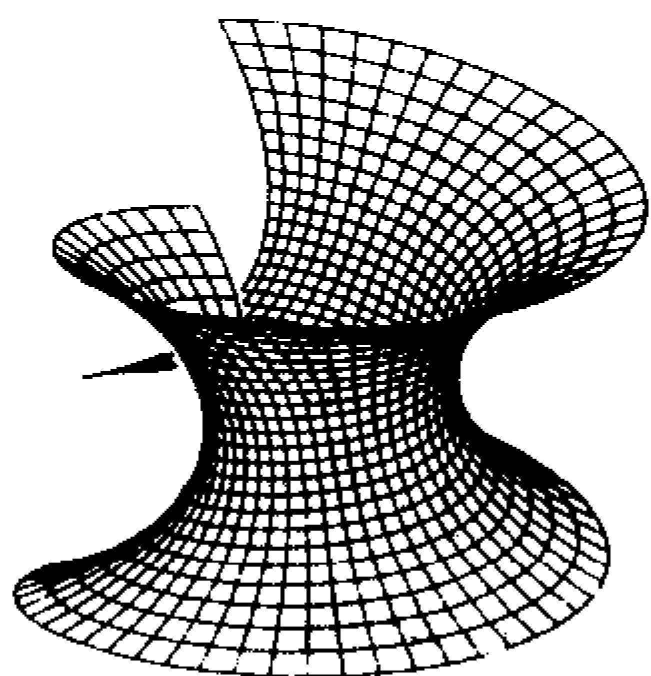
个螺旋面.

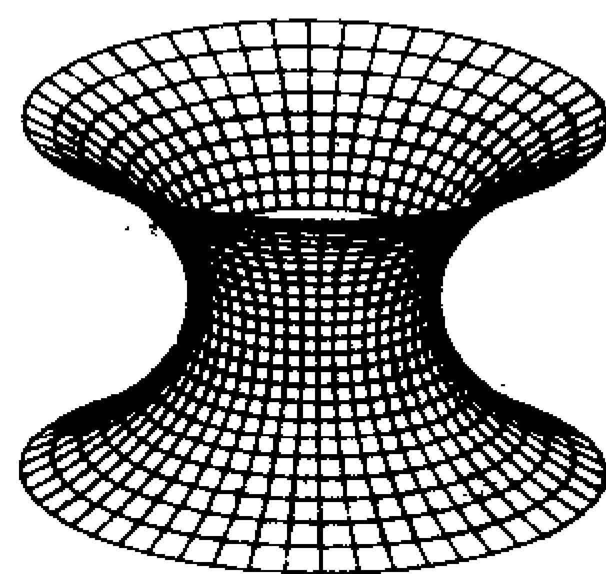


上图是一个达到最小值的曲面.螺旋面和悬链面(catenoid)之间有一种奇特的关系.螺旋面可以包着悬链面,就像纸片包着圆柱面一样.螺旋面的轴包着悬链面的横截面最小的圆.第二张图表示螺旋面的一部分是如何包在悬链面外面的.



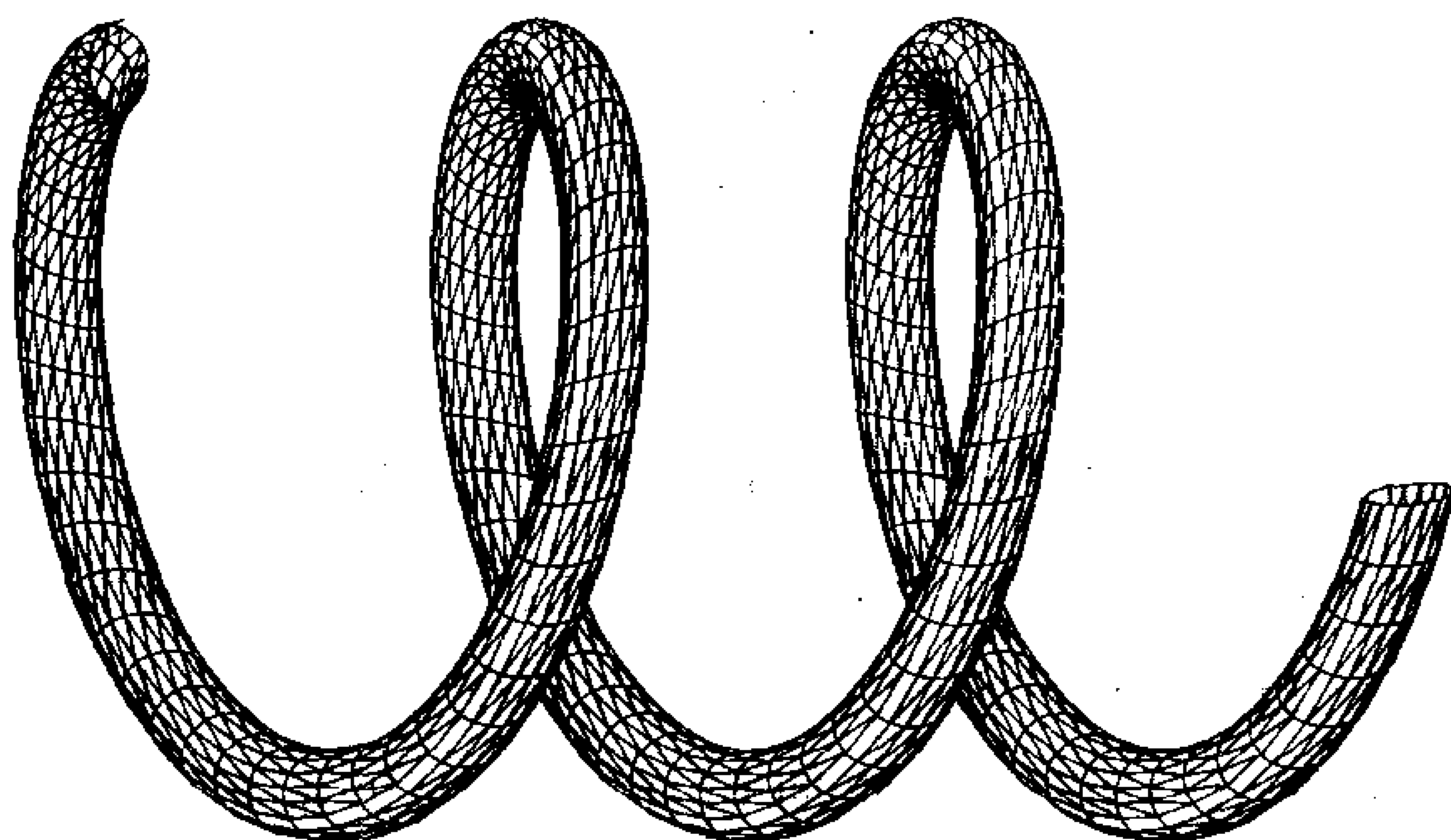






helix 螺旋线

设想有一个圆，圆心在垂直于圆所在的平面的直线上均匀地移动. 绕该圆均匀地旋转的点就形成螺旋线. 或者说，螺旋线是以固定的方向作螺旋运动的结果.



根据旋转的方向，螺旋线可分为左旋的和右旋的. 上图表示一个长长的螺旋管，它的轴就是螺旋线. 螺旋线也可以看作是在圆柱面上与母线的夹角保持不变的一条曲线.

在日常生活中经常遇到螺旋线，因为它有这样一个实用的性质：螺旋线绕它的轴旋转、前后移动还是本身. 因此螺丝钉，圆柱形螺丝和螺旋齿轮的外形都是螺旋线，就像在一个很小的空间中能方便地向上走的螺旋状的楼梯那样. 这些形状的边缘的曲线就是螺旋线，这些弯曲的表面就是螺旋面或者柱面的各个部分.

Hénon attractor 海农吸引子

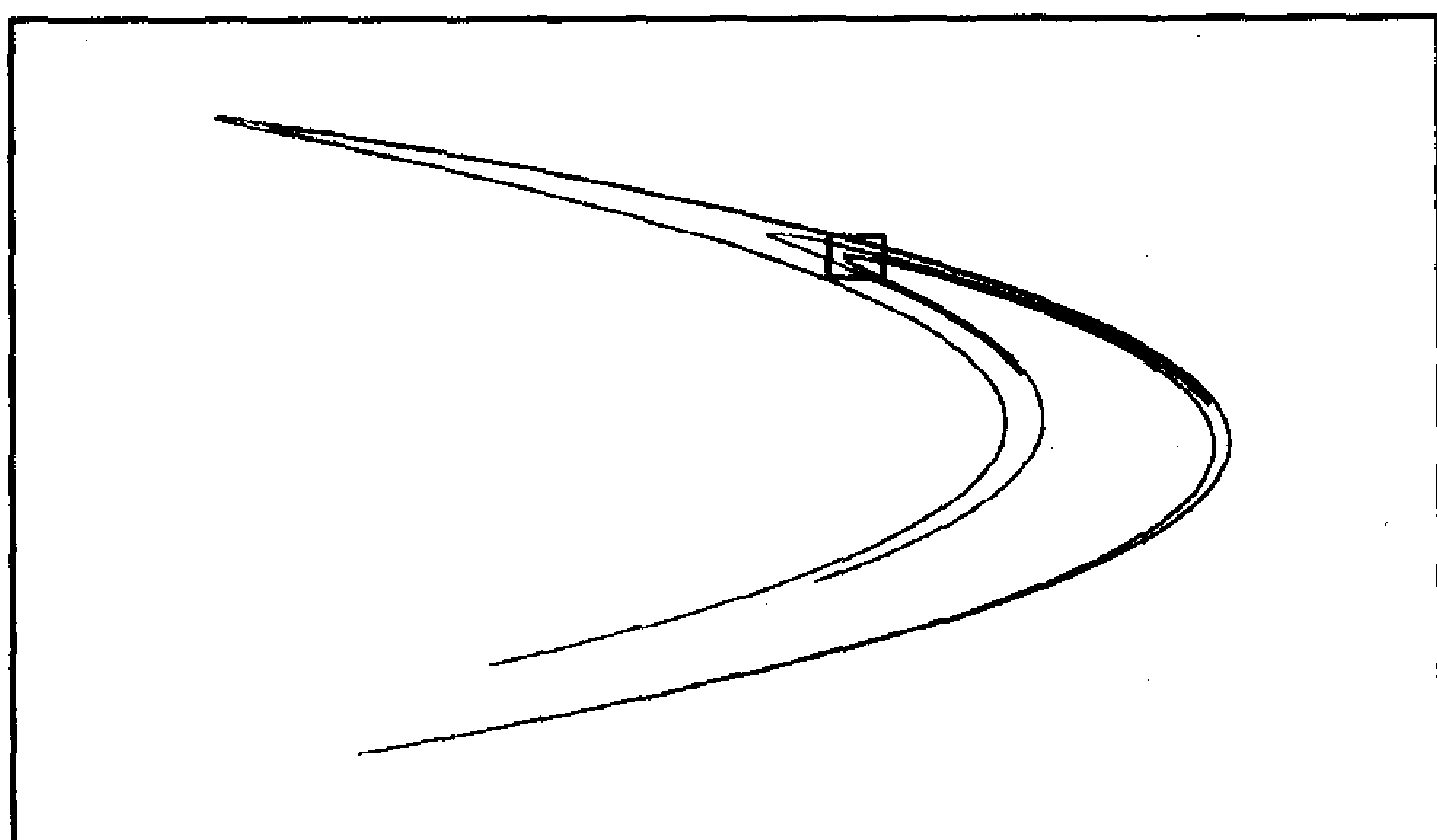
第一个利用 PH-65 型程序计算器进行研究的是法国数学家 M · 海农(Michel Hénon)，这一著名的映射反映出许多没有能量损耗的动力系统的行为，例如绕日运动的星体.

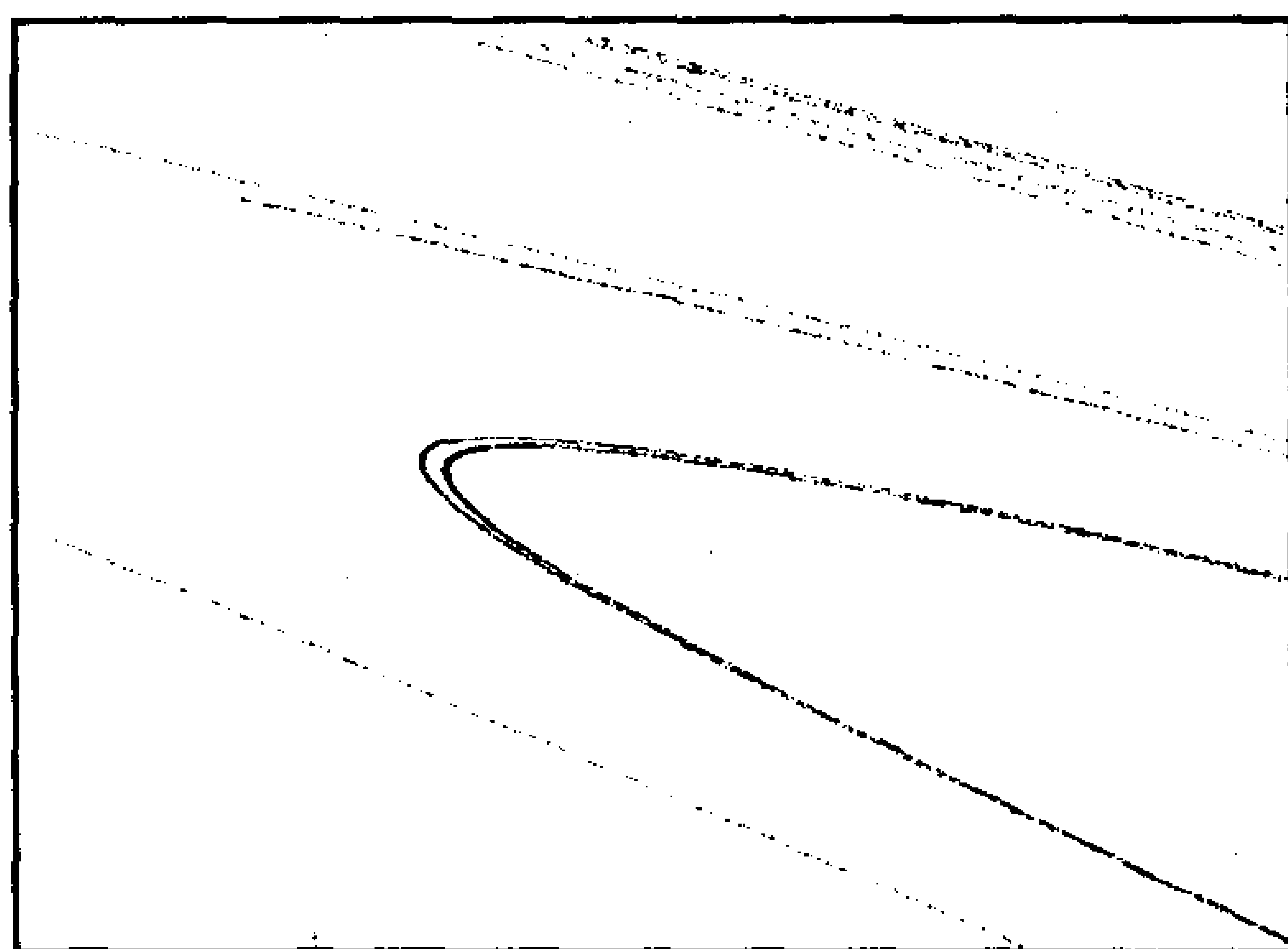
它由以下变换定义：

$$x \rightarrow y+1-ax^2, \; y \rightarrow bx.$$

只要初始点(x,y)离原点不太远，重复应用上述变换后该点必将位于这一吸引子中.每重复一次，点就以混沌的方式从一条曲线跳到另一条曲线，或者跳到同一曲线的另一部分.

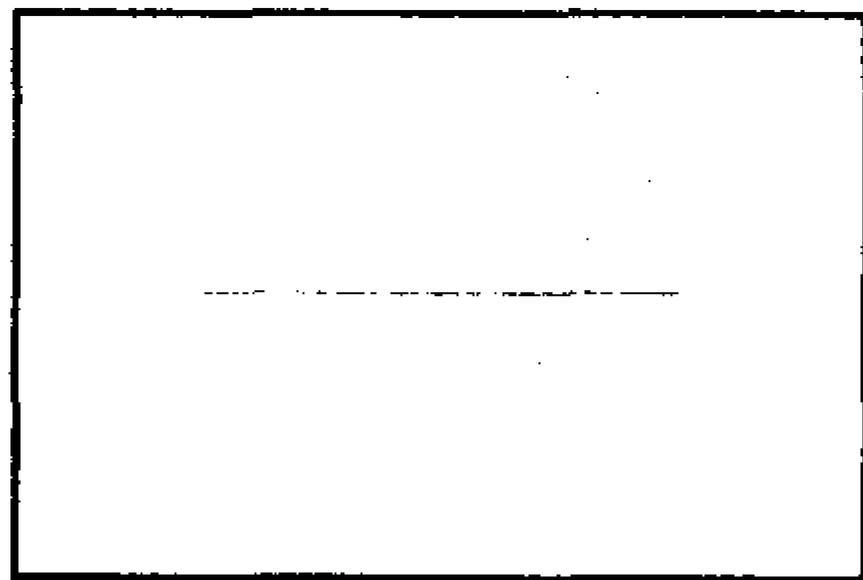
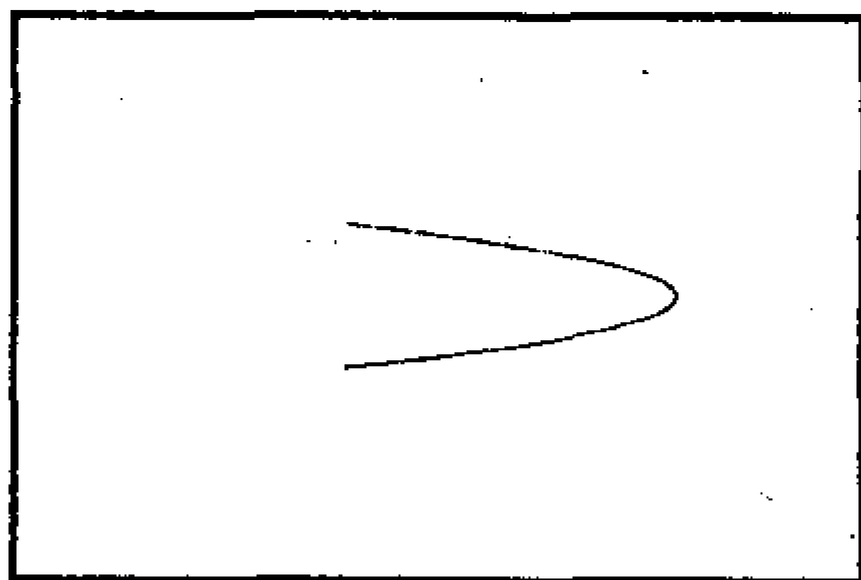
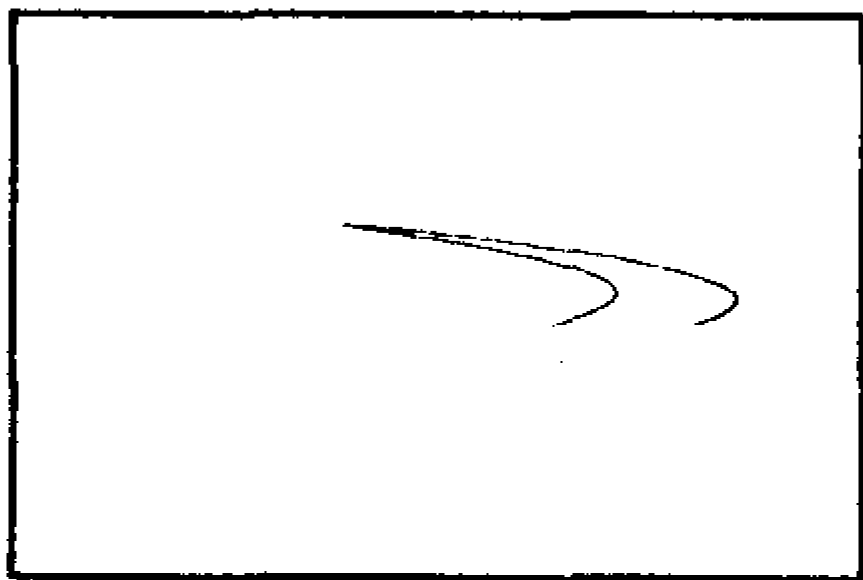
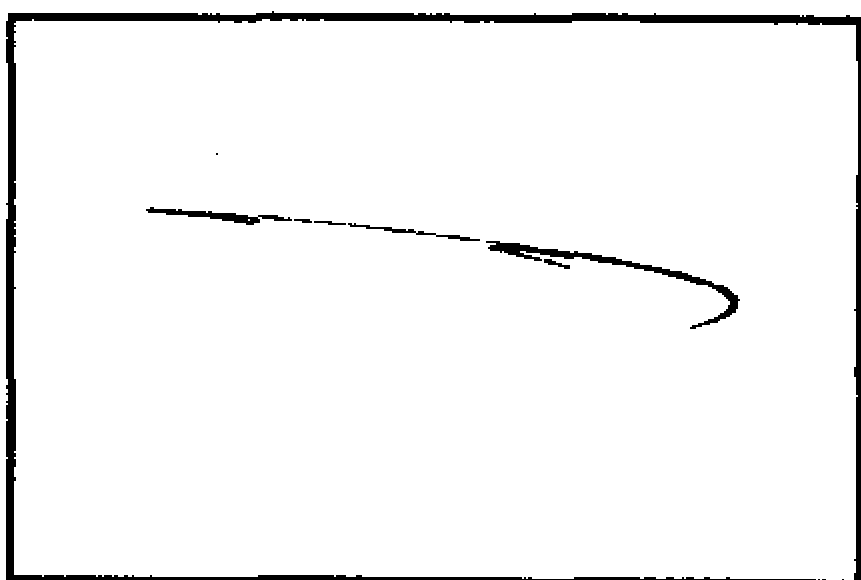
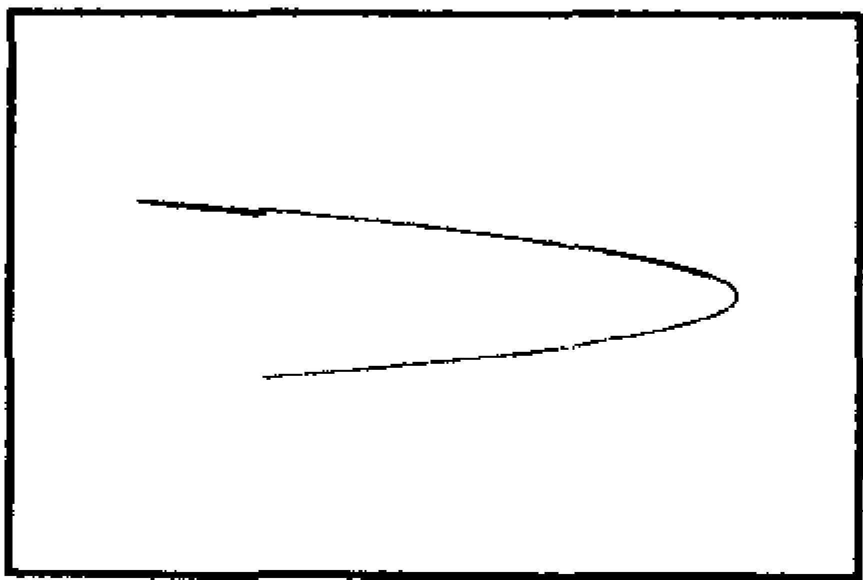
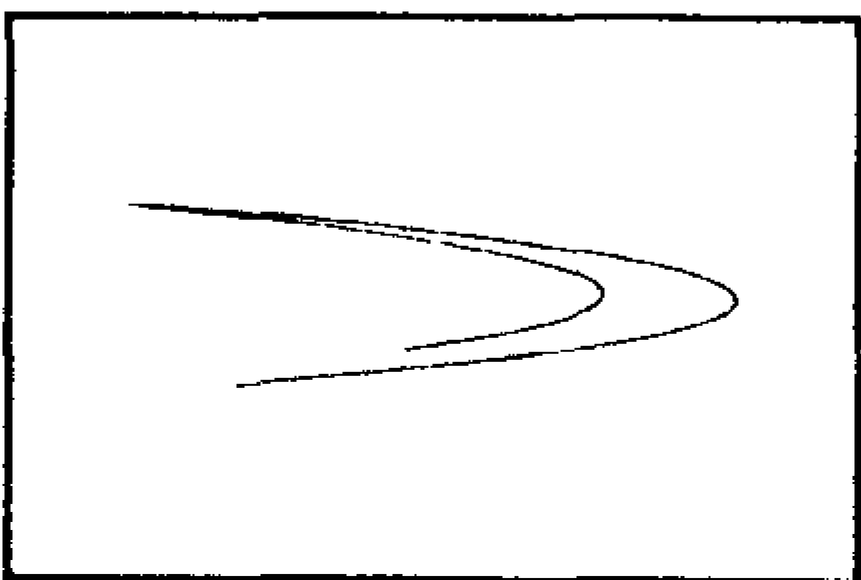
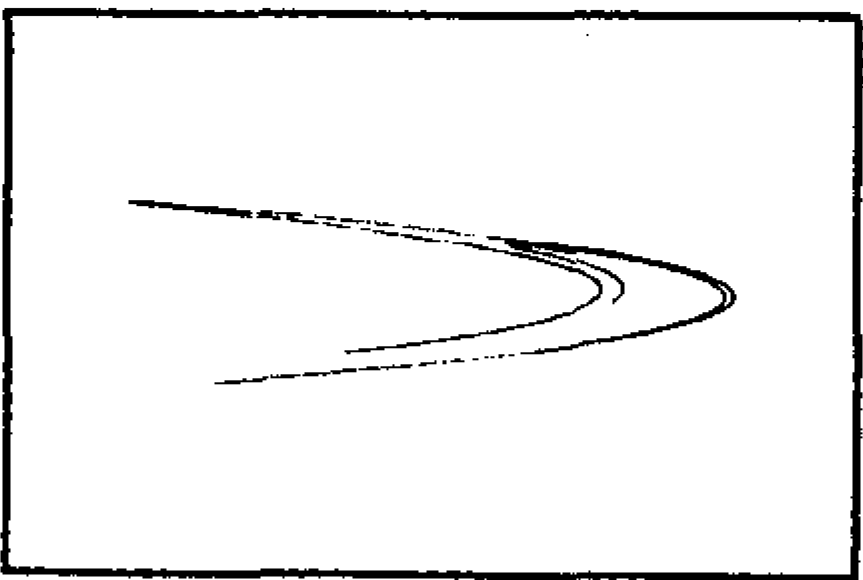
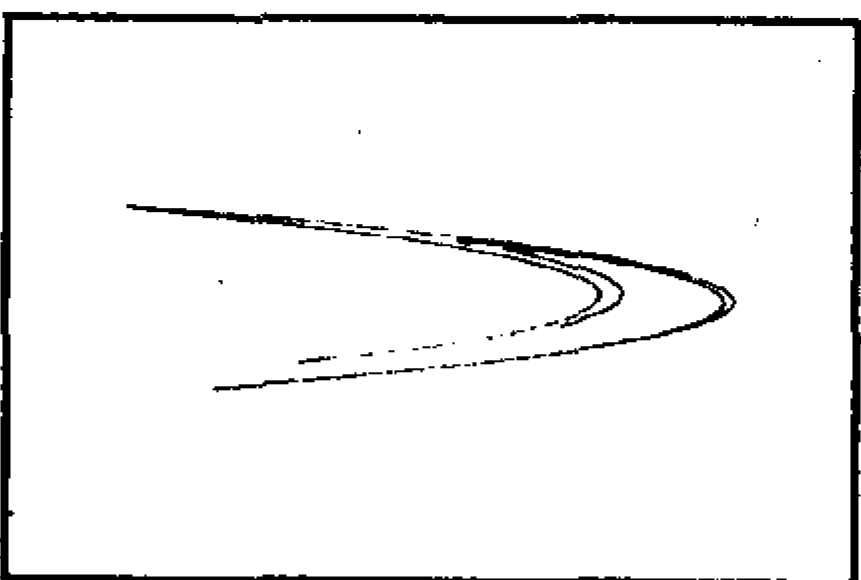
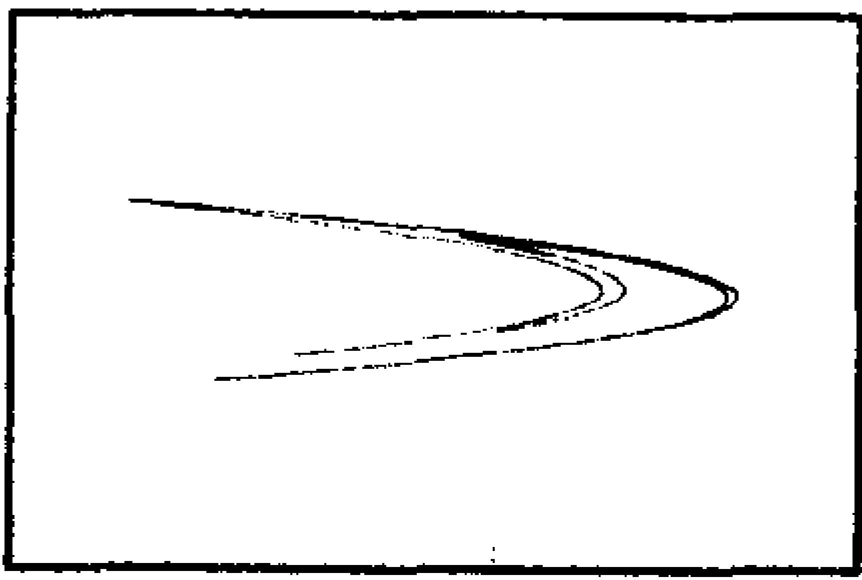
将这一映射在计算机的屏幕上放大以后，就像第二张图显示的那样，每一条曲线都是由一些更为精细的线条组成，这些线条是由更为精细的线组成……





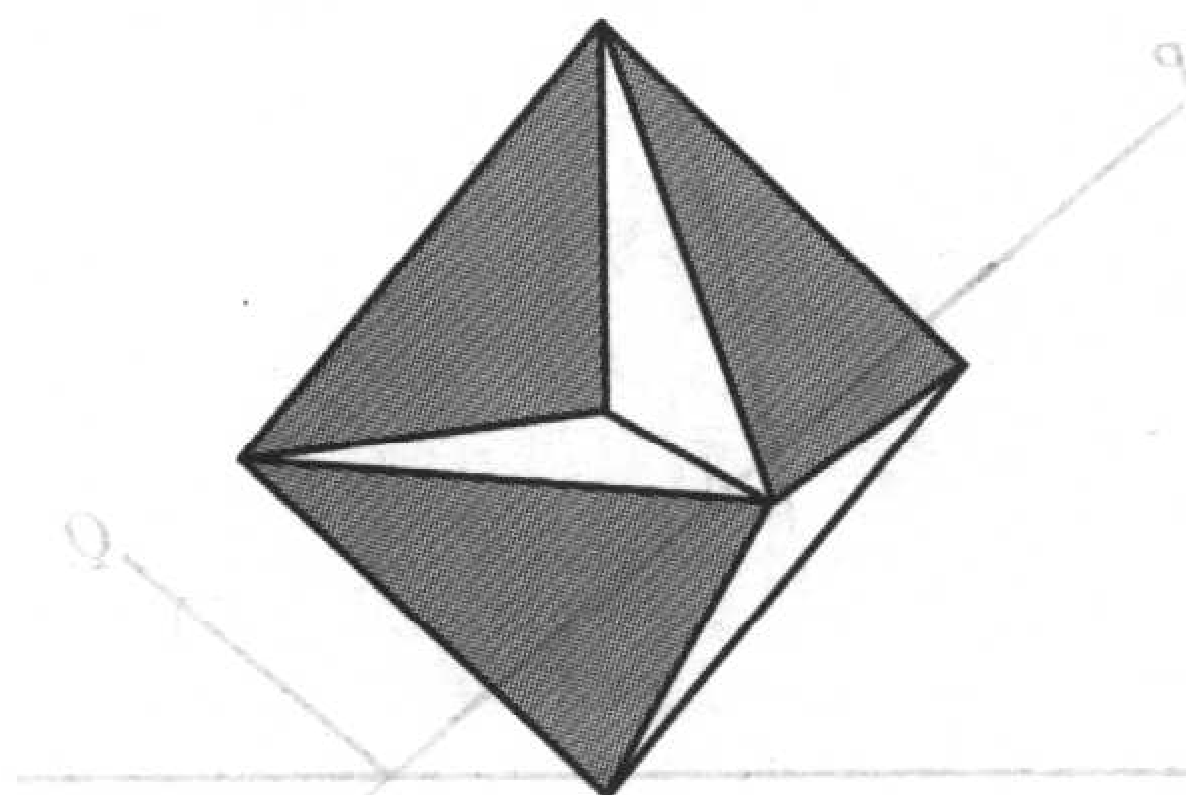
这一映射表示海农初始值是$a=1.4$和$b=0.3$的海农吸引子.如果这一直线上的所有的点都用海农过程进行变换，那么直线本身就被伸长，并弯曲成很像海农吸引子的形状，而不是像把

一种液体搅拌到另一种液体中那样：

heptahedron　七面体

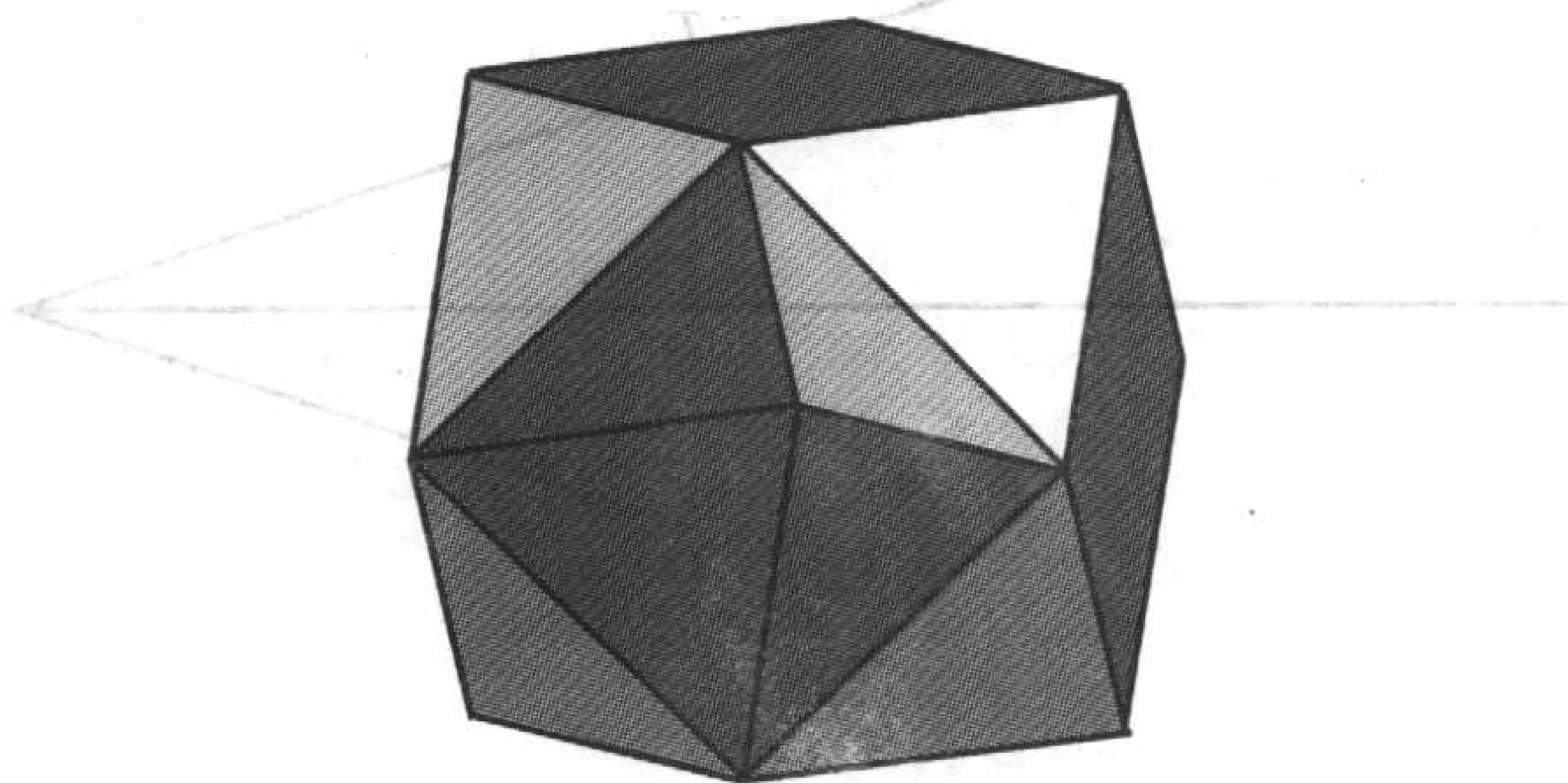
下图是一个由四个三角形和三个四边形组成的单侧曲面，它在拓扑上等价于(即能连续变形成)斯坦纳罗马曲面(Steiner's Roman surface)，但构作容易得多.



为了作一个正规的模型，我们从正八面体出发，取走一个隔一个面. 余下的四个三角形只相交于它们的顶点. 再插入三个样的正方形，它们是经过原八面体的中心和各面的棱截得的截面. 所生成的多面体是没有边界的封闭曲面，但是是单侧曲面.

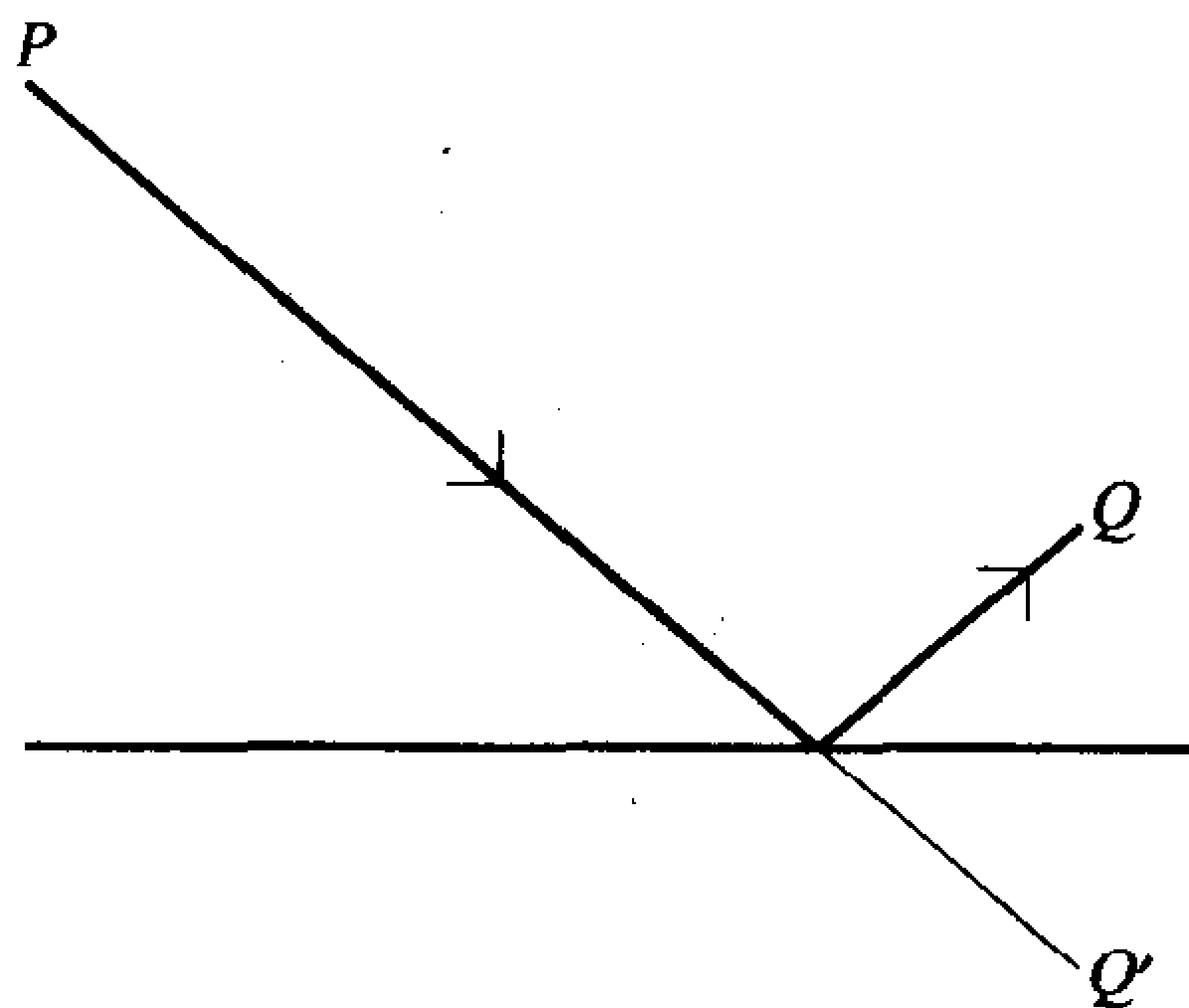
正七面体也许只能看作是一个半正(阿基米德)多面体，因为它的所有的面都是正多边形，所有的顶点都是同等的. 与标准的阿基米德多面体不同，它们不是凸的，而是自交于三个正方形的交线，甚至在中心有一个三重点.

用同样的方法可以构成另一些阿基米德多面体. 下面的模型有正方形的面，有经过中心的正六边形的面，是一种正方正八面体.



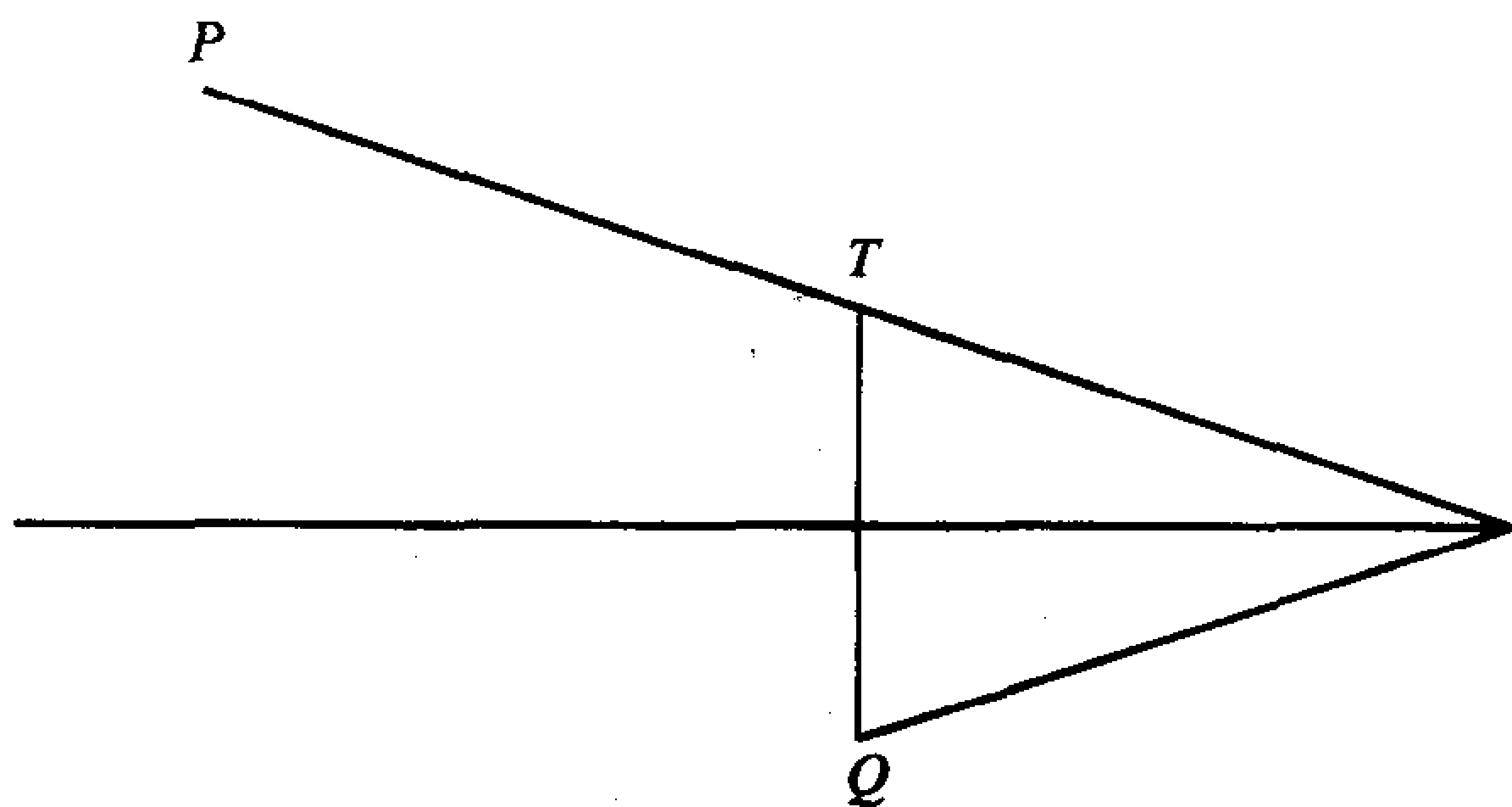
Héron's problem　海伦问题

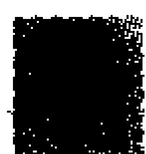
亚历山大的海伦在他的著作《论反射》一书中断言光线总是以最短的路径(按照距离来说)行进的,并证明了在镜面上入射角和反射角相等.



他是采用的方法与现在使用的方法相同. 对 Q 点进行镜面反射. 最短距离 PQ 等于最短的距离 PQ',它是直线段. Q'反射到 Q 表明这两个角相等.

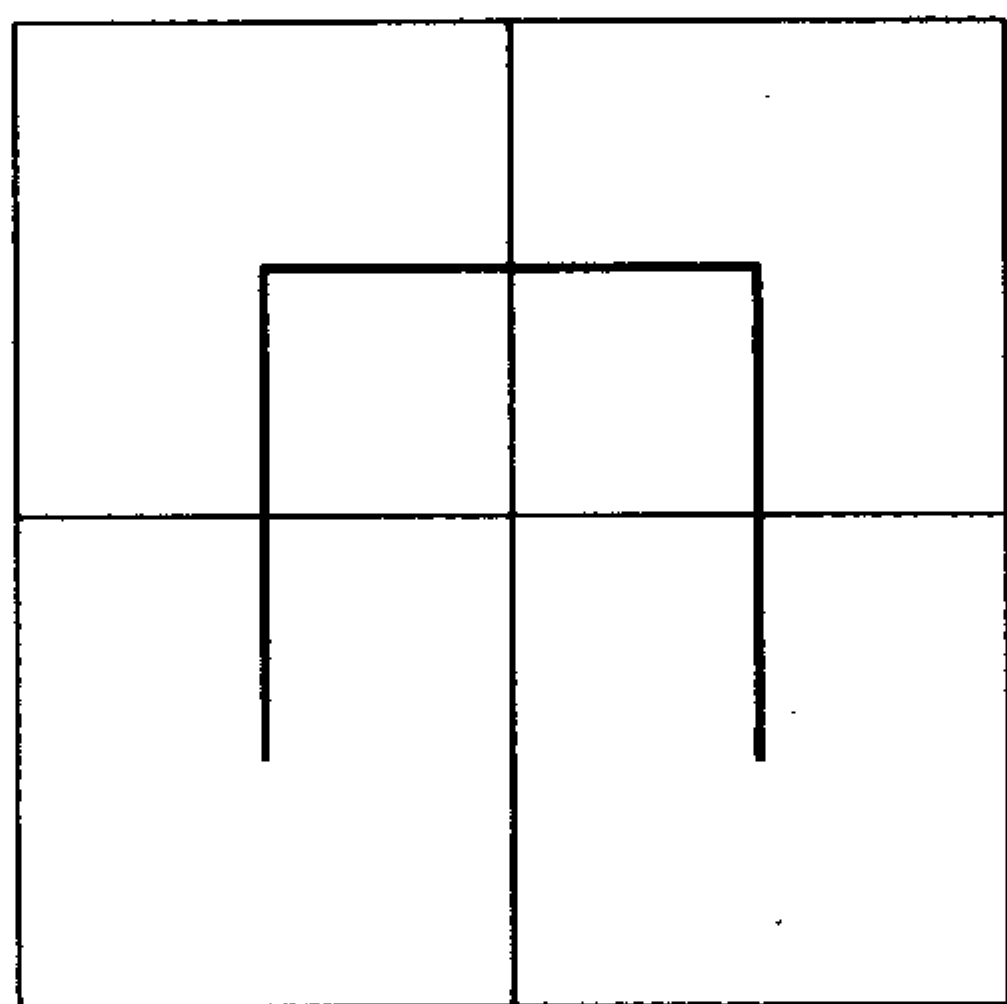
同样的反射原理解决了在直线上找一点 T,使它到位于直线两侧的点 P 和 Q 的距离 PT 和 PQ 的差尽可能大这样的问题. T 点可这样选择,使点 Q 的反射点位于 PT 上.

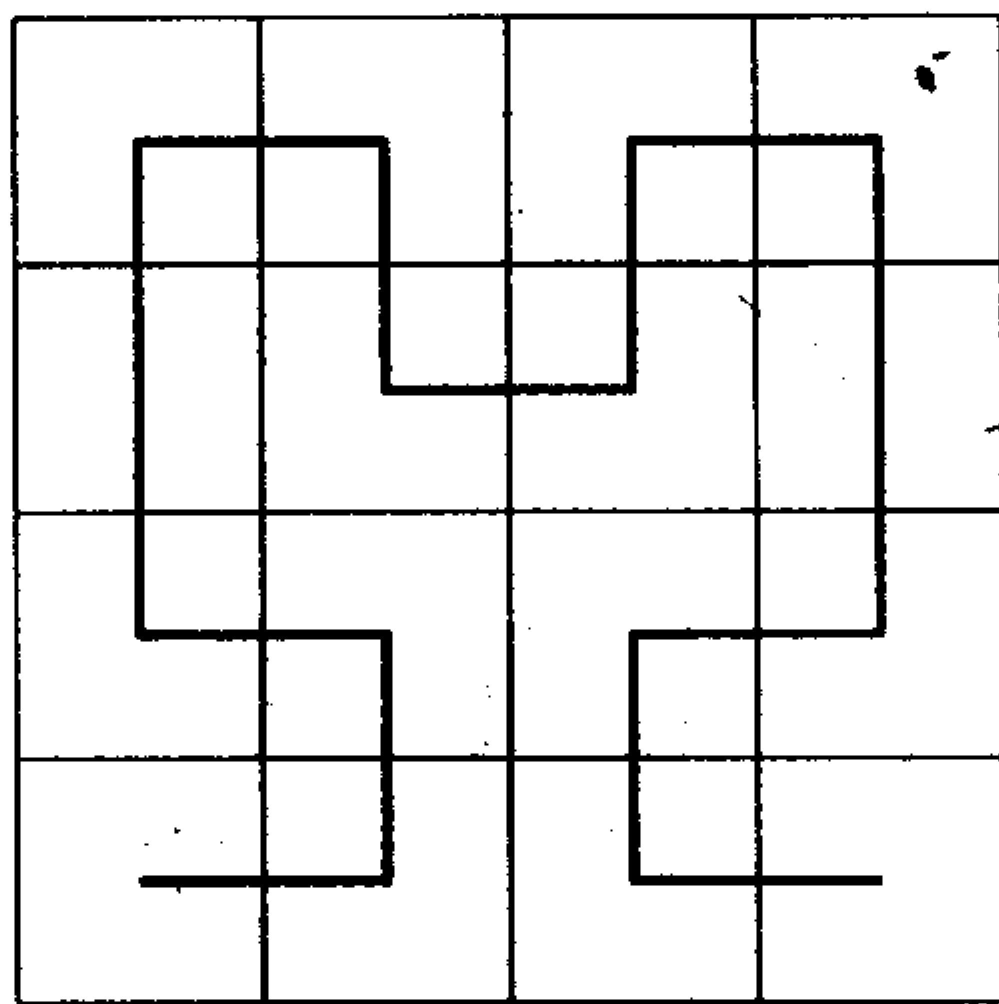


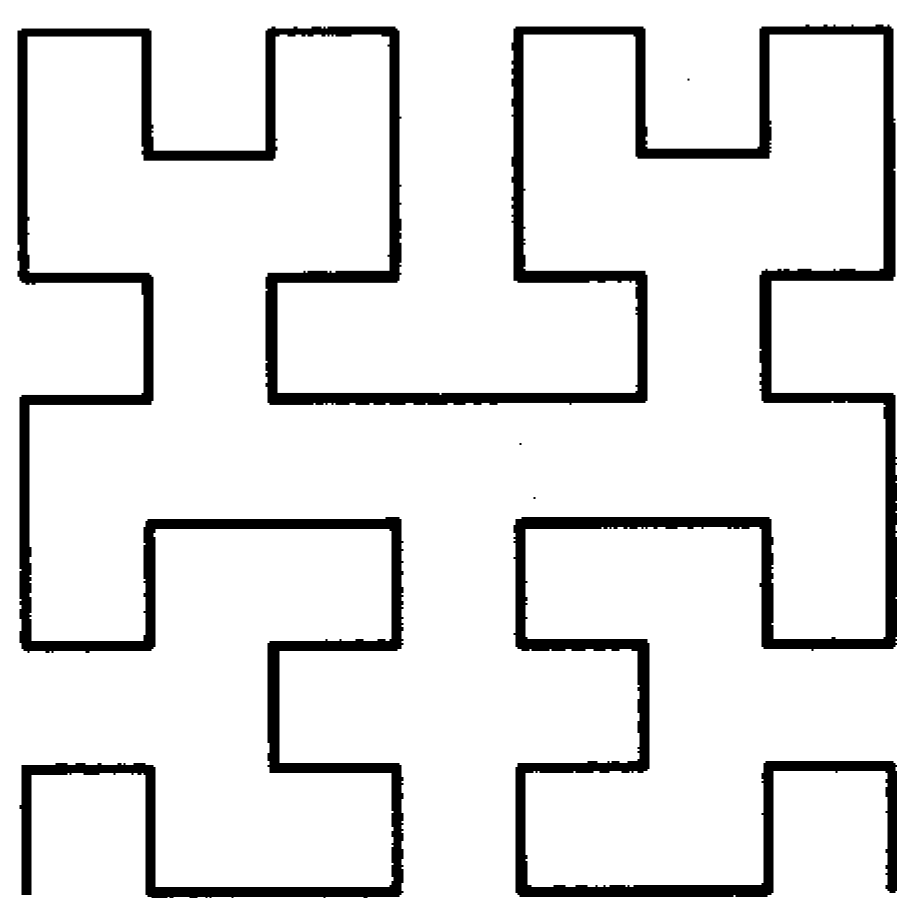


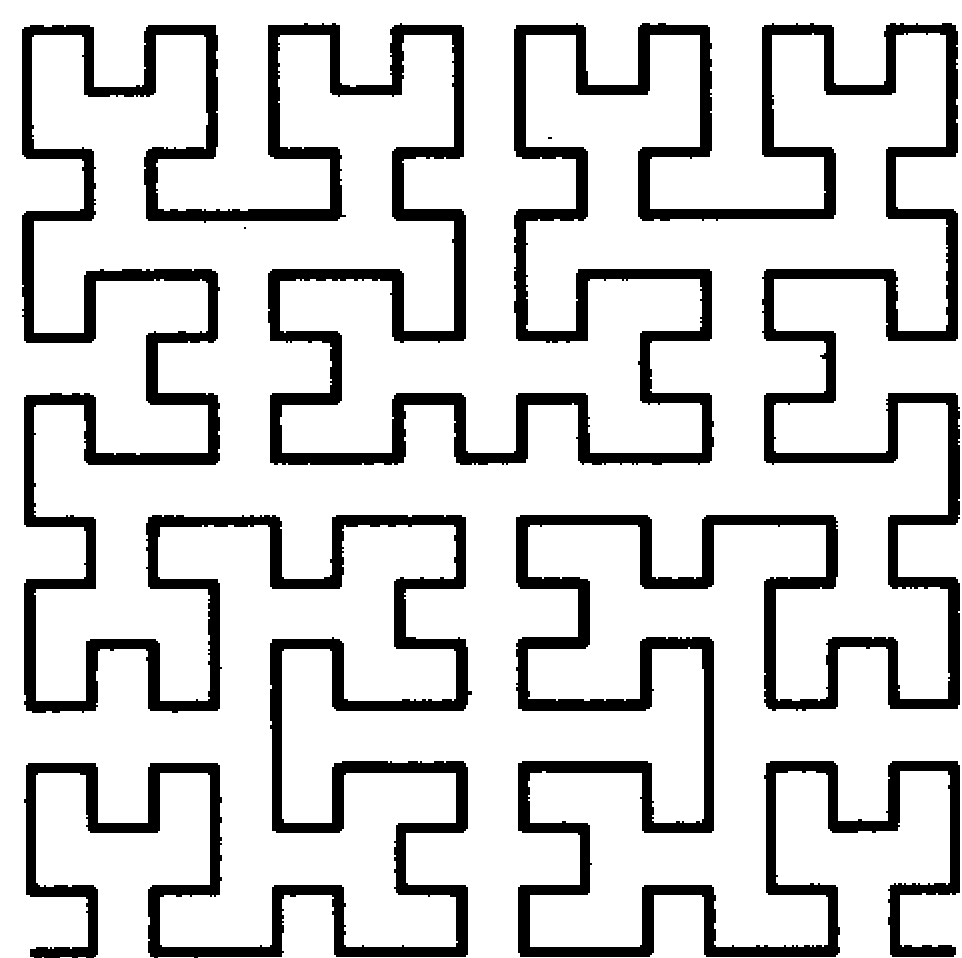
Hilbert's space-filling curve　填满空隙的希尔伯特曲线

下面四个图中的曲线表示近似于希尔伯特曲线的最初四条曲线. 前两个图中出现了用来画曲线路径的正方形背景. 每一步中,先把前一步的每一个正方形都分成四个小正方形,然后分割路径,使它经过每一个新正方形的中心,再在一个较小的范围内的复制一个前一步中那样的路径. 在极限的情况下,结果就是充满空隙的希尔伯特曲线,它是一条经过正方形中每一点的连续曲线.

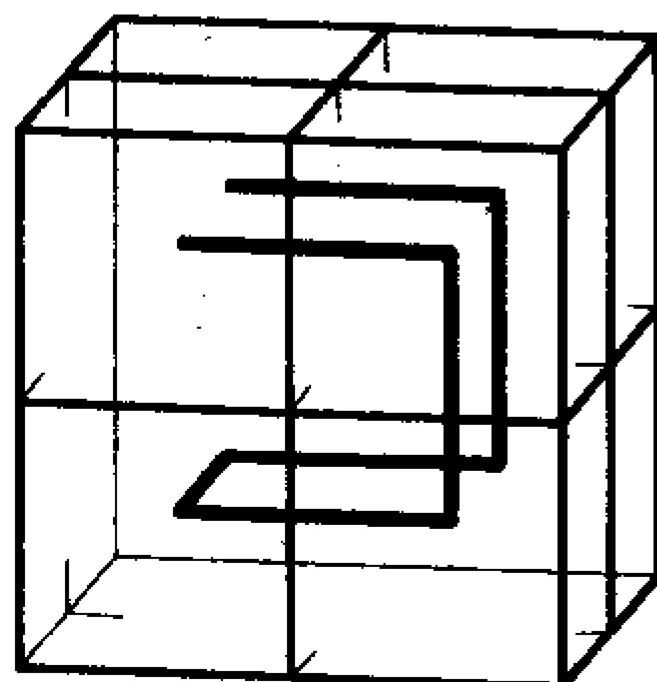






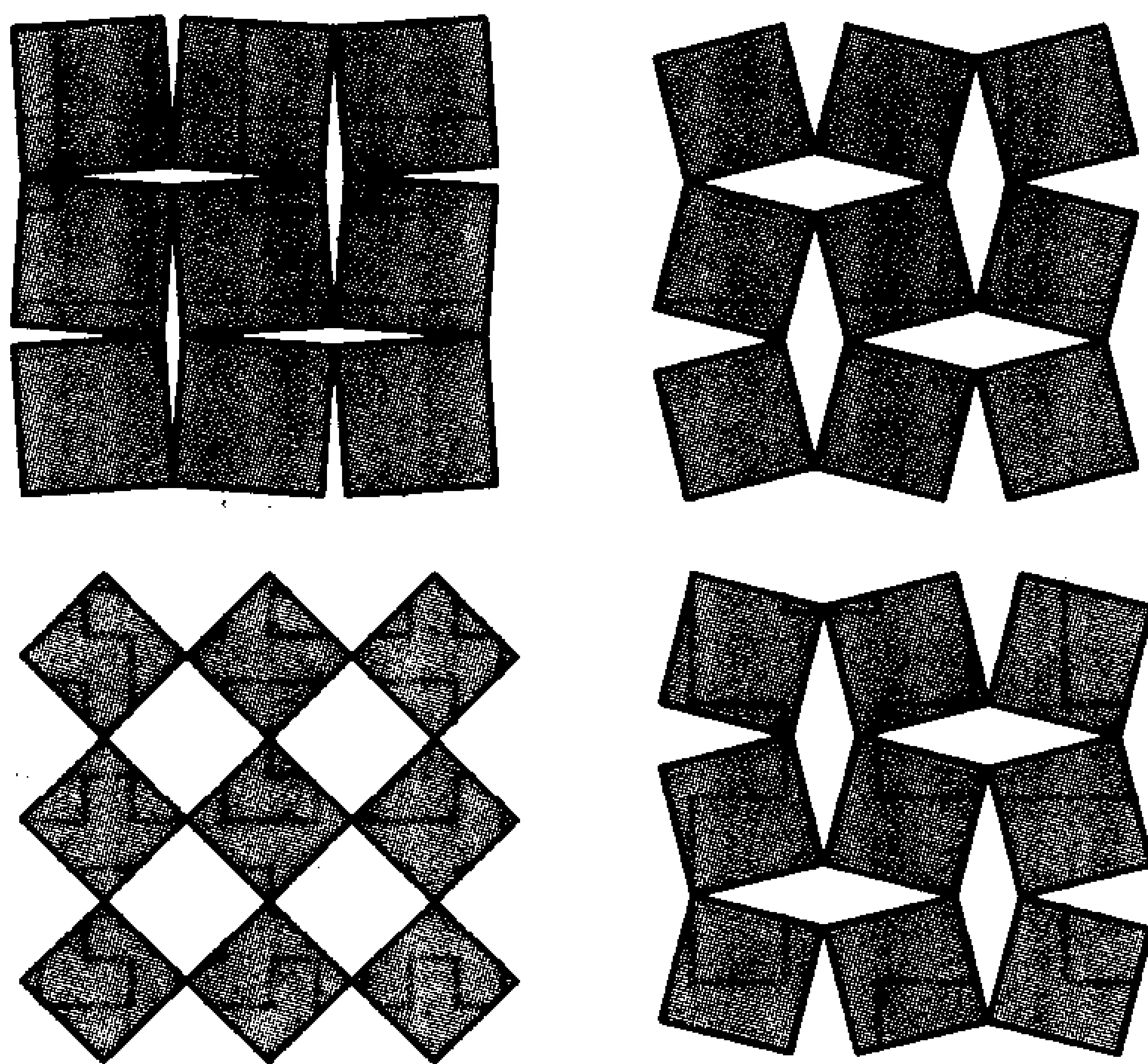


使用一个复杂得多的方式可以作出一条经过一个正方体的每一个点的类似的曲线. 下图是第一步:

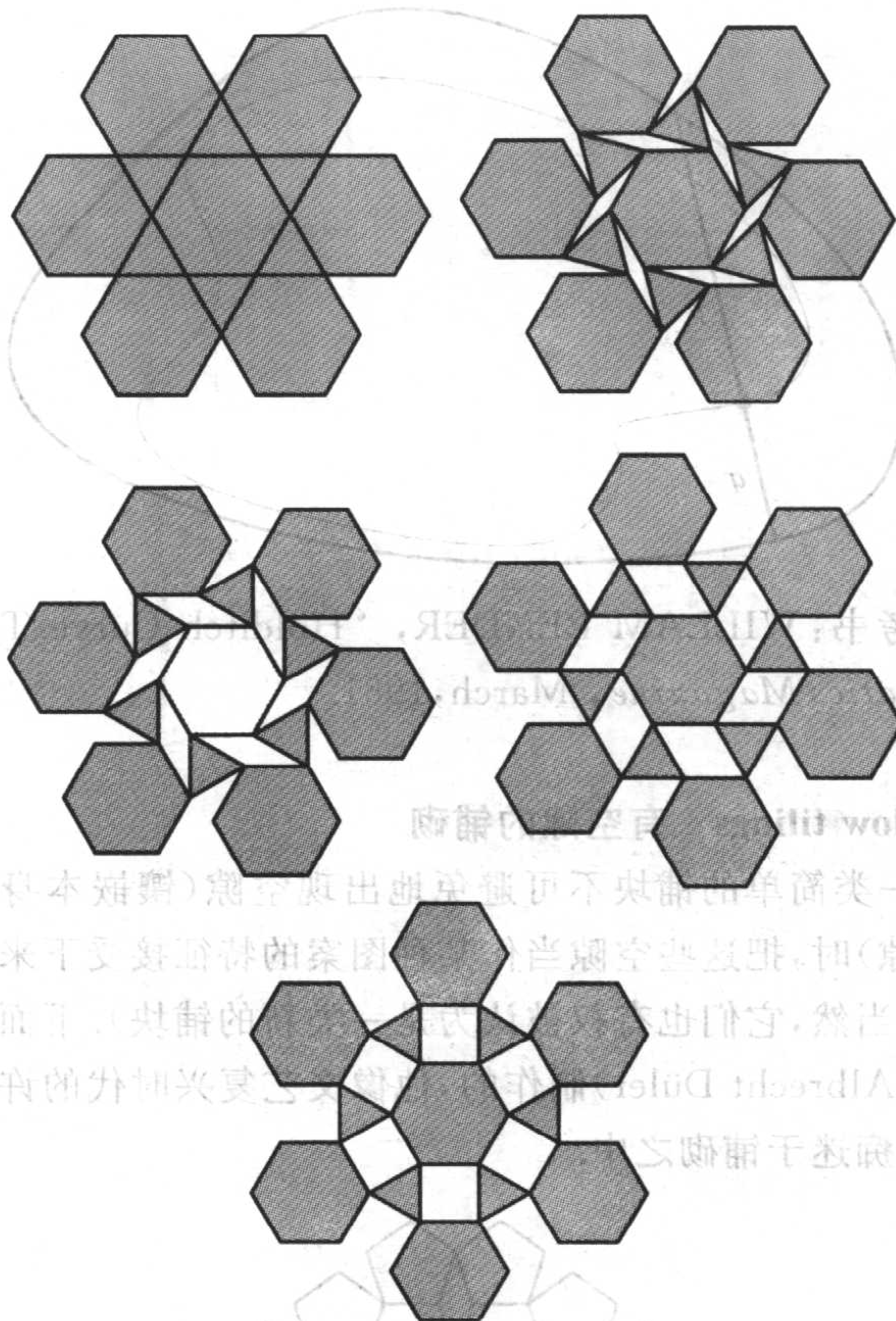


hinged tessellations　带铰链的镶嵌

如果我们把某些镶嵌看作是在顶点处带铰链，并由被空隙隔开的硬片所组成，那么这种镶嵌可以像下图那样拉开（或闭合）. 下图中的正方形和菱形的镶嵌显示的是接近于极端状态和处于中间状态的正方形镶嵌. 在其他两种中间状态中，每一个菱形都等价于一对等边三角形.



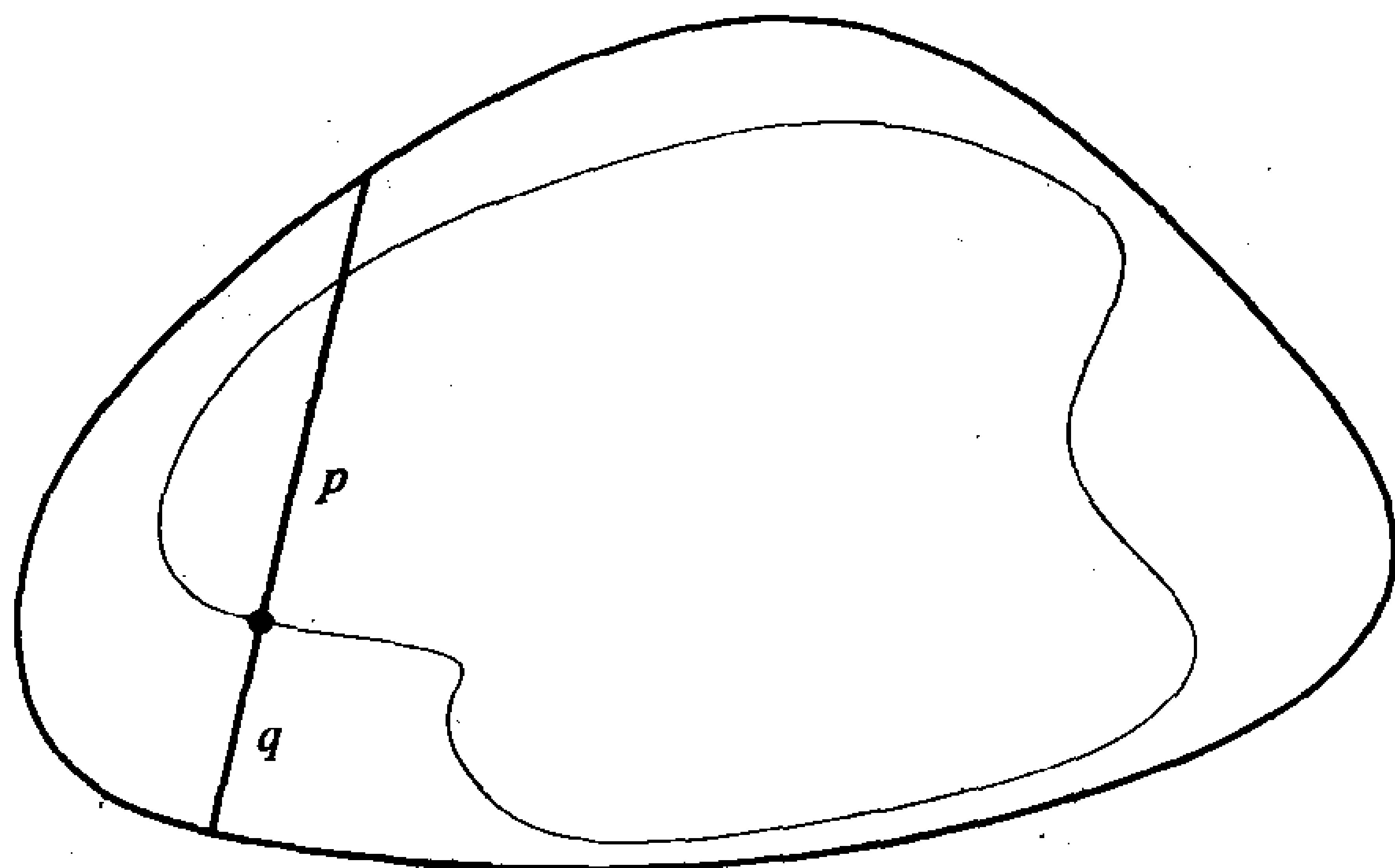
下图中的六边形和三角形的镶嵌也以类似的方法带有铰链. 它打开时显示出钻石状的空隙，它在六角形、正方形和三角形的镶嵌中变成正方形. 如果等边三角形继续旋转，那么它就闭合，又变成六边形和三角形的镶嵌，每一个三角形都旋转了 180°.



参考书：DAVID WELLS，*Hidden Connections*，*Double Meanings*，Cambridge University Press，Cambridge，1988

Holditch's theorem　豪尔第奇定理

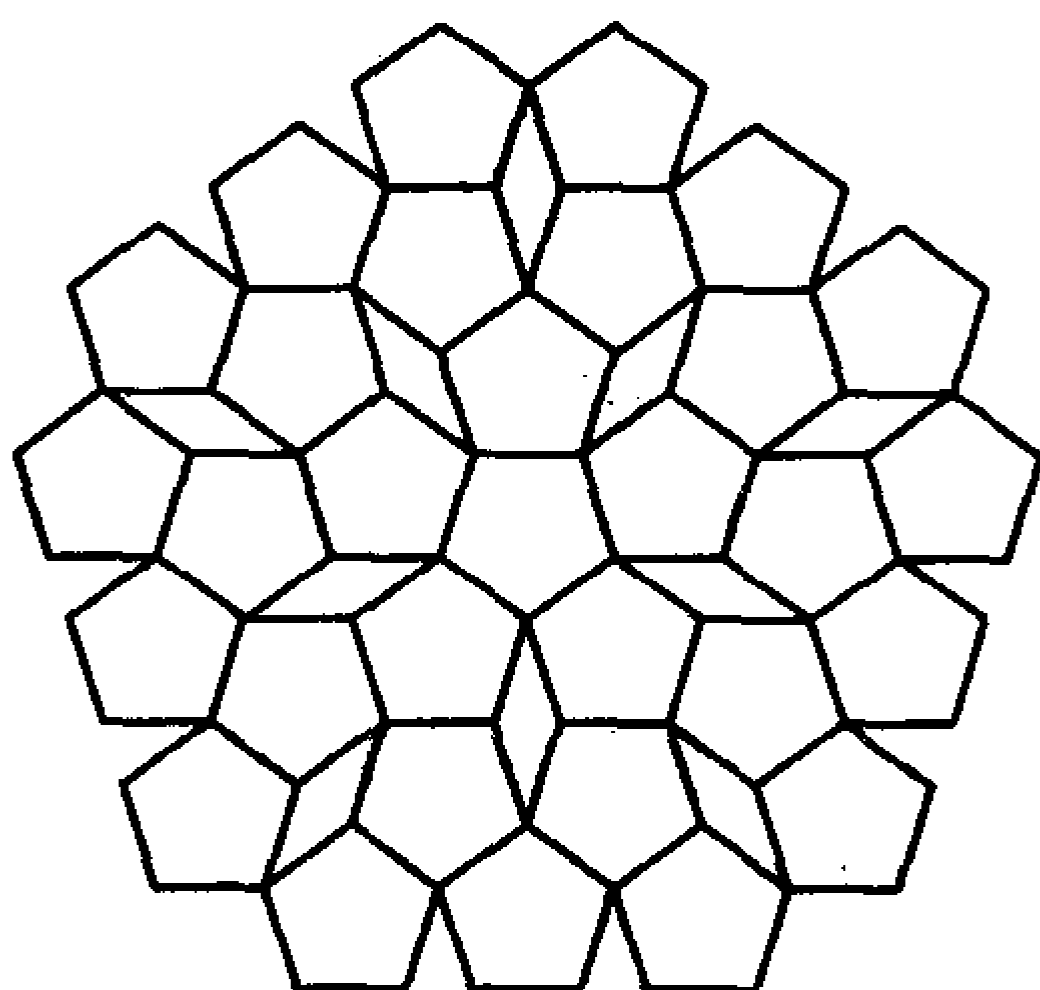
取一条光滑的封闭的凸曲线，让一条定长的弦绕曲线滑动，在动弦上取一点把弦分为长度为 p 和 q 的两部分. 当弦运动时，该点将画出一条新的封闭曲线. 只要满足某些简单的条件，那么这两条曲线之间的面积将等于 πpq.



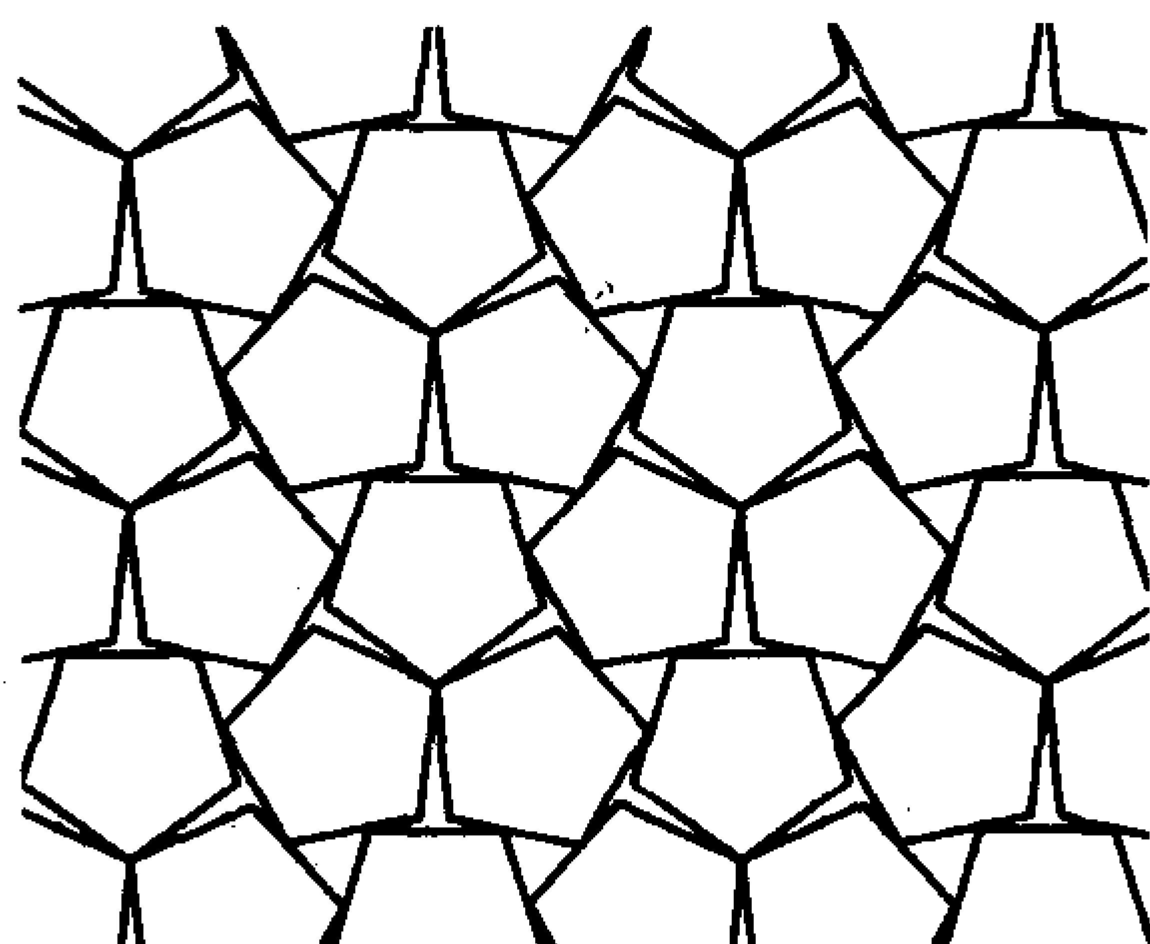
参考书：WILLAM BENDER，'Holditch Curve Tracer'，*Mathematics Magazine*，March，1981.

hollow tilings　有空隙的铺砌

当一类简单的铺块不可避免地出现空隙(镶嵌本身也使用这些空隙)时，把这些空隙当作某种图案的特征接受下来倒是很诱人的(当然，它们也有权被认为是一类新的铺块). 下面的镶嵌是丢勒(Albrecht Düler)制作的，他像文艺复兴时代的许多艺术家一样，痴迷于铺砌之中.

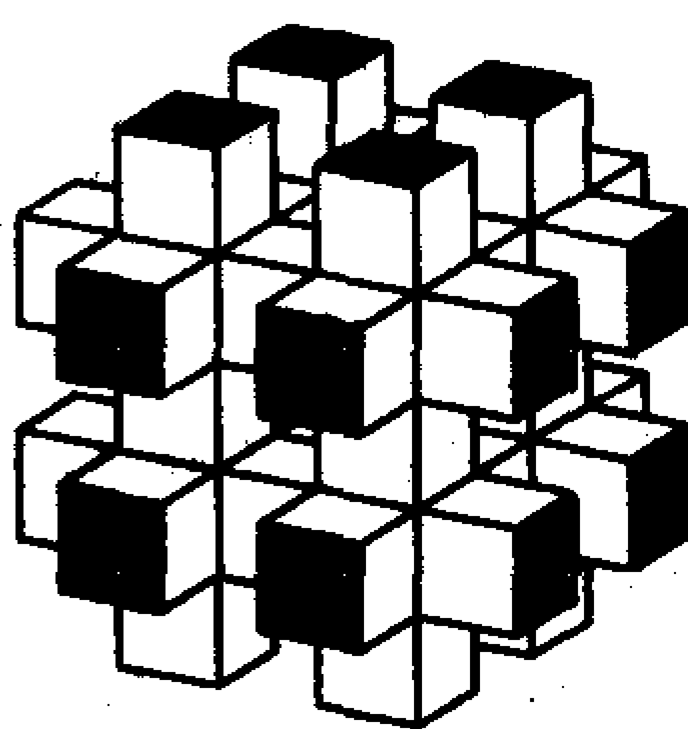


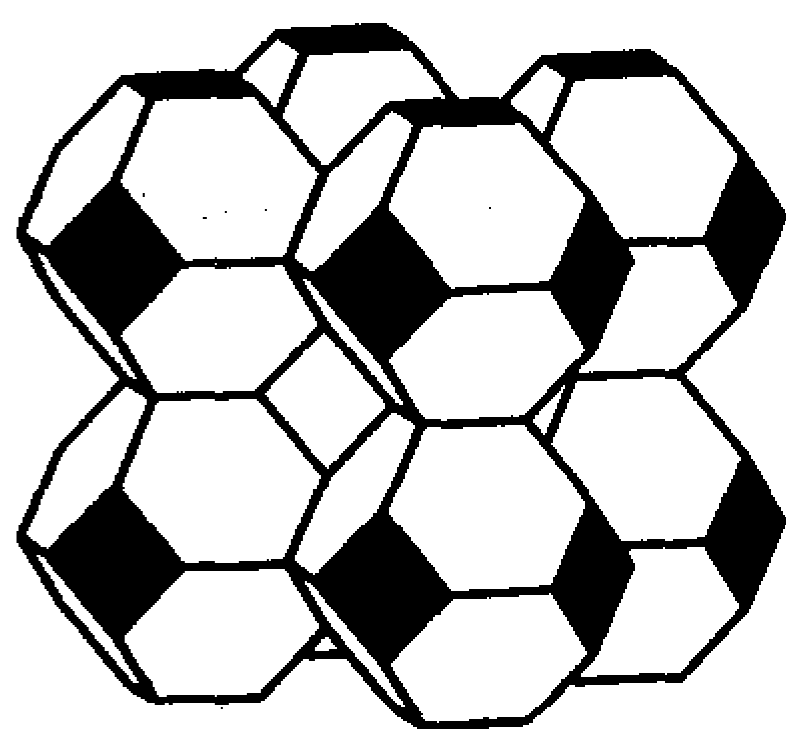
下图是又一个正五边形的闭合镶嵌，图中的每一个五边形都与另外六个图形相连.

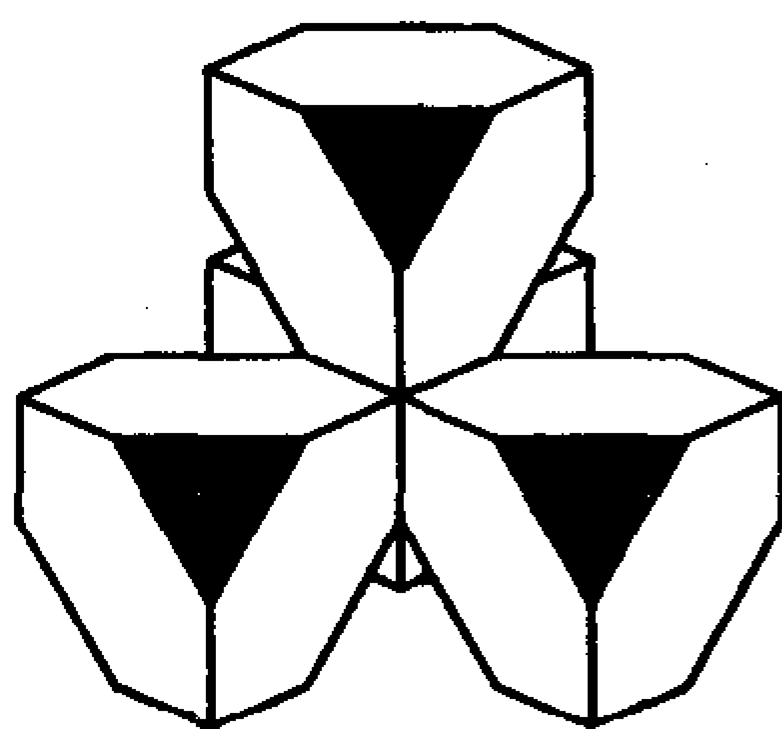


honeycombs　蜂窝

1926 年皮特利(Petrie)和考科塞特(Coxeter)发现了他们所称的正凹多面体,它由充满整个空间的正多边形的面和顶点构成. 在以下各图中,第一种情况是每一个顶点的周围都有六个正方形,第二种情况是每一个顶点的周围都有四个六边形,最后一种情况是每一个顶点的周围都有六个六边形. 由于它们都是正多边形,考科塞特甚至建议它们应该算作是有无限多个面的正多面体;如果人们把三个正多边形的平面镶嵌(它们也能看作



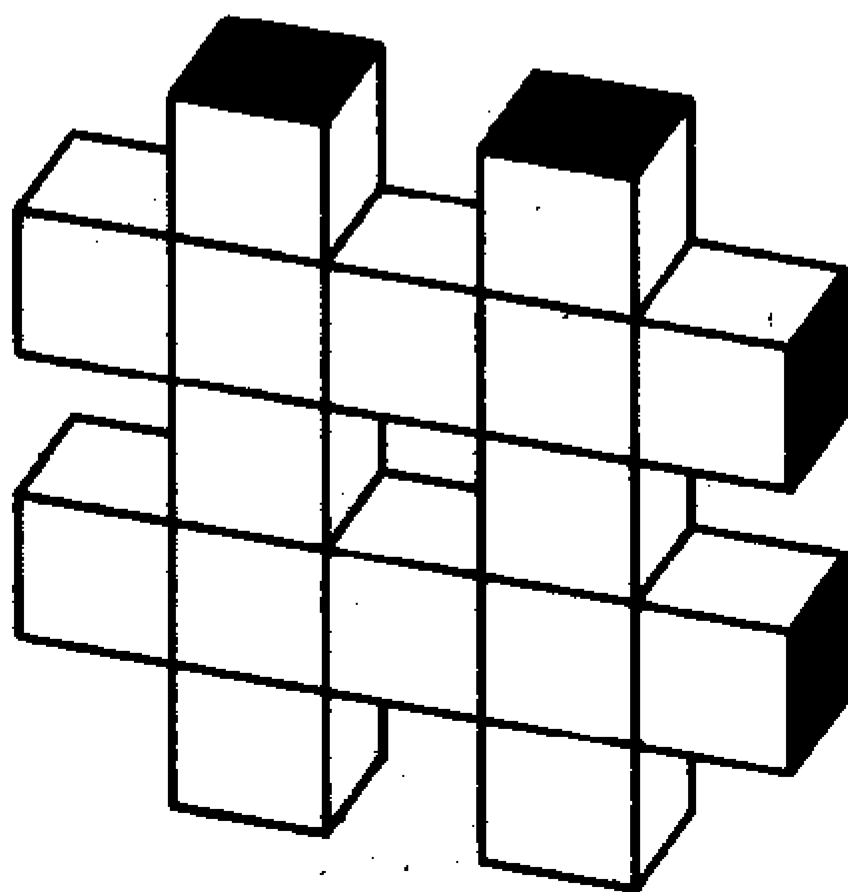




是有无限多个面的多面体)也包括进去,那么考科塞特的解释使正多面体的种数达到十五种.

前两个图是互为对偶的,第三个图像正四面体那样是自身对偶的.每个顶点周围有六个正方形的图形也可以看作是把平面划分成相同的正方体,每个平面像象棋那样涂色,然后把同一颜色的所有正方体取走.它不仅把整个空间分割成两个全等的半个空间,而且具有奇特的性质:如果由各个正方体的组成的面不是有刚性的,那么它是会形变,并将坍塌为一个平面.

下图是一个多面体,它的各个顶点全都相同,周围都有五个正方形.可以说它介于正方形海绵和正方形平面镶嵌之间,它与真正的海绵的关系就相当于中楣与镶嵌那样的关系.

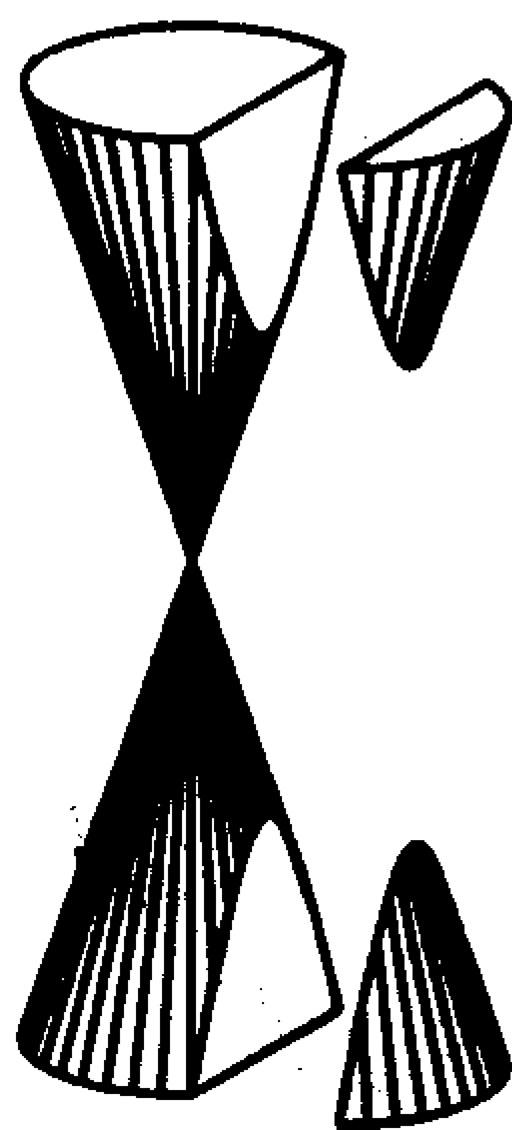


1967 年,J·R·戈特(Gott)对于某些进一步的、类似的、重复的结构发表了详细的结果,定义略有差异.他建立的集合包含了皮特利和考科塞特的内容,以及前面的图,还有三个:一个多面体的每一个顶点的周围有八个三角形,另一个有十个三角形,还有一个有五个五边形.

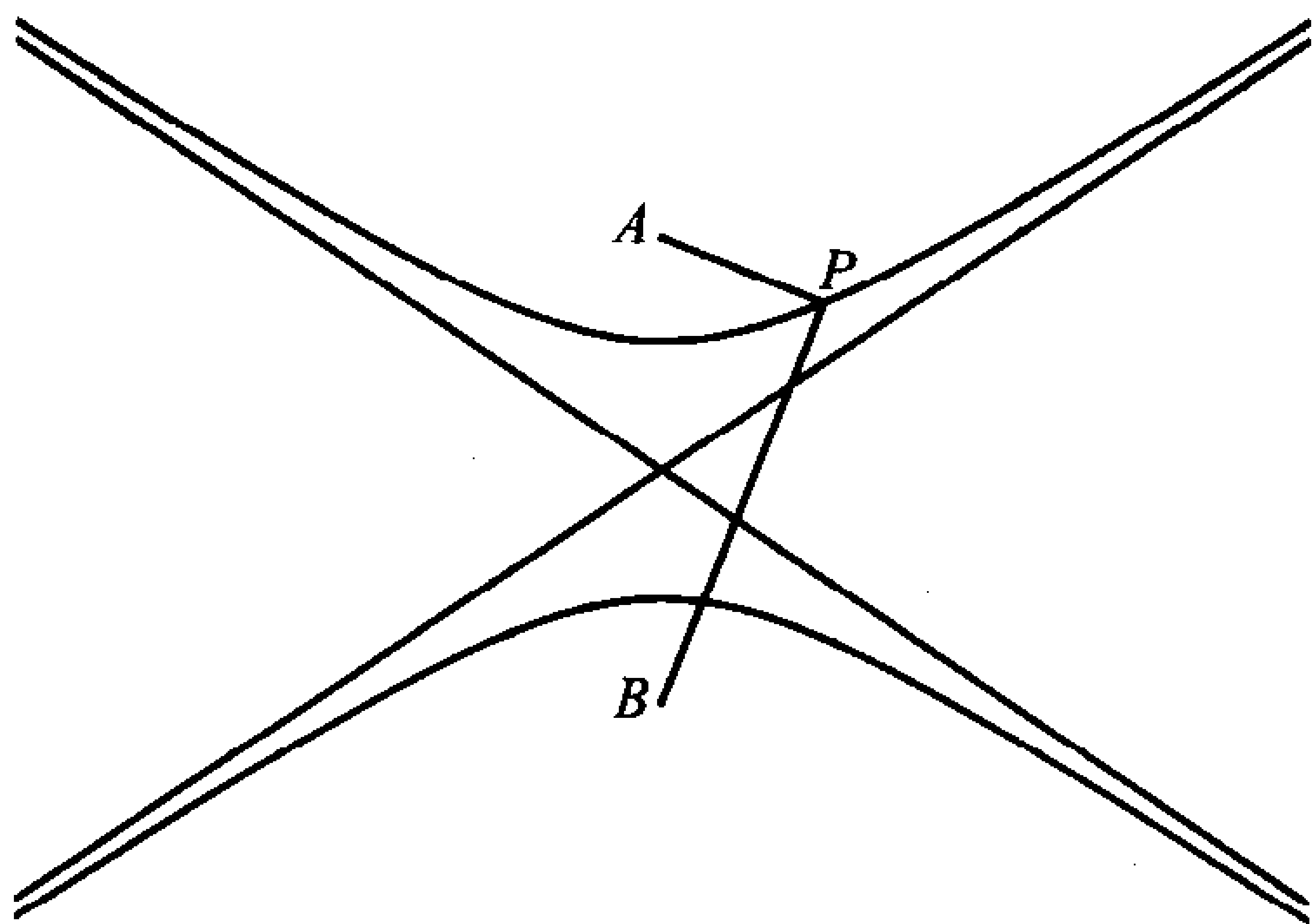
参考书:J. R. Gott, Pseudopolyherons, *American Mathematical Monthly*, May, 1967.

hyperbola　双曲线

双曲线是一个两头圆锥被一个平面所截得到的截面.



双曲线有两条实渐近线:这是离双曲线愈来愈接近,但是永远不能到达的两条直线.(椭圆有两条虚渐近线).

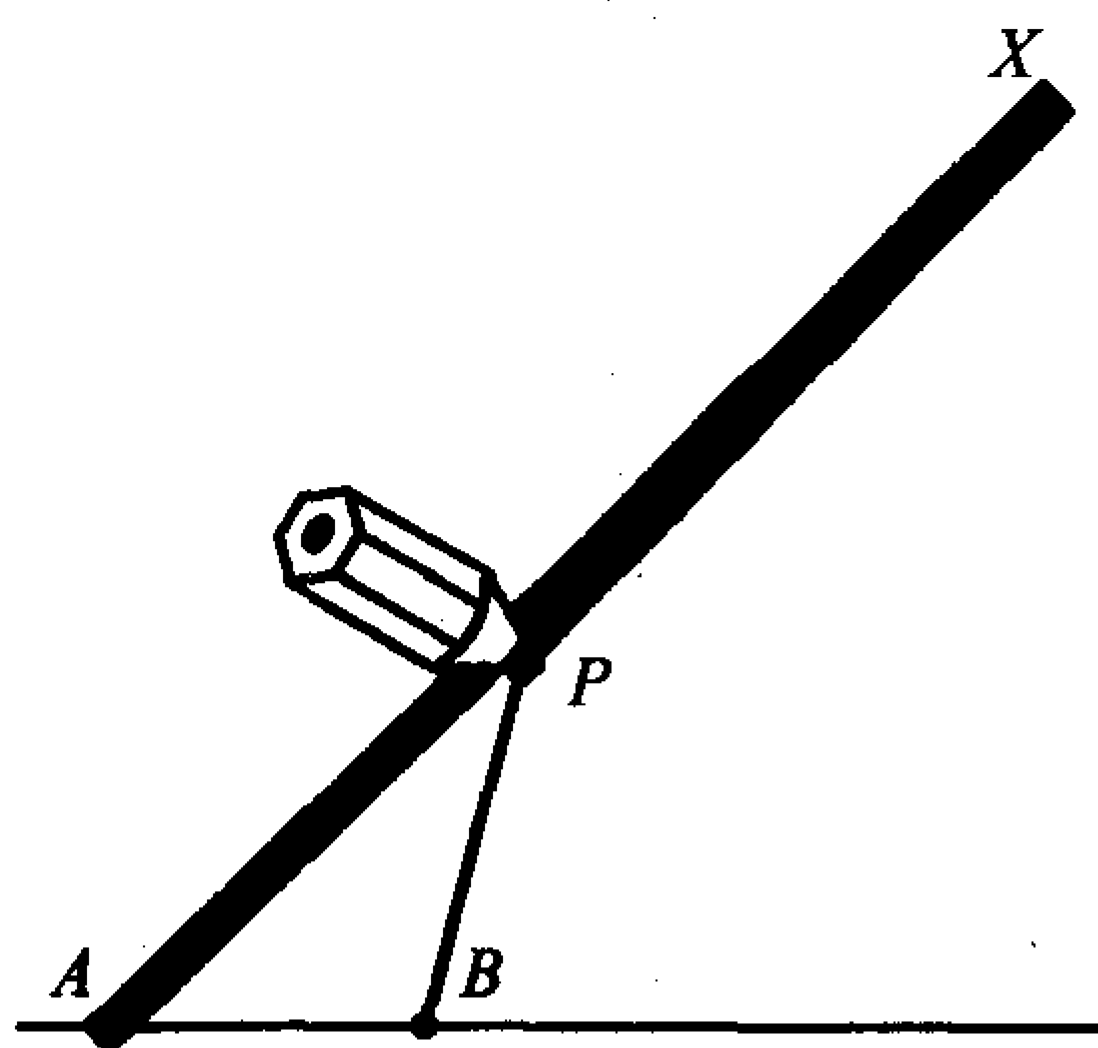


与椭圆一样,双曲线有两个焦点.对双曲线上的任意一点 P, $|PA-PB|$ 是常数.

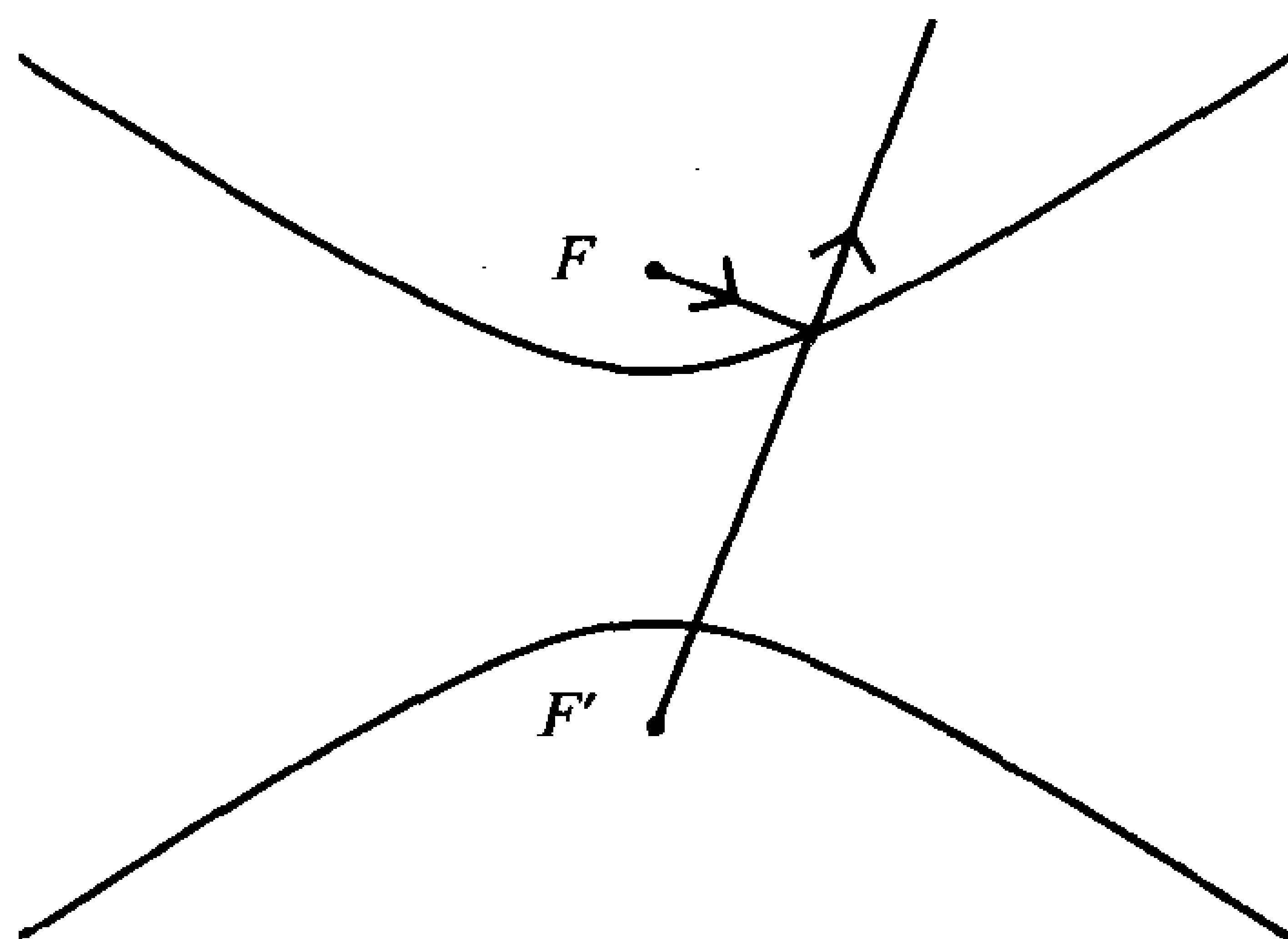
与椭圆和抛物线一样,双曲线也可以用焦点—准线的性质来定义.选一点为焦点,一条直线为它的准线.双曲线的两个分支各是一动点的轨迹,它到焦点的距离与到准线的距离的比是大于 1 的常数.

双曲线可以用器件画出,与画椭圆的方法类似,但是没有那样简单.设 AX 是一条绕 A 旋转的小棒, A 是双曲线的一个焦

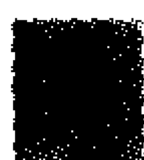
点.把一条长线的一头系在棒的一端,另一头固定在另一个焦点 B 上,然后用笔拉紧长线,图中是不靠在小棒上的 P 点.当小棒旋转时,P 点就画出双曲线的一个分支.

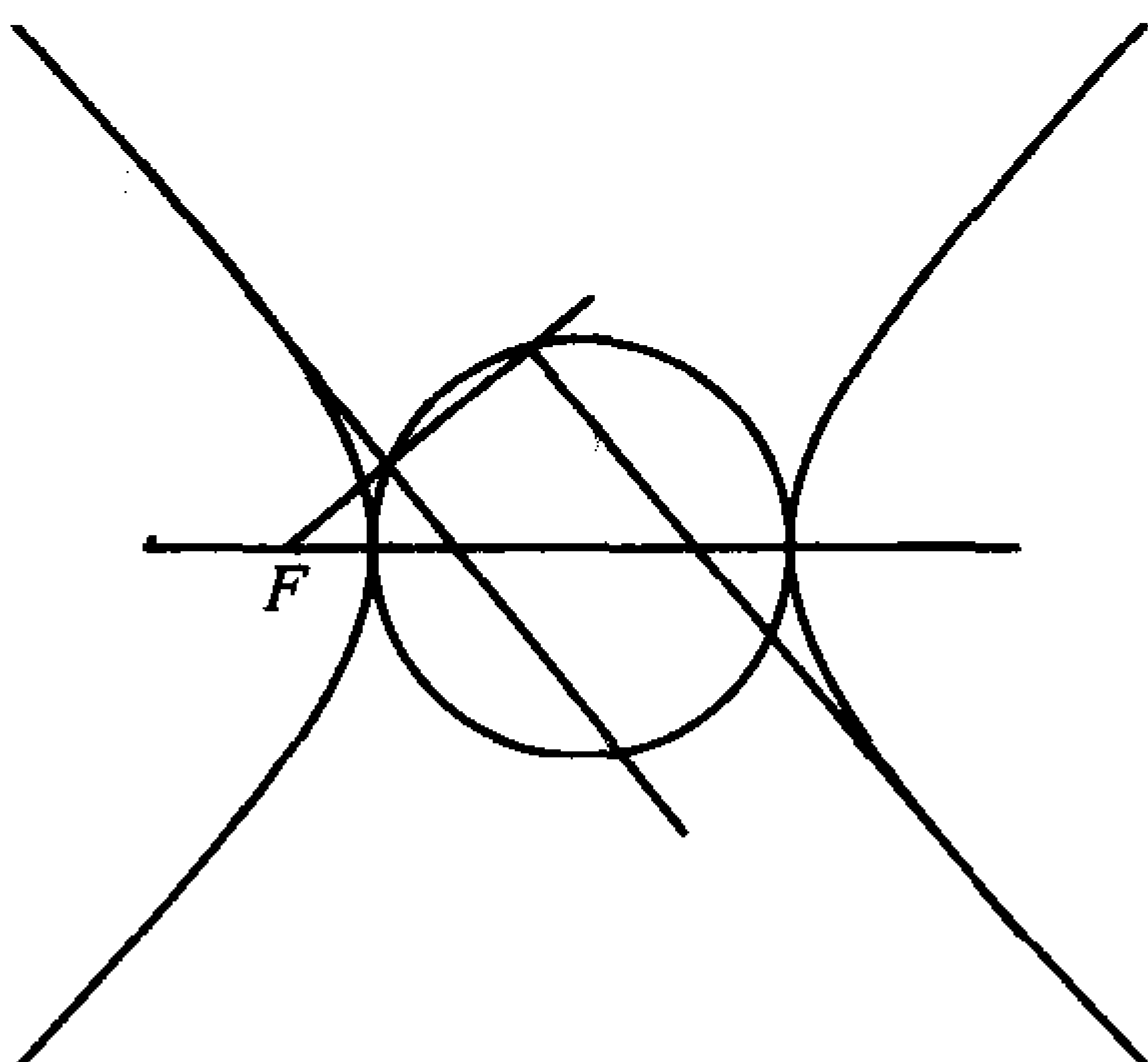


当光线通过双曲线镜面的一个焦点时被反射出来,就像从是另一个焦点射出的一样:

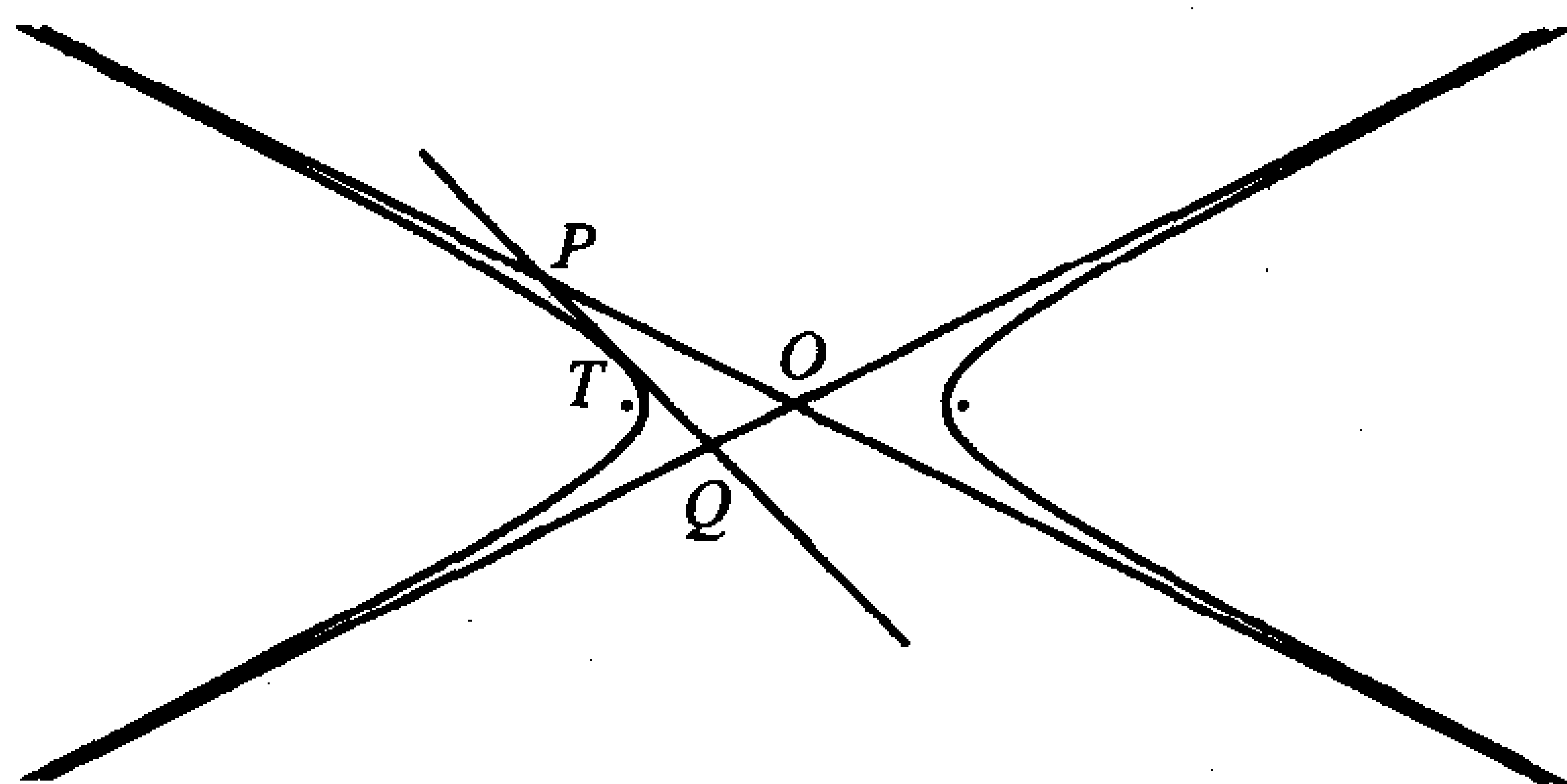


双曲线可以作为一条包络作出,下面是一种作法:画一个圆,取一点 F 作为双曲线的一个焦点.过 F 的直径是双曲线的轴.过 F 任作一直线交圆于两点.过这两个交点各画一条所作直线的垂线,这两条垂线分别与双曲线相切,每一条切线切一个分支.对过 F 的不同的直线重复这一作法就出现双曲线.





双曲线有许多其他性质.例如,如果双曲线的过 T 点的切线与渐近线相交于 P,Q,两条渐近线相交于 O,那么 $OP\times OQ$ 是常数,并且 $PT=QT$,这是阿波罗尼斯证明的.



hyperbolic geometry　双曲几何

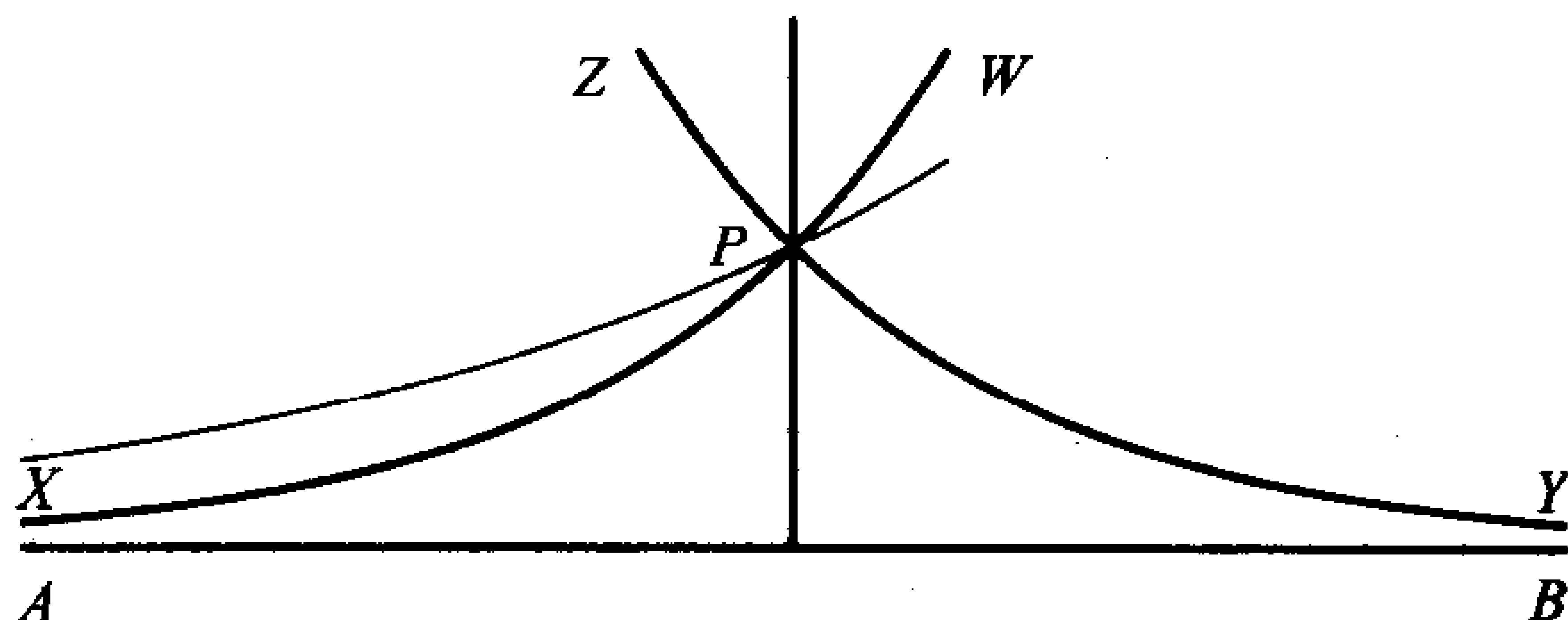
欧几里得在《几何原本》中断言:

如果一条直线与两条直线相交,同旁内角的和小于两个直角,那么无限延长这两条直线,必在小于两个直角的那一边相交.

这就是著名的第五公设,它较为复杂,足以作为一个定理,但是无论是欧几里得,还是后人都没能证明它.

鲍尔亚(Bolyai)和罗巴切夫斯基(Lobachevsky)独立地认为在原则上是不能证明的,并在某种意义上应予以否定.他们各

自假定有两条经过 P 的称为极限射线的不同直线 WPX 和 ZPY，它们不与直线 AB 相交，这样一来，经过 P 点且在角 XPY 内部的任意直线都与直线 AB 相交. 对于经过 P 点且在角 XPZ 的内部的直线，没有一条会与直线 AB 相交. 他们认为这些直线都“平行”于 AB，于是有无穷多条经过 P 点的直线平行于 AB.



1871 年克莱因把这种几何称为双曲几何. 在双曲几何中，三角形的内角和总是小于两个直角. 如果三角形很小，那么内角和接近于两个直角.

三角形由其内角定义；在双曲几何中，没有相似三角形这一概念，因为角相同的两个三角形是全等的. 三角形的面积等于 $K(\pi-\alpha-\beta-\gamma)$，这里 K 是常数，α，β 和 γ 是三角形的三个角. 表达式 $\pi-\alpha-\beta-\gamma$ 称为该三角形的缺损. 多边形也有自己的缺损. 如果两个多边形的缺损相同，那么称它们为可以互相切割的.

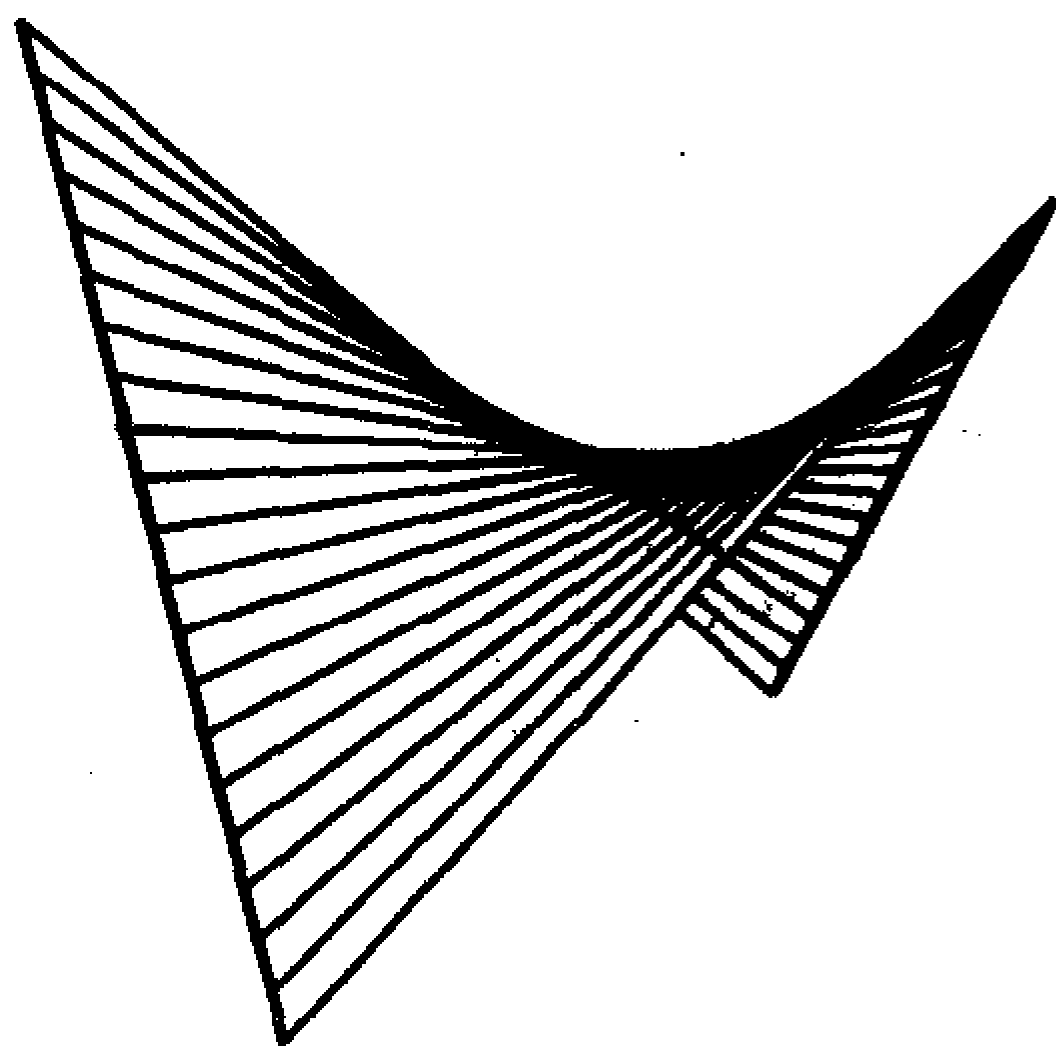
一个三角形可以有三个零角，它的所有的边都是无限长的有限射线，它的缺损达到最大值，即两个直角. 但它的面积是有限的.（据考科塞特(Coxeter)记载，刘易斯·卡洛尔(Luwis Carroll)不能接受这一结论，反而下结论说非欧几何一定是毫无意义的.）

圆的周长与半径不成正比，而比半径增大得快得多，大约是指数增长. 但是当半径很小时，粗略地成正比.

在一定的范围内，随着双曲几何的常数趋近于无穷，双曲空间就变得“扁平”，成为欧氏几何. 因此，双曲几何包含了欧氏几何，并把它作为一种特殊情况. 罗巴切夫斯基认识到了这一点，就把他的新几何称为“泛几何”.

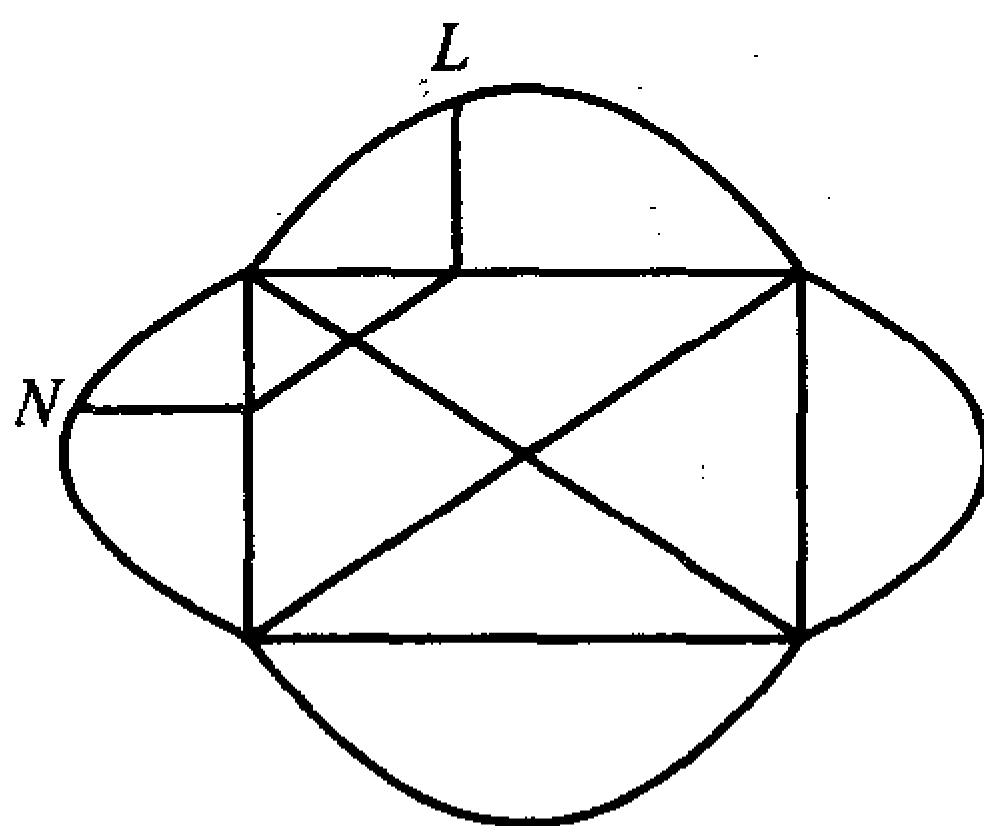
hyperbolic paraboloid　双曲抛物面

马鞍形的二次曲面的在其两个互相垂直的方向上的截得曲线都是抛物线，第三个垂直的方向是双曲线. 所有这些双曲线的渐近线形成两个平面，这两个平面经过所有这些抛物线的公共轴. 与旋转双曲面一样，它的表面包含两簇称为母线的直线.

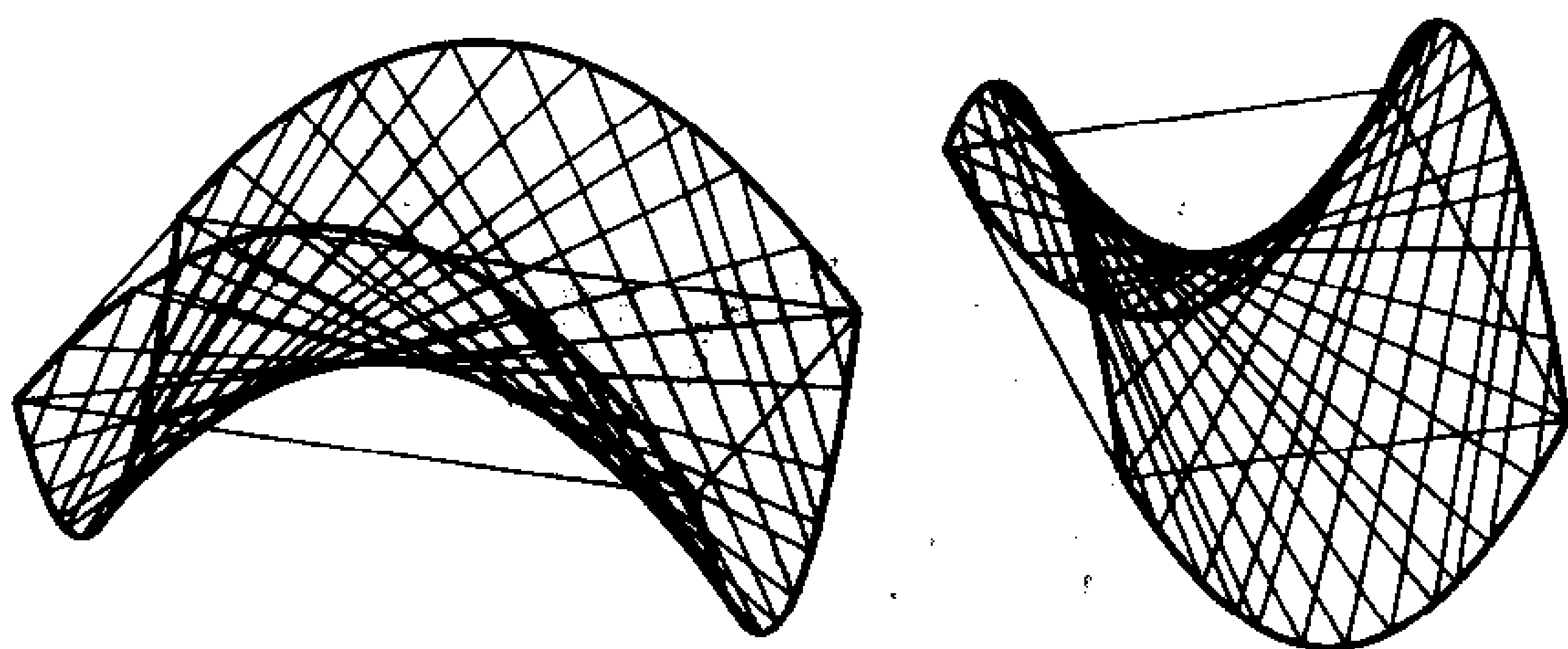


从三维的空间四边形出发，可以做成一个模型. 连接对边中点的两条线必相交. 如果各边被分成四段，那么连接把各边分为四段的相应的点所得的两对直线也必相交，并且必与连接这些中点的直线也相交. 继续这一过程，就形成这个曲面，每一条线都是母线.

上图表示具有一簇母线和第二簇中的一条直线的空间四边形，这一条直线在鞍点上.



麦克克莱(McCrea)描述了作一个这样的模型的另一种方法.画一个矩形,在它的每一条边上各作一条高相等的抛物线.把一条对角线任意等分,于是求出抛物线上的分点,如图中的 L 和 N.把两边向上弯,两边往下弯,然后像第二张图那样连接各分点.这一模型更清楚地显示了抛物线的作用.与前面相同,这两簇直线都是母线.



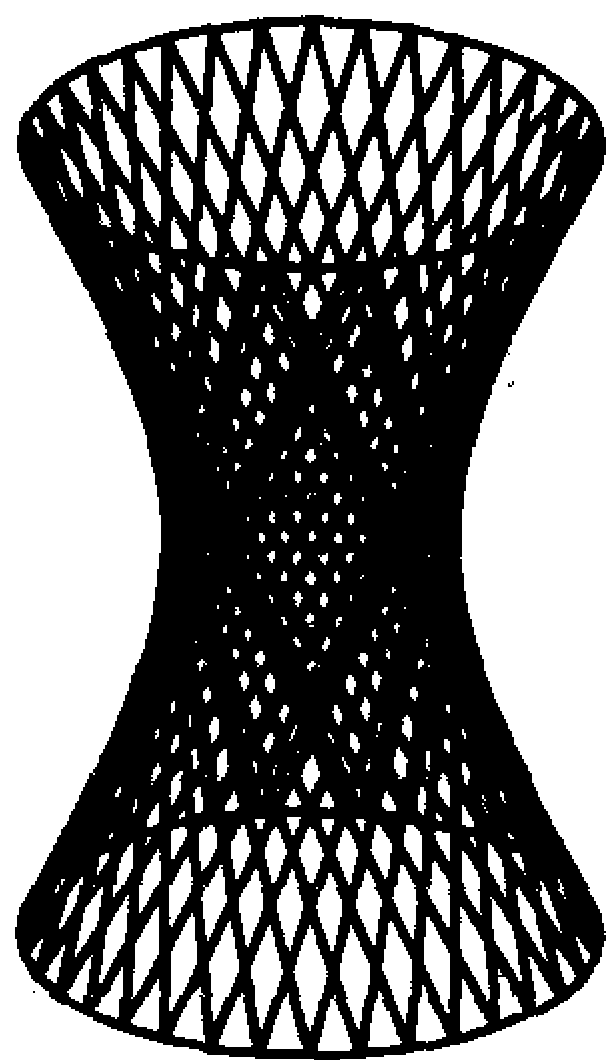
第三种方法在数学上是重要的,但不能操作.它从平行于同一平面但相互不平行的三条异面直线出发.过其中一条直线上的任意一点,必有唯一的直线与另两条直线都相交.所有这样的直线组成双曲抛物面的一簇母线.与这簇直线中的每一条都相交的直线簇,包括原来的三条直线在内,组成了第二簇母线.

参考书:M. H. McCrea, *Analytical Geometry of Three Dimensions*, Oliver and Boyd Edinburgh, 1947.

hyperboloid of one sheet　单叶旋转双曲面

把一根针穿过一根火柴,再把另一根火柴插到这根针的一端.如果这两根火柴平行,那么第一根火柴绕它的长轴旋转时,第二根火柴将画出一个圆柱面.但是如果两根火柴不平行,并且不在同一个平面内,那么第二根火柴将画出一个单叶旋转双曲面.克里斯托夫·雷恩(Christopher Wren)爵士是首先认识到单叶旋转双曲面包含两簇直线的人.)第二根火柴旋转时的位置

确定了曲面的一簇母线. 这一簇母线中的任何两条都不相交，任何三条都不平行于同一平面.



如果改变第二根火柴的方向，使它的指向往后，而不是向前，但角度的大小不变，那么它将画出同样的曲面，这从直观上看似乎是显然的. 的确是这样，它的位置是第二簇母线，其中每一条线都与第一簇中的每一条线相交(有一个例外:第一簇中的一条与它相对的直线，它们是平行的).

这种类型的两个同样的曲面能用作为制造歪伞齿轮的基础，利用这类曲面的一个旋转轴可以把运动方向转变到一个与原方向既不互相平行又不相交的轴. 曲面可设计得使一个曲面上的母线与第二个曲面上的母线对齐，于是两个曲面互相滚动.

这种旋转抛物面自然有一个垂直于旋转轴的圆形截面. 一般的单叶双曲面的截面是椭圆.

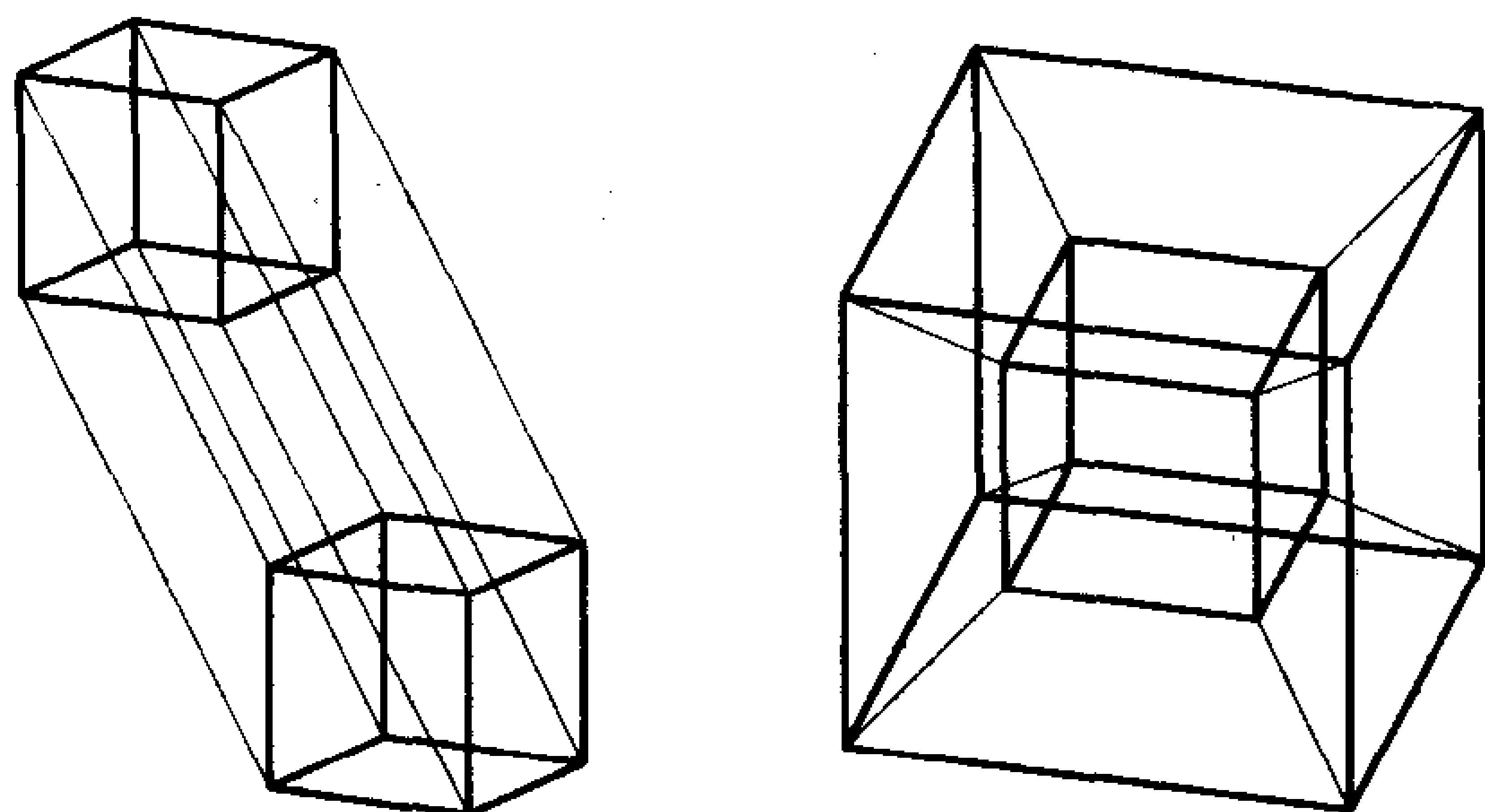
有一种实用的方法可构成这样的曲面:在同一个轴上取两个平行的圆或者椭圆，它们的轴也平行. 从椭圆的中心出发作几个相等的角，于是把每一个椭圆分成同样多的部分. 如果把上面的椭圆的每一个分点与下面的椭圆的前 N 个分点连接，那么这些连线将形成一个单叶双曲面. 每次往后 N 步就得到第二簇母线.

如果一个模型是由硬的金属线而不是根据需要就拉紧的细线制成，那么可以显示出一个显著的特征. 如果这两个椭圆靠得很近但没有相对运动，使金属线穿过一簇洞，那么该曲面保持双曲面不变，在极限情况下，变成一个椭圆及其切线的包络.

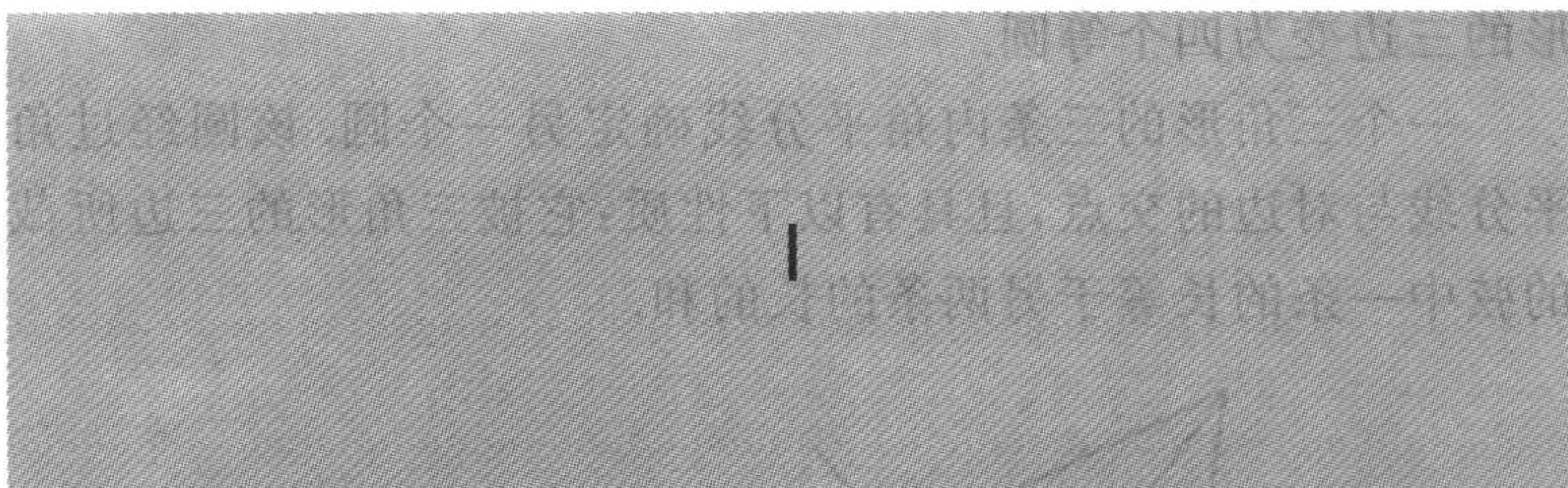
hypercube *or* tesseract　超立方体

超立方体是一种类似于三维立方体的四维的立方体. 就像三维立方体可由复制一个正方形后，把复制的正方形移开，然后连接相应的棱得到那样，超立方体也可以复制一个三维立方体后，再移开后得到.

左下图中是两个全等的正方体的投影图，连接了相应的棱. 右下图中一个正方体放在另一个正方体内；外面一个正方体的每一个面，加上里面的正方体的相应的面和连接它们的四条直线段组成这个超立方体的一个立方面. 连同原来的两个正方体，总数是 8 个立方面（或胞腔），它有 24 个平面，32 条棱和 16 个顶点.



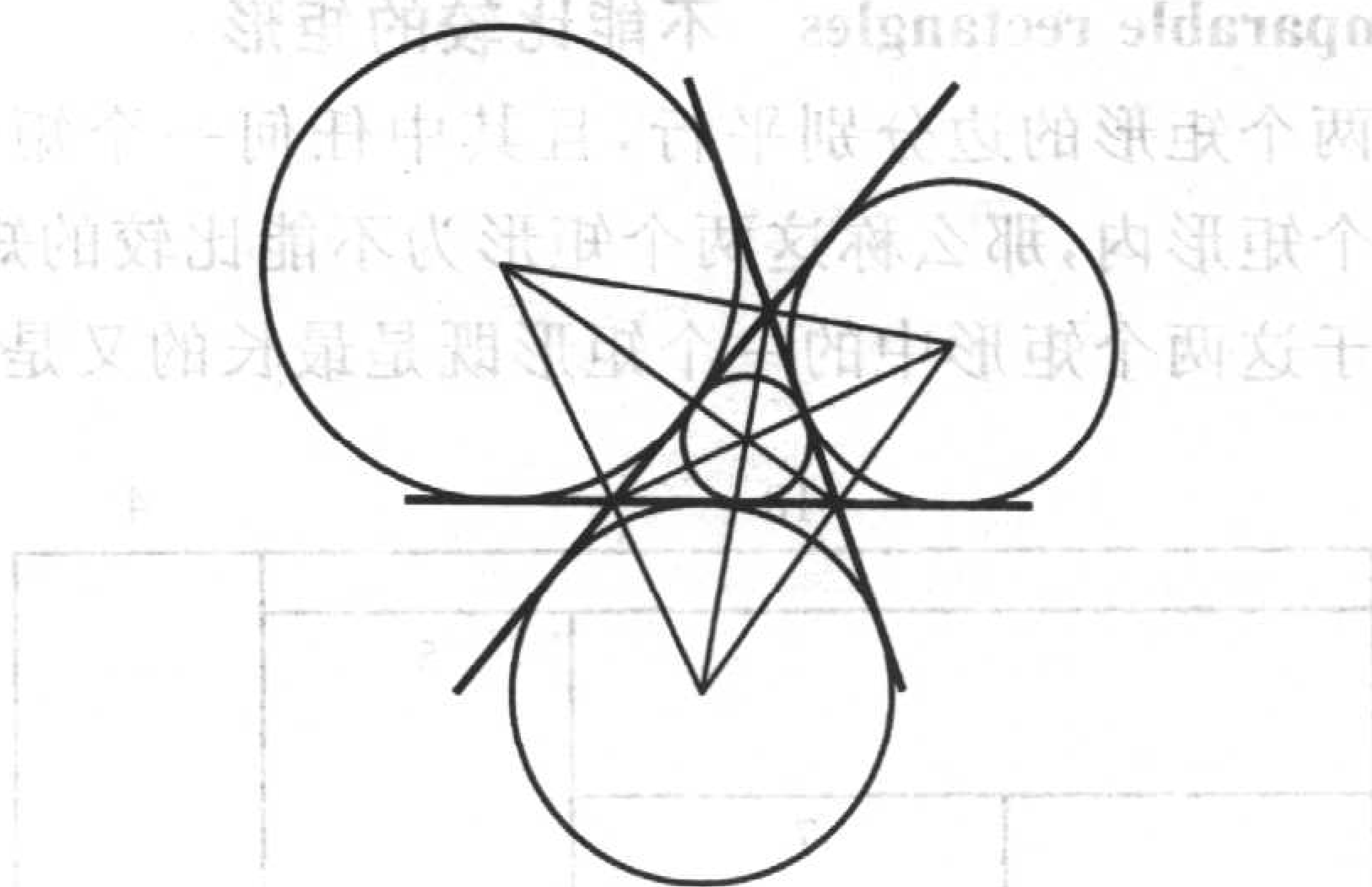
超立方体有 8 条连接各对相对顶点的主对角线. 它们分成两组，每组四条，每一组互相垂直. 超立方体的对偶是 16 -胞腔（cell）.



incentres and excentres of a triangle　三角形的内心和旁心

与三角形的三边都内切的圆是唯一的；与三角形的一边外切，与另两边内切的圆有三个.

该三角形的三条内角平分线和三条外角平分线形成一个大三角形及其三条高，它们的交点是这些圆的圆心.



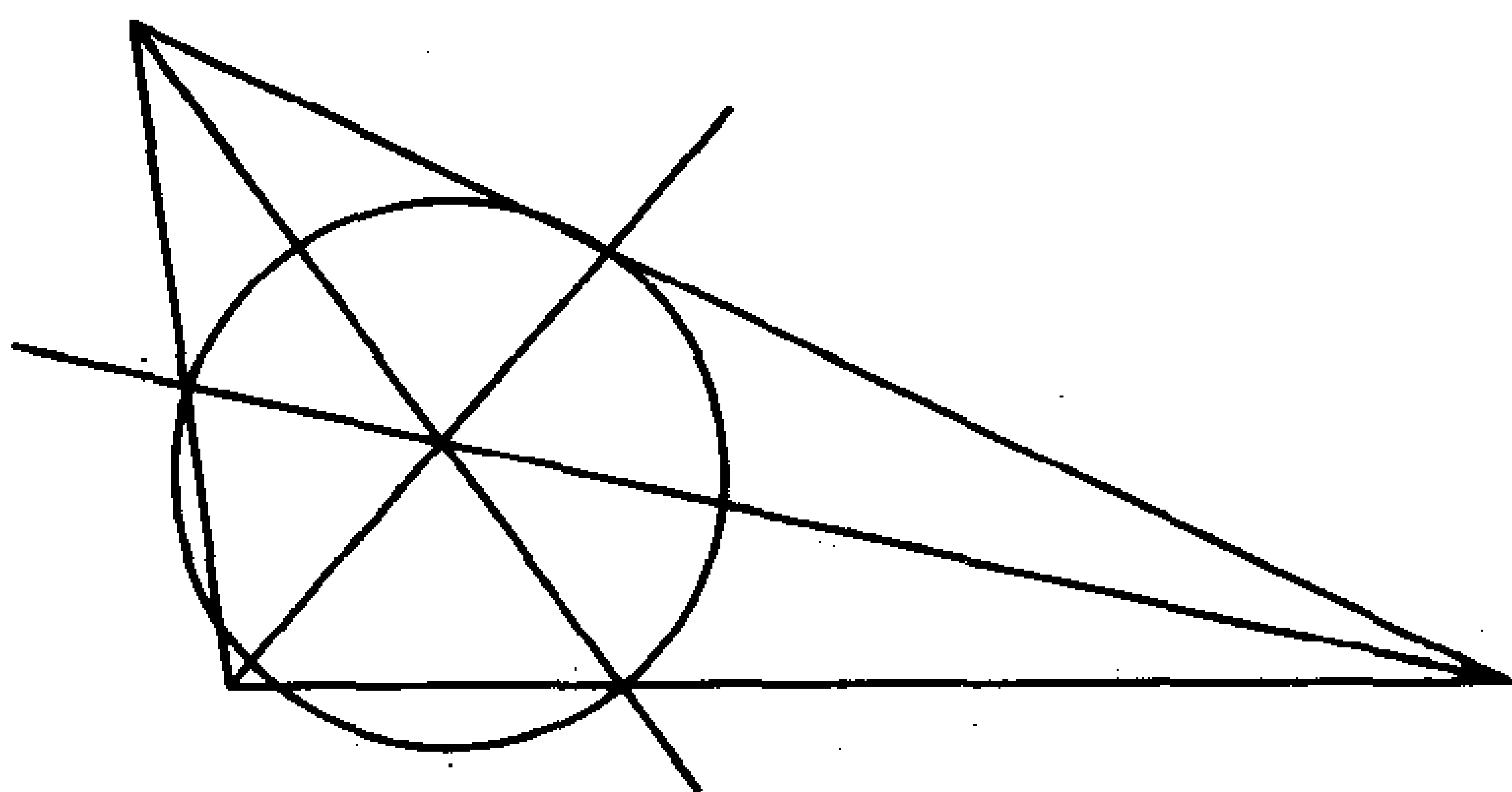
如果这些圆的半径是 r, r_a, r_b 和 r_c，那么 $\frac{1}{r}=\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}$.

此外，如果外接圆的半径是 R，那么 $r_a+r_b+r_c-r=4R$，三角形的面积是 $\sqrt{r_a r_b r_c r}$.

连接三角形的顶点与内切圆的切点的直线相交于一点，这一点称为热尔岗(Gergonne)点. 连接三角形的顶点与旁切圆的切点的直线相交于一点，这一点称为纳格尔(Nagel)点.

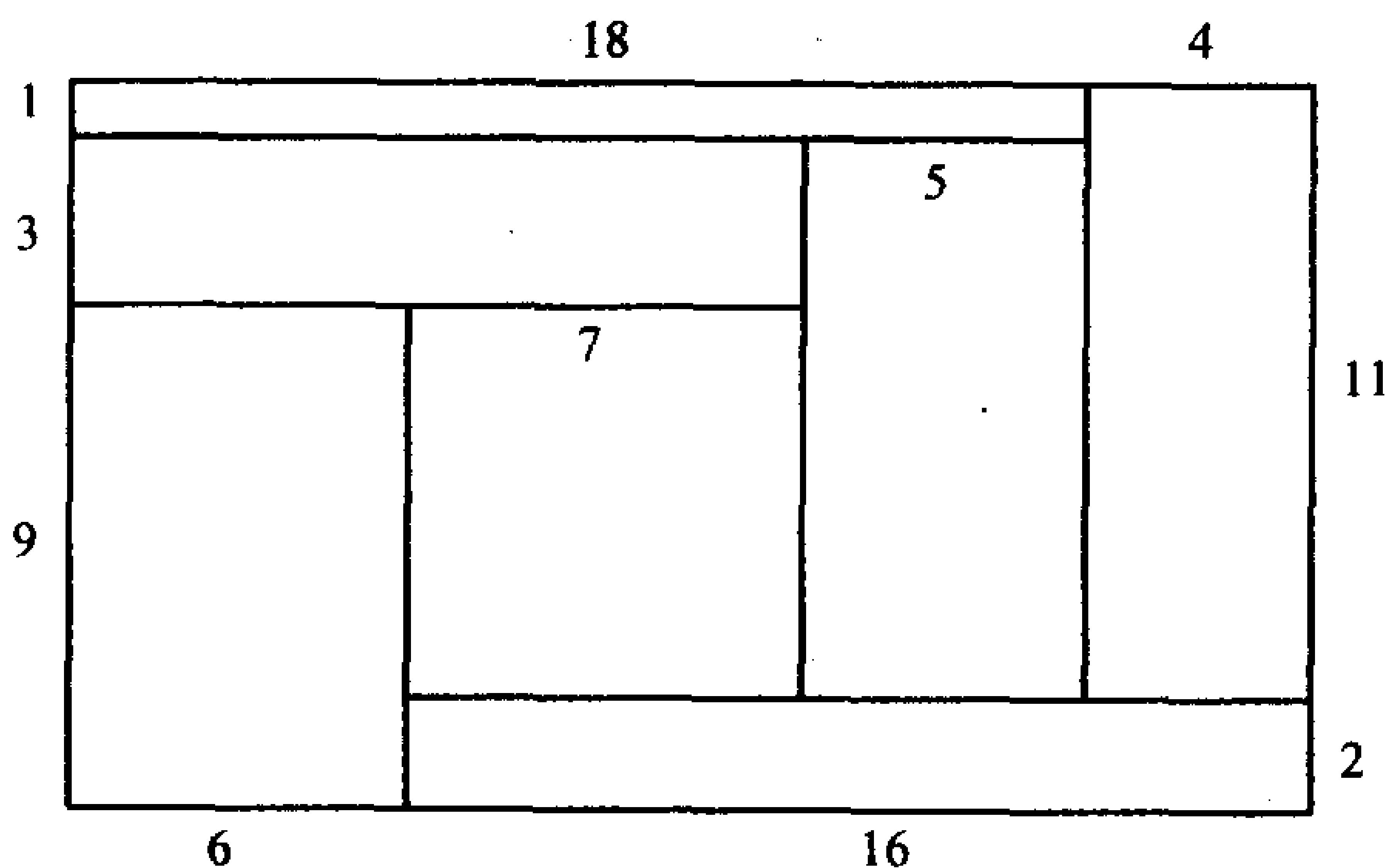
将以上图形关于四个圆中的任意一个反演，则该圆和三角形的三边变为四个等圆.

一个三角形的三条内角平分线确定另一个圆. 该圆经过角平分线与对边的交点，且具有以下性质：它被三角形的三边所截的弦中一条的长等于另两条的长的和.



incomparable rectangles　不能比较的矩形

如果两个矩形的边分别平行，且其中任何一个矩形都不能放进另一个矩形内，那么称这两个矩形为不能比较的矩形. 这种说法等价于这两个矩形中的一个矩形既是最长的又是最狭的.



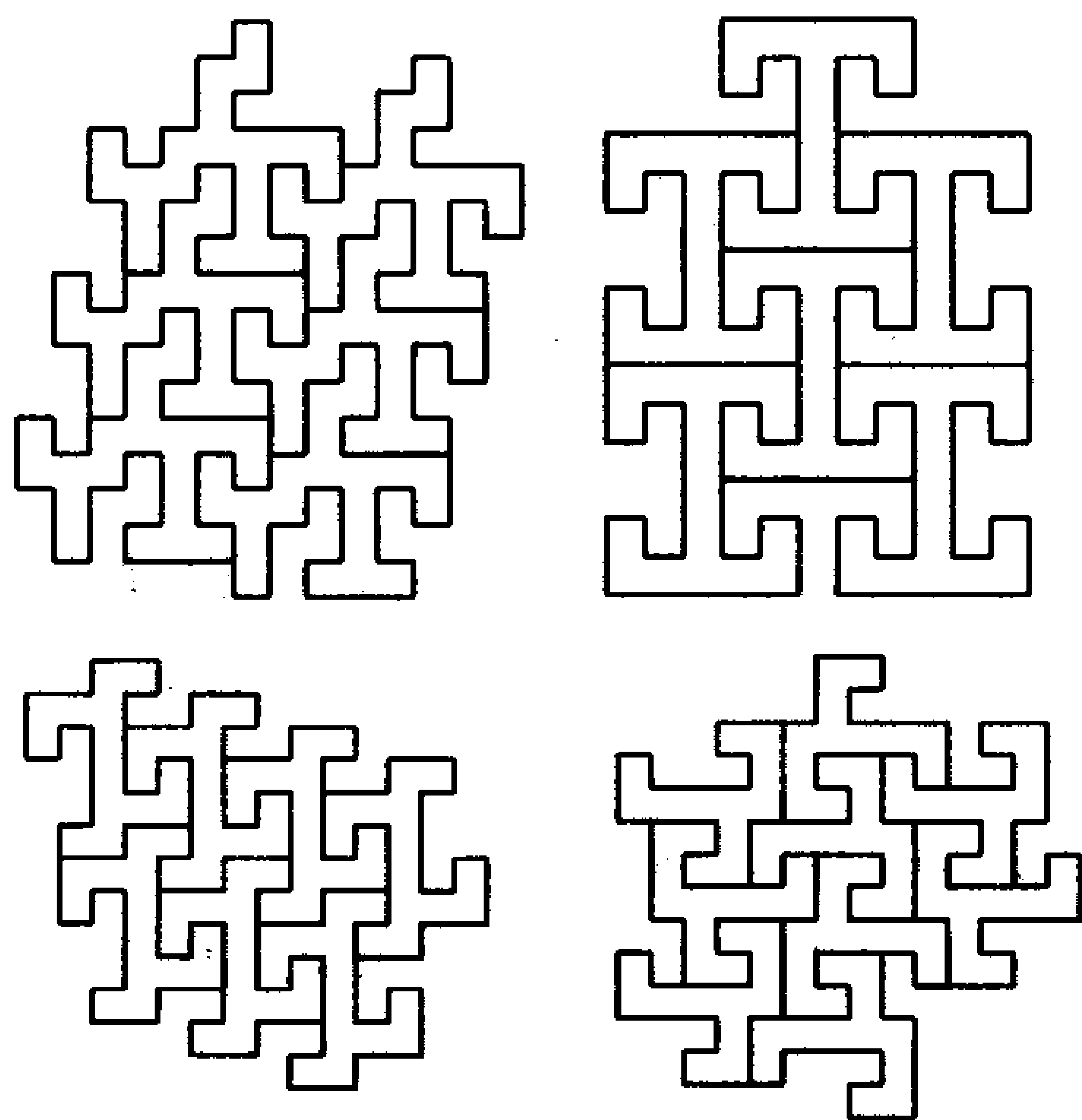
至少能用多少个不能互相比较的矩形拼成一个矩形？答案是至少必须 7 个，最多是 8 个. 上面的 22×13 的矩形是边长为

整数、且能由不能互相比较的矩形拼成的最小矩形(无论是面积还是周长都最小).

interlocking polyominoes　连锁多米诺

所谓多米诺,指的是由若干个同样大小的正方形整条边和整条边拼成的图形.

如果用一套同样的多米诺组成一个连锁的相嵌图形,那么一个多米诺会是怎么小? 这是一个模棱两可的问题,因为到底是要求这些多米诺成对地连锁,还是只要求它们都能各得其所还不明确.

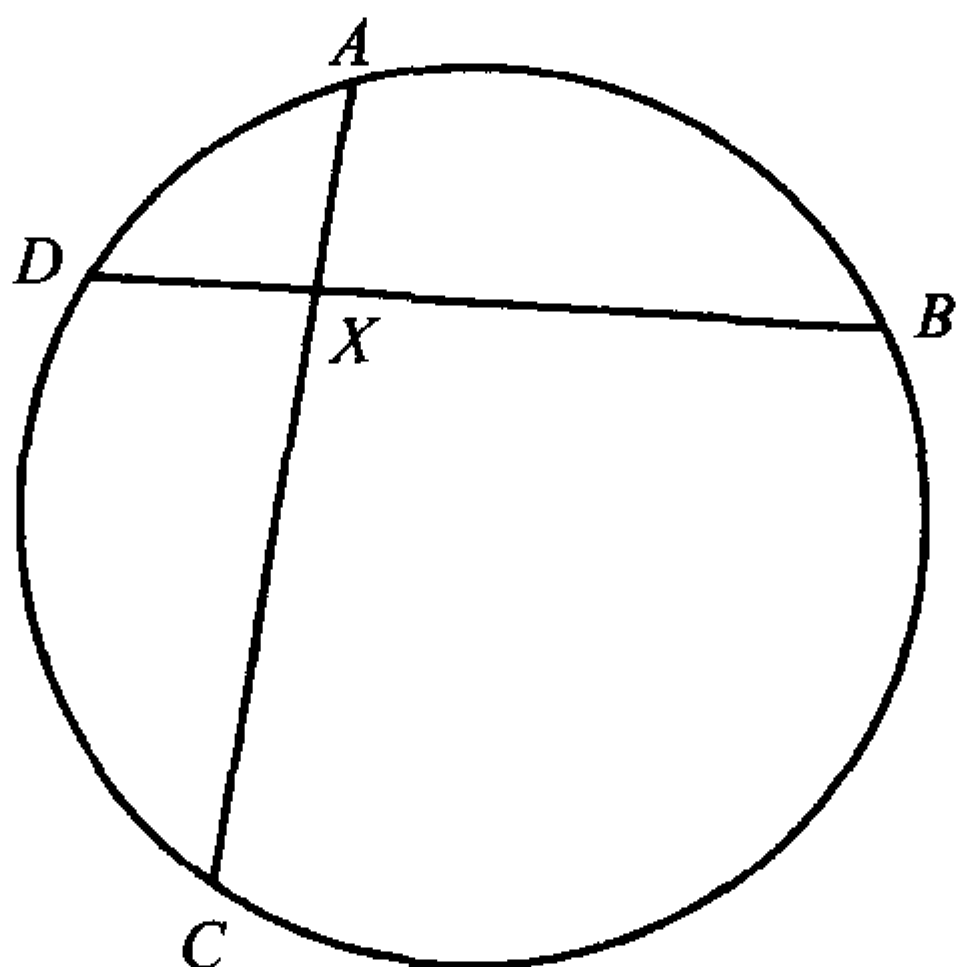


上述这些解是鲍勃·纽曼(Bob Newman)发现的. 第一套是各自连锁的,第二套是大家熟知的,第三套是所有的多米诺各得其所地连锁,也恰好是对称的. 第四种类型是将多米诺翻转后得到的,但每一块只用 12 个单位.

参考书:DAVID WELLS(Recreation in Logic), New York, 1979.

intersecting chords of a circle　圆的相交弦

一个相交的图形可以简单到什么程度？在下图中，如果一个圆的两条弦相交，那么有 $AX \times XC = BX \times XD$.



如果 X 在圆外，过 X 向圆作的一条切线切圆于 T，那么

$$AX \times XC = BX \times XD = XT^2.$$

还有
$$\frac{\text{arc}AB + \text{arc}DC}{\text{arc}BC + \text{arc}DA} = \frac{\angle AXB}{\angle CXD}.$$

如果这两条弦互相垂直，那么正如阿基米德所证明的，有

$$\text{arc}AB + \text{arc}CD = \text{arc}BC + \text{arc}DA.$$

intersecting cylinders　相交圆柱

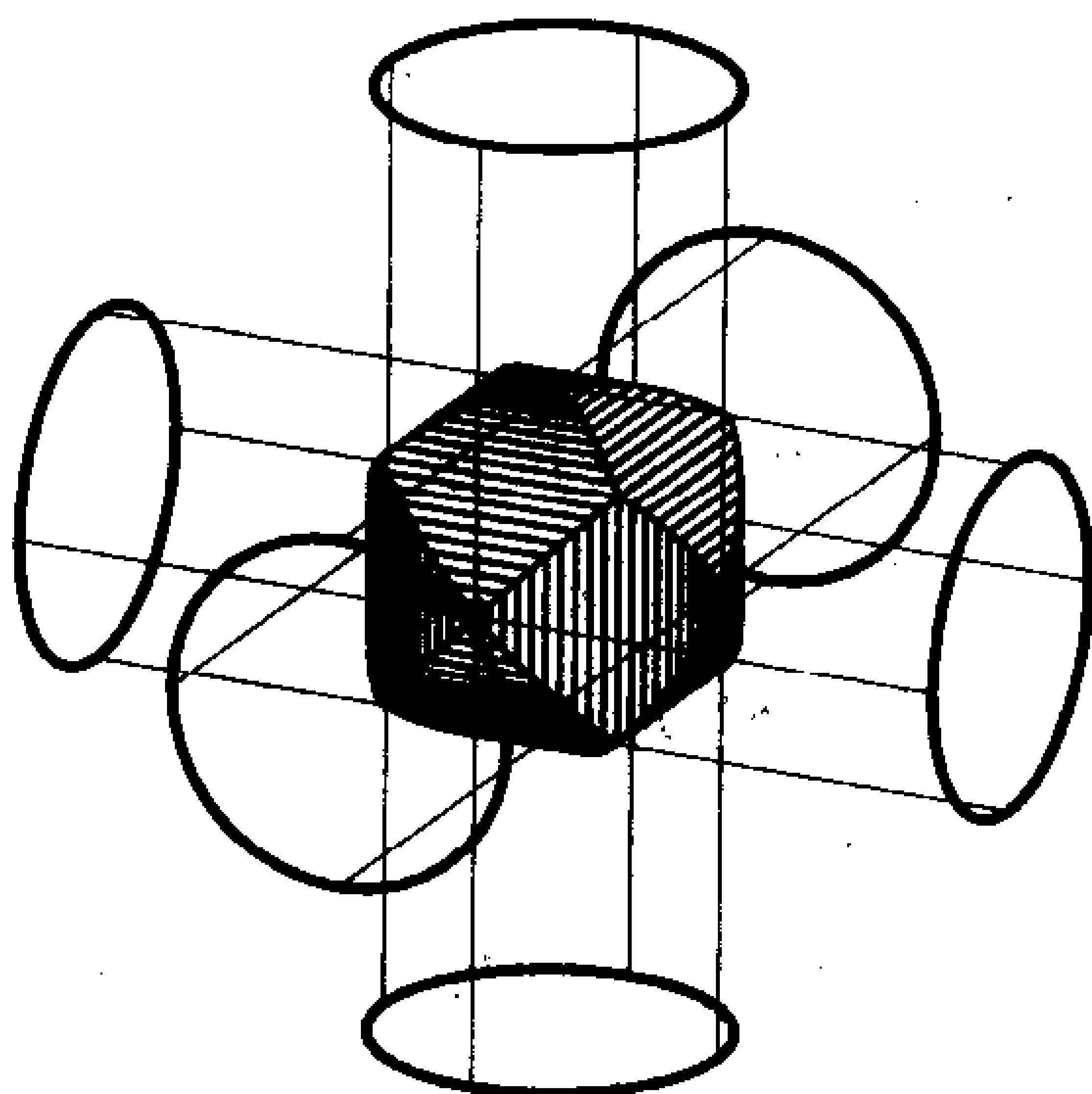
如果直径都是 d 的三个圆柱两两相交成直角，那么它们围成一个由 12 个曲面组成的立体图形. 它的体积是 $(2-\sqrt{2})d^3$.

如果过连接三个面相交的顶点的所有母线作切面，那么所得到的图形是菱形十二面体.

只有两个相同的圆柱垂直相交成直角时所形成的图形就相当简单了. 阿基米德和中国数学家祖冲之都知道它的体积，不用计算就能求出其体积为 $\frac{2}{3}d^3$.

如果四个圆柱的轴具有正四面体那样的对称性，那么它们可以对称相交，且形成一个有 24 个面的立体图形，它与正方体的内

接正八面体类似，体积是$\frac{1}{3}\left(3+\frac{2}{3}-\frac{4}{2}\right)d^{3}$*.

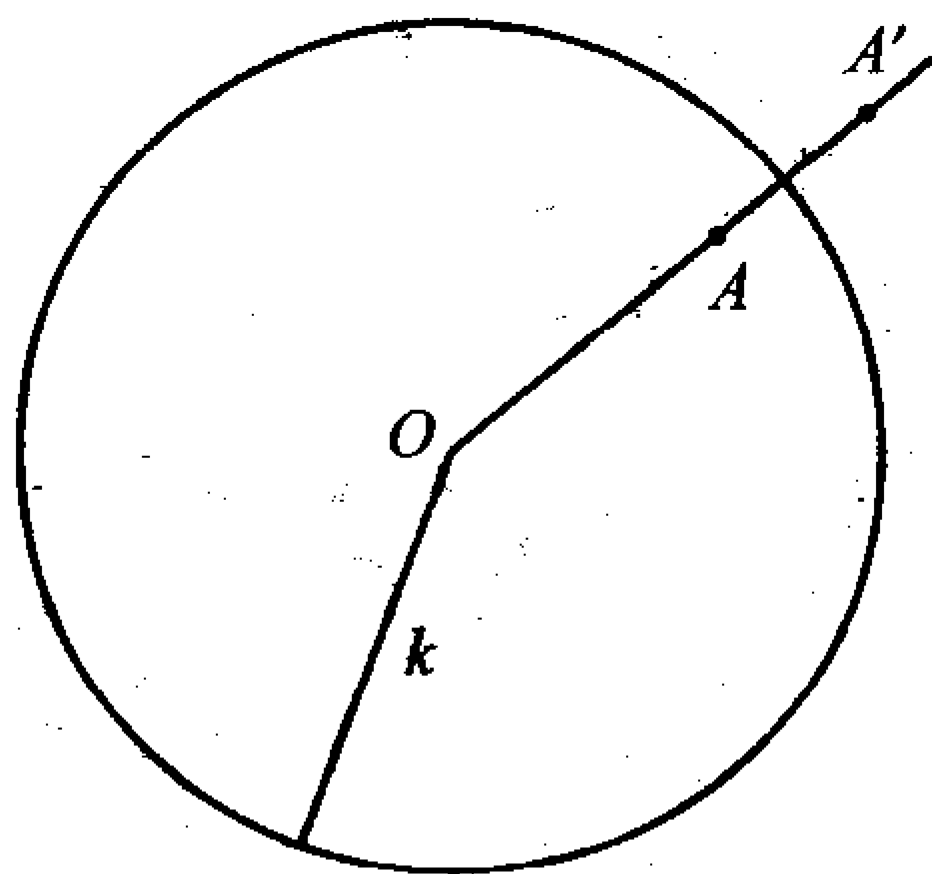


参考书：M. MOORE, Symmetry intersections of right circular cylinders, *Mathematical Gazatte*, No. 405, 1974.

inversion 反演

反演是把一个平面图形变为另一个平面图形的一种变换，它以一个特定的反演圆为基础，其圆心称为反演中心.（在三维的情况下，利用反演球也可把一些空间图形变换为另一些空间图形.）

如果圆的半径是 k，那么点 A 的反演是 OA 上的 A'，使 $OA\times OA'=k^2$.



---

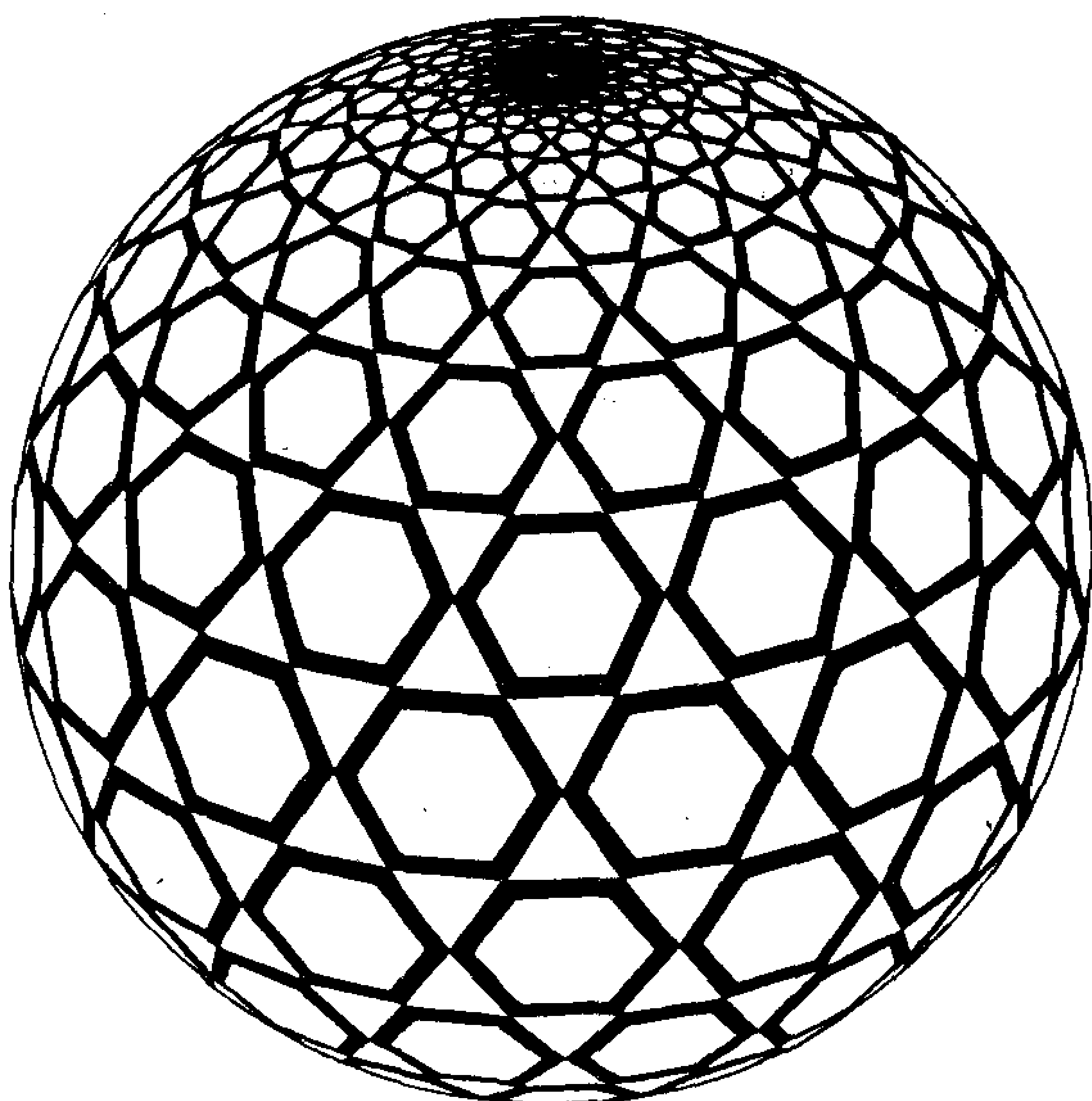
* 译者注：原书的数据似有误.

反演圆本身，与它正交的圆，经过其圆心的直线在变换下不变. 此外，角保持不变，圆和不经过反演中心的直线都反演为圆.

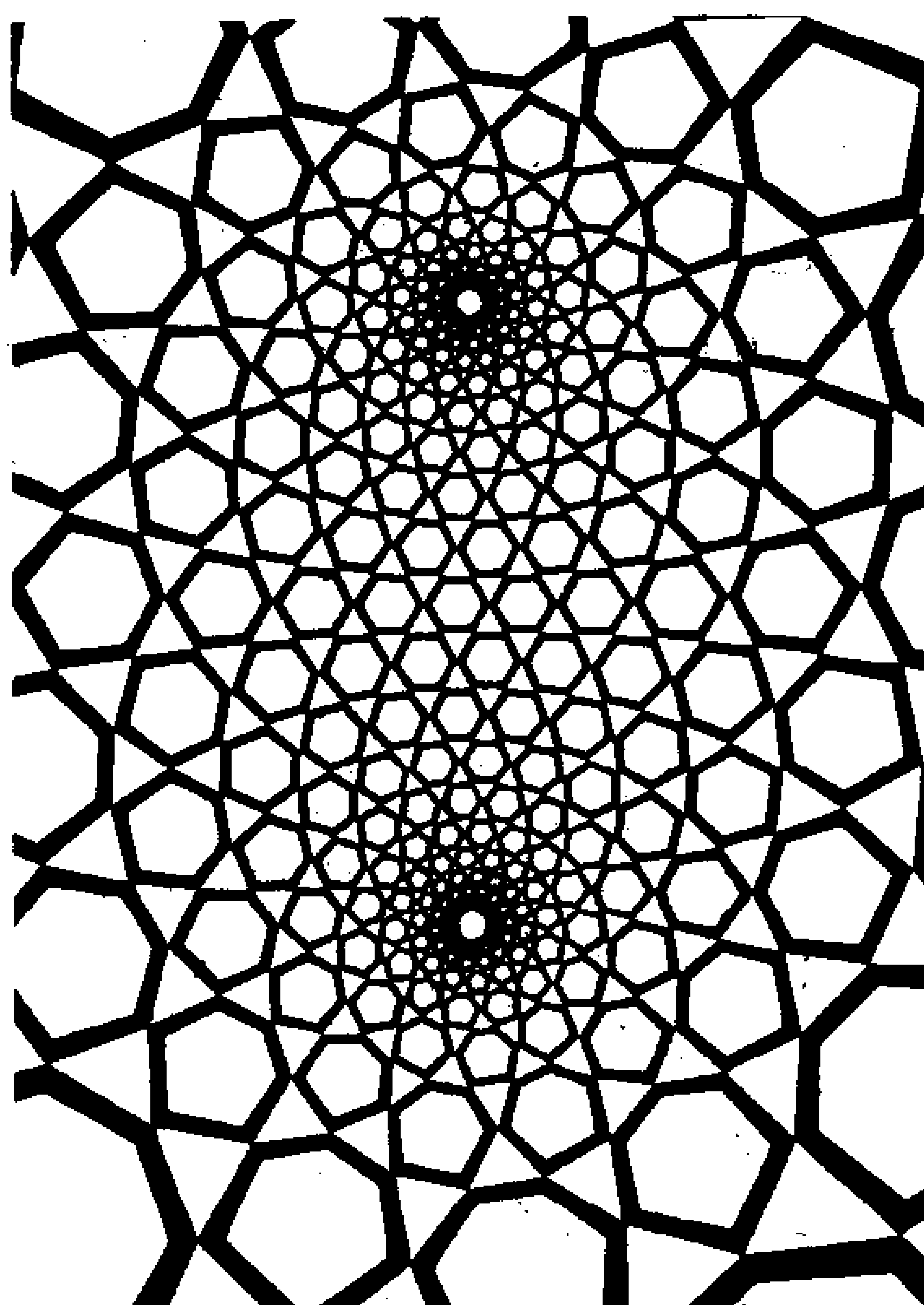
这一变换可以通过变换把一个定理转化为一个既熟悉，又明显的另一个定理来证明原来的定理. 例如，斯坦纳(Steiner)圆链可以利用把该图形反演为两个同心圆来证明，这样结果就变得明显了. 索迪(Soddy)的六球也能被反演. 斯坦纳了解这一反演的过程，但是并没有揭示其中的奥秘，因为他用不少奇怪的似乎是很难的定理使他的同事们感到为难！

布色里尔(Peaucellier)的胞腔(cell)也可以用来反演一条曲线. 许多著名的曲线互为反演. 例如，如果把焦点作为反演中心，那么抛物线就变为心脏线；如果把顶点作为反演中心，那么抛物线就变为笛奥克尔斯歧点蔓叶线(cissoid of Diocles).

下面两张图与球的反演有关. 第一张中的六边形和三角形往球面上的两点挤，这两点显然是南北两极. 第二张图是在对球面上的球面镶嵌的反演的结果.



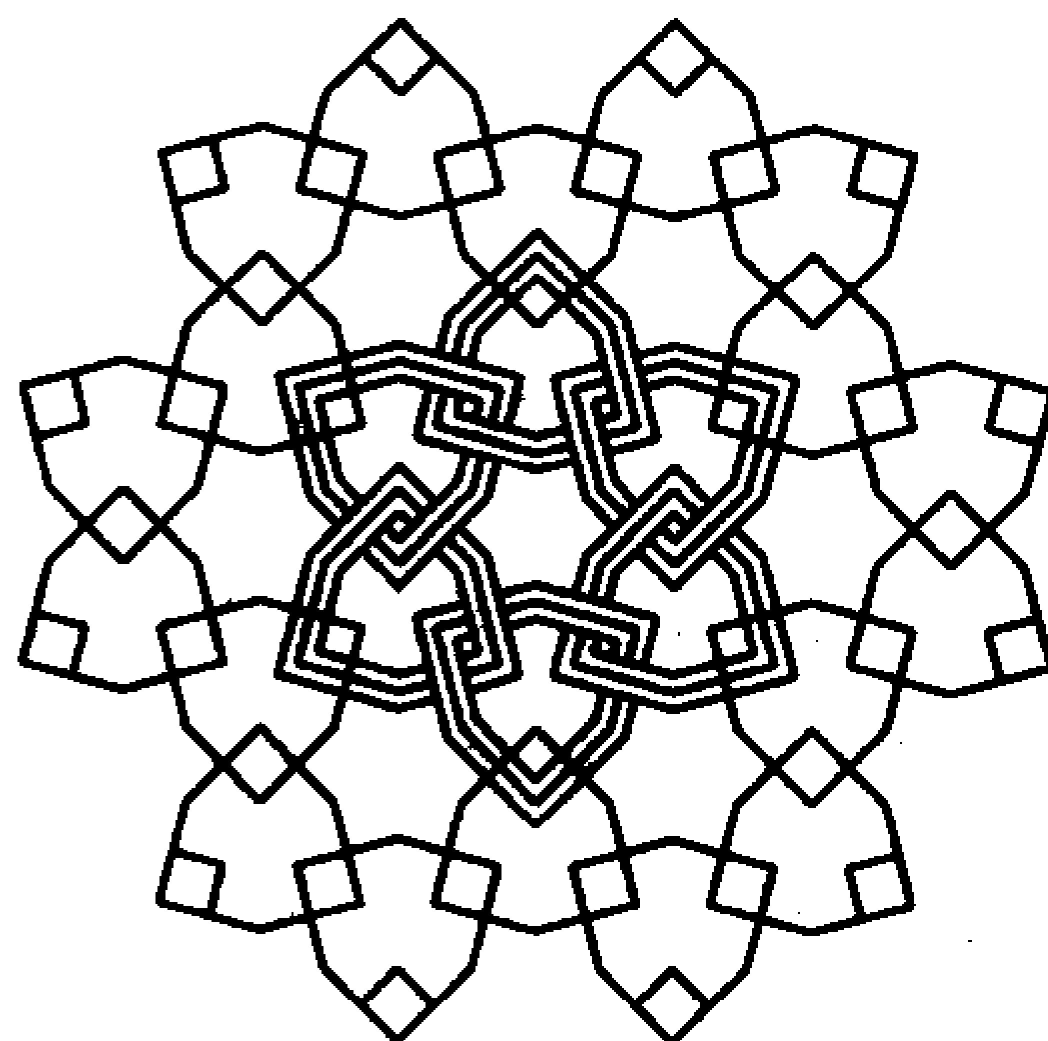




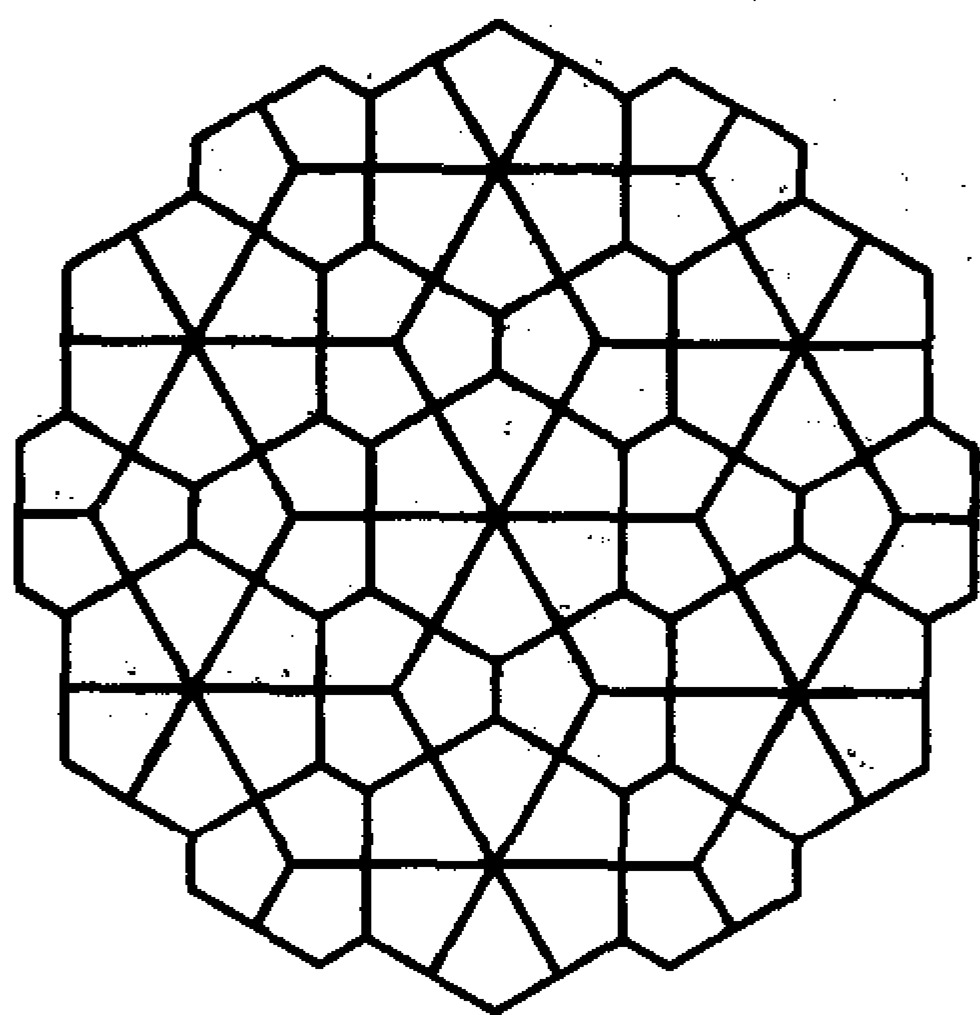
参考书:R. DIXON, *Mathographics*, Basil Blackwell, Oxford, 1987.

Islamic tessellations　伊斯兰镶嵌

伊斯兰艺术家在各种物品中使用镶嵌的技法和复杂多变是著名的. 例如,所有十七种可能的墙纸图案都只是在阿尔罕布拉(Alhambra)宫内找到. 其中有许多式样是交织在一起的.

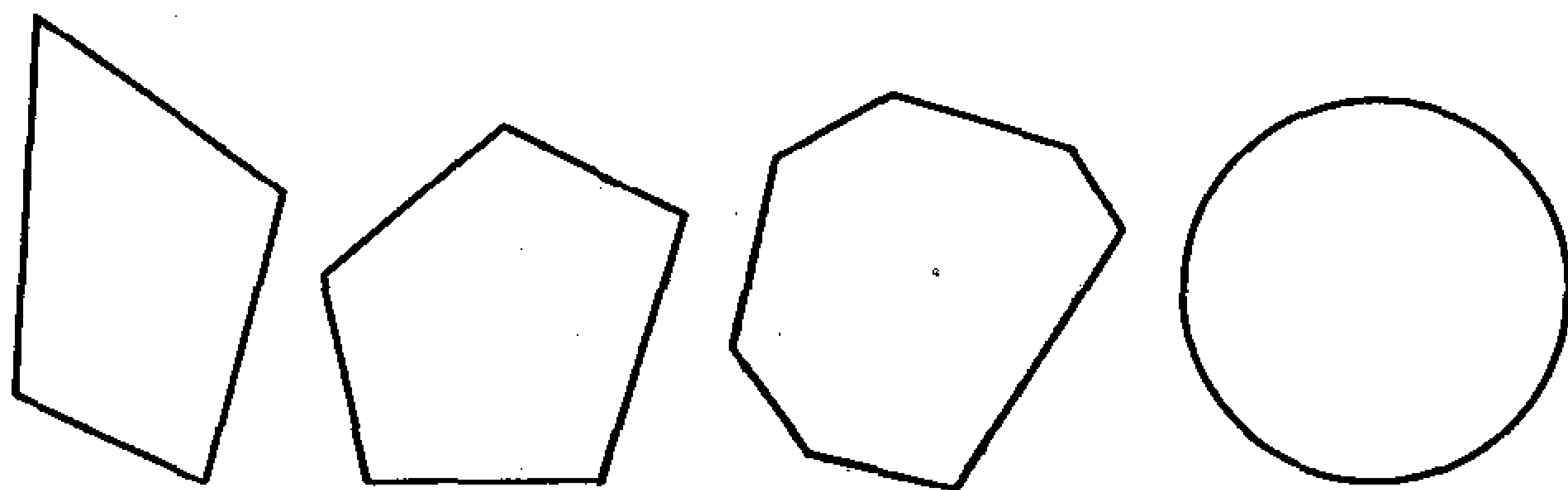


所有这些复杂的式样都可以从各种不同的角度来“看”. 下面的式样可以看作为由钻石组成的式样，每一块钻石都分为两个四边形和两个五边形，也可以看作是由一些车轮的辐条和截头的等边三角形组成的正六边形组成的式样，也可以看作是由分割成四个小六边形和七个截头的等边三角形的大六边形组成的式样，等等.

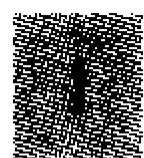


isoperimetric problem　等周长问题

等周长定理是说，在具有同一周长的平面图形中，圆的面积最大.



这一定理具有悠久的历史. 柴诺杜鲁斯(Zenodorus)是阿基米德以后的某个时代的人，他证明了圆的面积大于具有同一周长的任何多边形的面积. 帕普斯在下面一段著名的话中讨论了蜜蜂在建造蜂窝时的经济学：



> 虽然上帝给予人类以最美好的、最完善的智力和数学，上帝也把一部分智力和数学分给一些具有理性的动物. 对于赋予理智的人类来说，上帝认定人类应该按照理智和理性行事，但是对于一些非理性的动物，上帝给予它们的只是这样的礼物：它们都应按照自然界的某种规律得到它们赖以生存所必须的东西……，它们依照我们可以由此推断的某些几何规律设计了[它们的蜂巢]. 它们必须想到这样的图形必须全部彼此相邻，且具有共同的边界……在同一点的周围有三种图形能填满整个空间，那就是三角形、正方形和正六边形，蜜蜂在劳动中以它们的智慧选取了角最多的图形，即正六边形，它们感到在构筑每一个图形中，如果花费同样多的材料，那么正六边形比其余两种图形中的任何一种能储存更多的蜂蜜. 但是我们人类，声称比蜜蜂分享多得多的智慧，将研究某种更广泛的问题，即在具有相同周长的所有的等边和等角的平面图形中，角的个数较多的那个图形的面积总是最大的，而在所有这些图形中面积最大的是具有同样周长的圆. (*Mathematical Collection*, Book V)

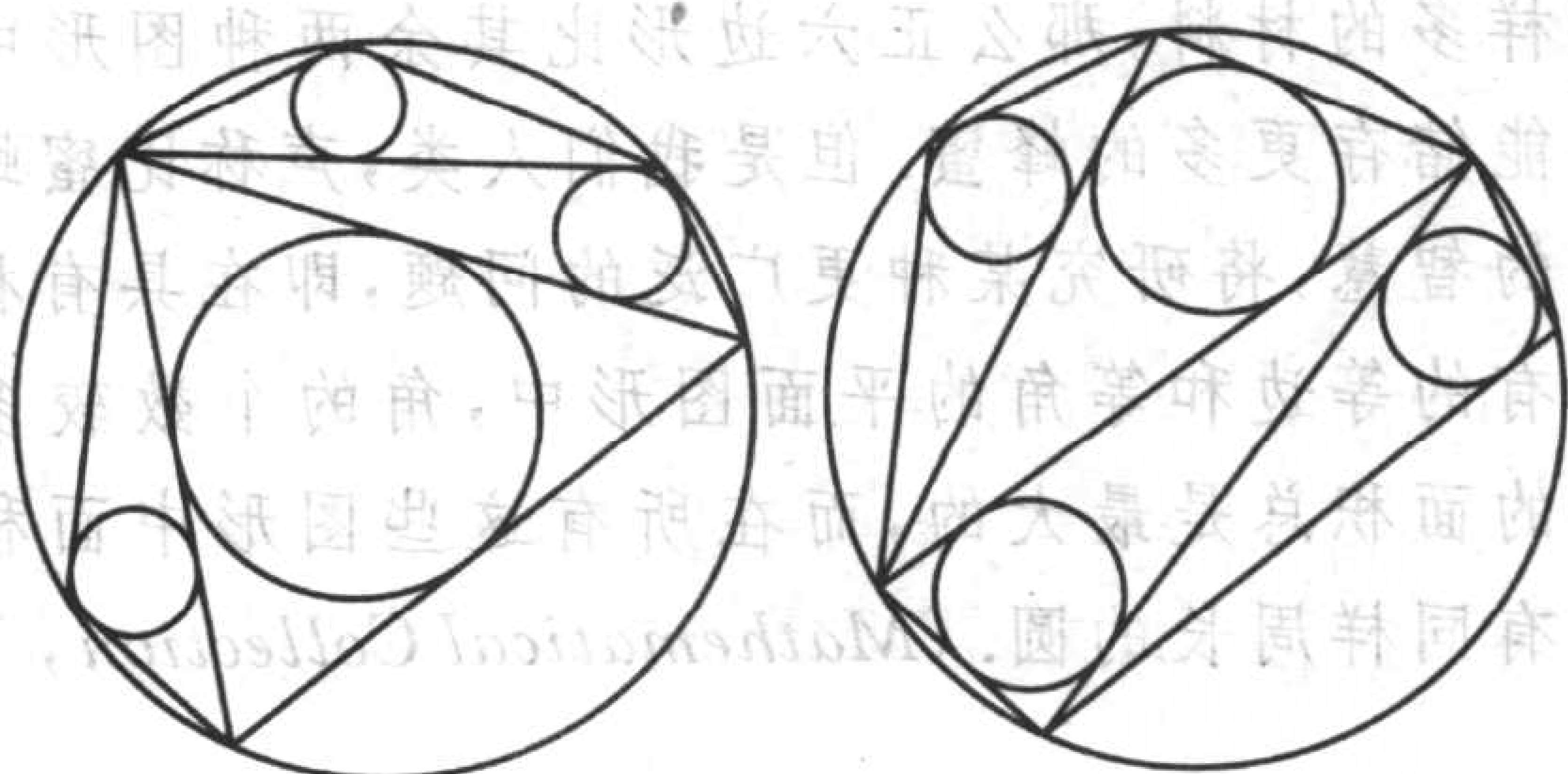
1841 年斯坦纳终于用多种方法证明了等周长定理. 一个与此有关的问题在罗马诗人弗杰尔(Virgil，公元前 70～19 年)的《依奈德(Aeneid)》中被提及到：第杜(Dido)王后在逃离她的凶恶的兄弟时，登上了北非的海岸，她提出要从贾巴斯王那里为自己和随从买一块土地. 她被允许得到能用一张牛皮围出的那样大的土地. 根据弗杰尔的说法，她接受了，她把牛皮剪成一条很细很长的绳子，用这根绳子标出一个半圆的边界，一边靠着笔直的海岸，围出了这个尽可能大的面积.

参考书：IVOR THOMAS(trans), *Greek Mathematical Works*, Vol. 2, Heinemann, London, 1980.

J

Japanese thorem　日本定理

罗杰·A·约翰逊(Roger A. Johnson)记载了以下的日本定理,它出现在一个祭神的和纪念发现者的庙宇中.这一定理可追溯到约 1800 年,也是那个时期的代表性的定理.



画一个圆的内接凸多边形,把它分割成若干个三角形.再作每一个三角形的内切圆.这样所有这些圆的半径的和与分割三角形时所取的顶点无关.任何一组三角形必定是这样的:第二张图中各圆的半径的和与第一张图中的和相同.

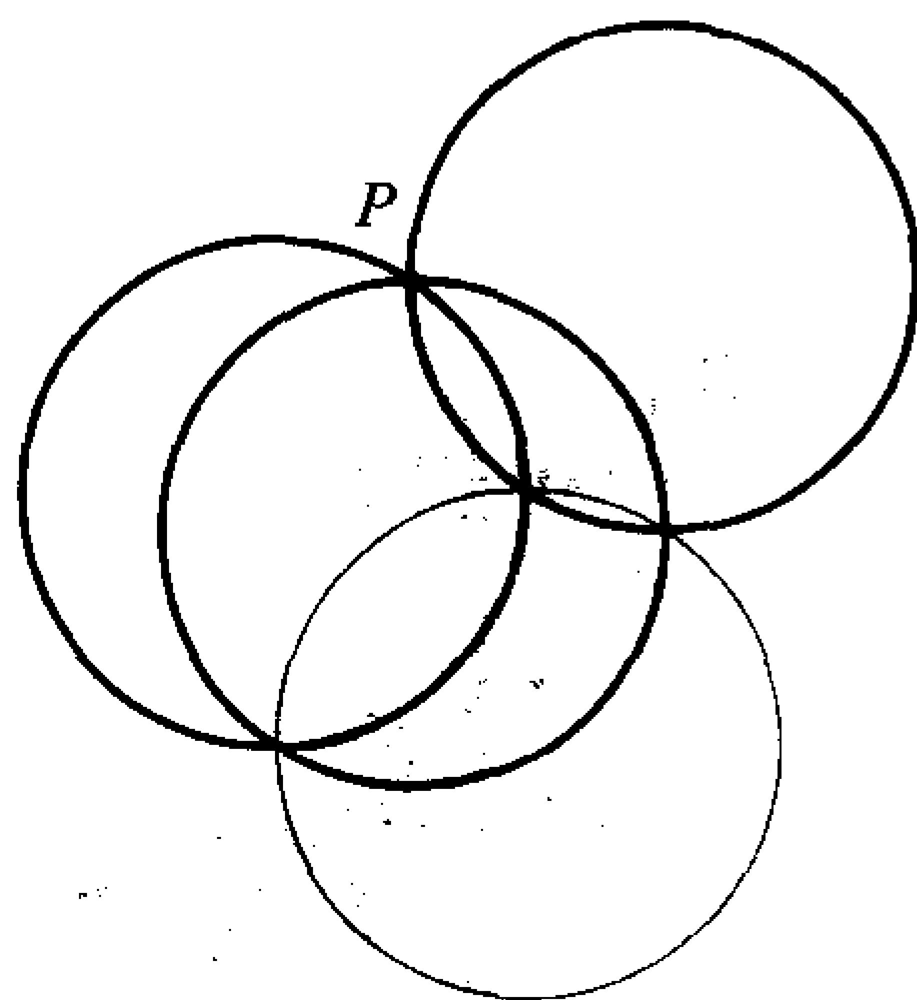
参考书:R. A. JOHNSON, *Advanced Euclidean Geometry*, Dover, New York, 1960.

Johnson's theorem　约翰逊定理

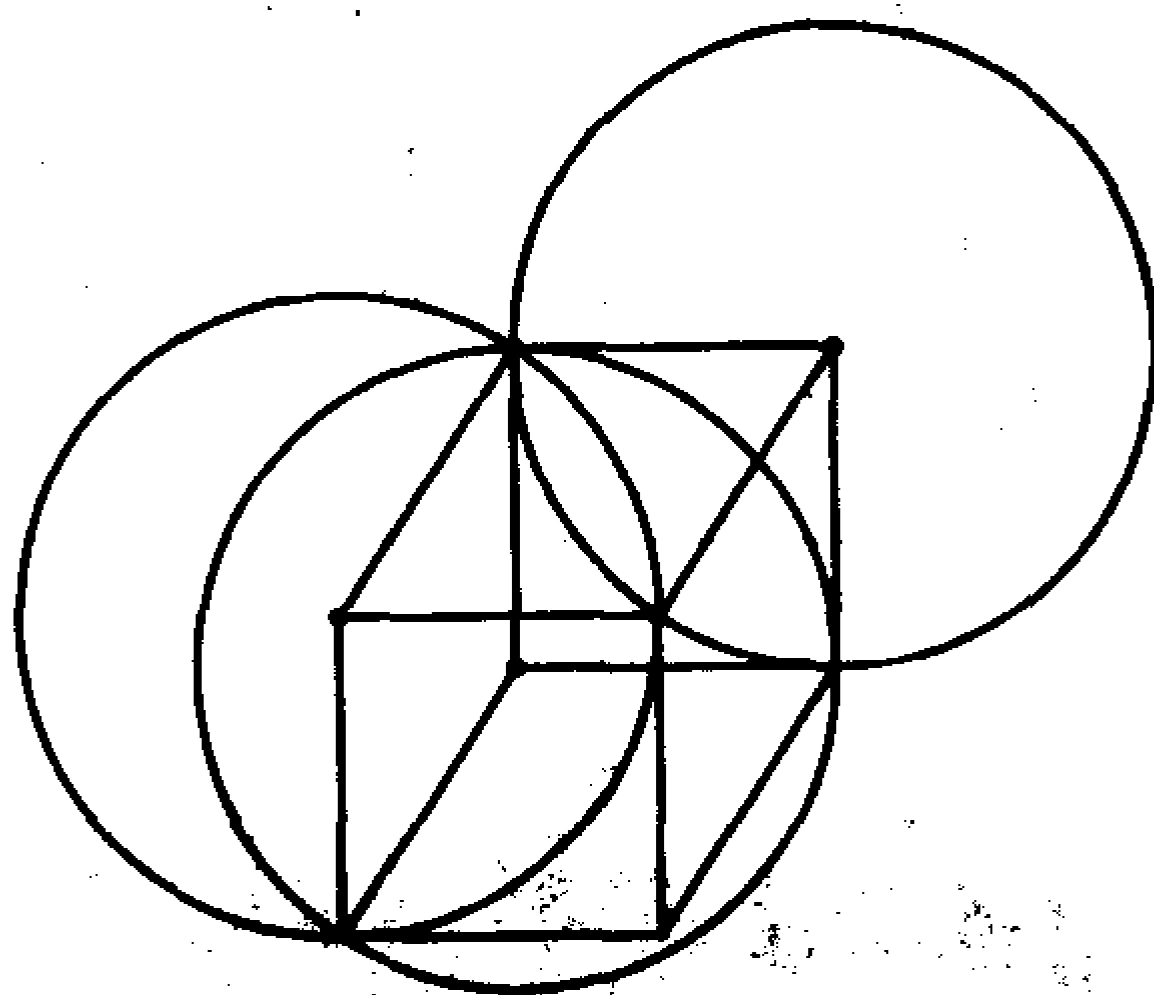
这一极为简单的定理可能是罗杰·A·约翰逊(Roger A. Johnson)直到 1916 年才发现的.这表明泰勒斯(Thales)发现了

“半圆上的圆周角是直角”两千年以后，有大量的几何性质还隐藏着等待人们去发现.

如果三个等圆经过同一点 P，那么它们的另外三个交点位于同一个等圆上.



有一个证明与该定理同样简单. 如下图作几条半径. 因为这些圆的半径相等，所以它们构成了一个正方体的框架. 加上该正方体所缺的棱，这样看不见的顶点是第四个圆的圆心.



Julia set　朱里亚集

任取一个复数 $z=p+\mathrm{i}q$，它可用复平面内点(p,q)表示，再取复常数 k. 计算 z^2+k，把计算结果作为 z 的新的值，对这个新

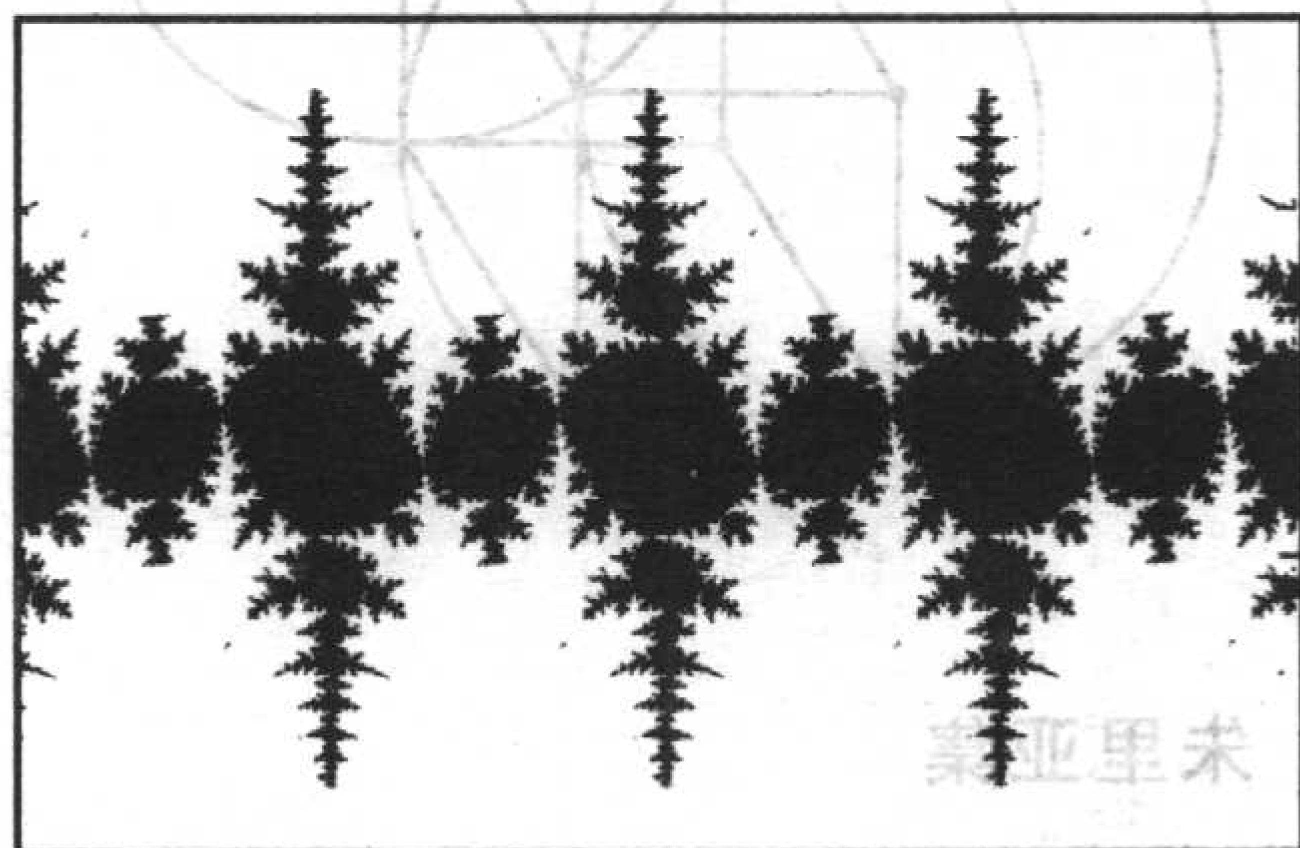
的值再计算 z^2+k. 用这个第三个值作为新的值再重复计算…….

这个过程可以无限重复. 从 z 的初始值开始，所得到的数列可以画成图形. 会发生什么情况呢？有三种可能性：可能离原点越来越远，最终消失在无穷远处；可能趋近于一个定点；也可能在某个区域附近跳动而告终，这个区域称为怪吸引子. 这个对于一个特定的点的怪吸引子称为该点的朱里亚集.



如果初始点位于曼德伯罗特(Mandelbrot)集的内部，那么它的朱里亚(Julia)集将是一个连贯的集合，它形成一条维数是分数的分形曲线. 如果初始点位于曼德伯罗特集的外部，那么它将是一个由孤立点组成的集合，称为法透(Fatou)尘.

$z\to z^2+k$ 这一过程是产生这种情况的最简单的过程. 不过，朱里亚集对于更为复杂的过程也存在. 这就是对于 $z\to\lambda\cos z+k$ 这一过程的朱里亚集：

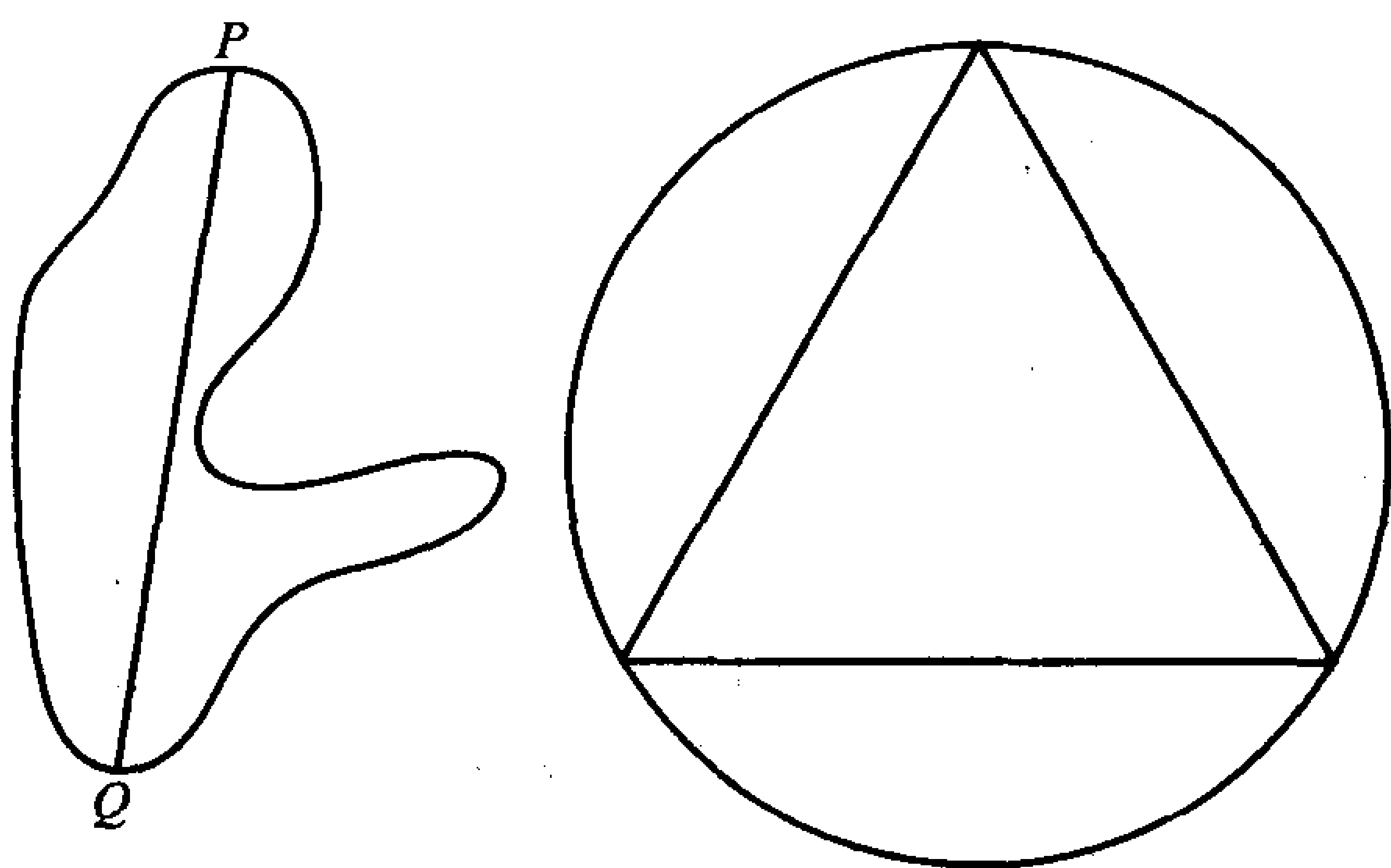


参考书：MICHEL MANDES - FRANCE，'Nevertheless'，

Mathematical Intelligencer, vol. 10, No. 4, 1988.

Jung's theorem　荣格定理

一个集合内的两点之间的最大距离称为这个集合的直径. 荣格(Jung)定理是说直径是1个单位或小于1个单位的集合能被直径为$2\sqrt{3}$个单位的圆覆盖.

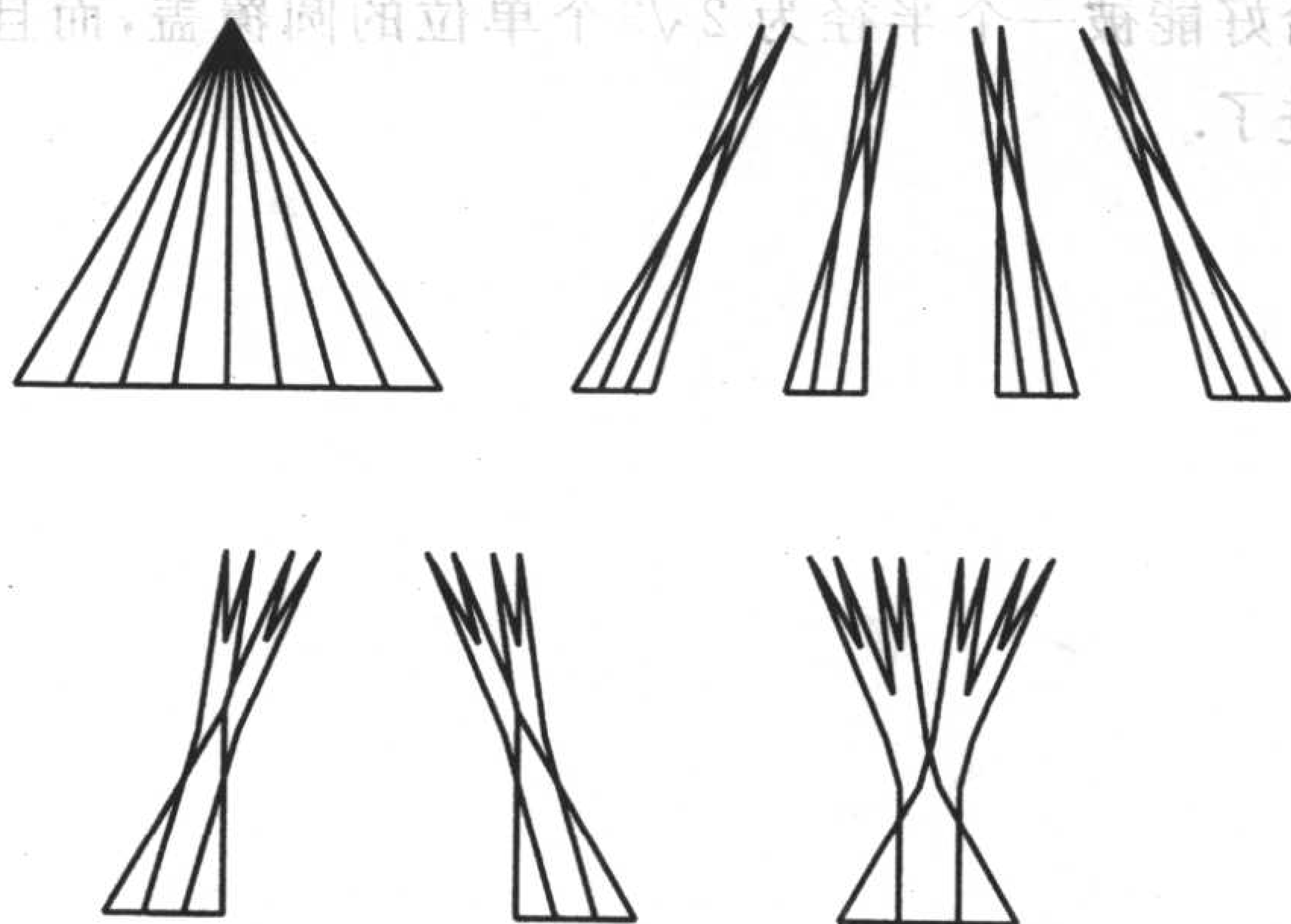


左上图的直径为PQ. 如果等边三角形的边长是1个单位, 那么它恰好能被一个半径为$2\sqrt{3}$个单位的圆覆盖, 而且这个值不能改进了.

K

Kakeya sets *and* Perron trees　挂谷集与泊隆树

1917 年日本的挂谷宗一回答了这样一个问题:能够放置长度为一个单位的线段,并使之能完全转动的最小的凸区域是什么.这一区域称为挂谷集.挂谷猜想这答案是高为 1 个单位的等边三角形.这是正确的.然而,如果这一区域不必是凸区域,那么情况将是怎么样呢?猜想答案也许是一个适当大小的三尖点内摆线,长度为一个单位的线段在其中可以连续地转动,线段永远与三尖点内摆线相切,两个端点都位于曲线上,可是这一猜测原来不是这么回事.这样的最小区域的面积要多少小就可以多少小!



这一想法是将等边三角形的底边平分,平分,再平分.然后

将两个相邻的三角形相互滑动，使它们稍有重叠. 将这些三角形成对地相互滑动重复这一过程.

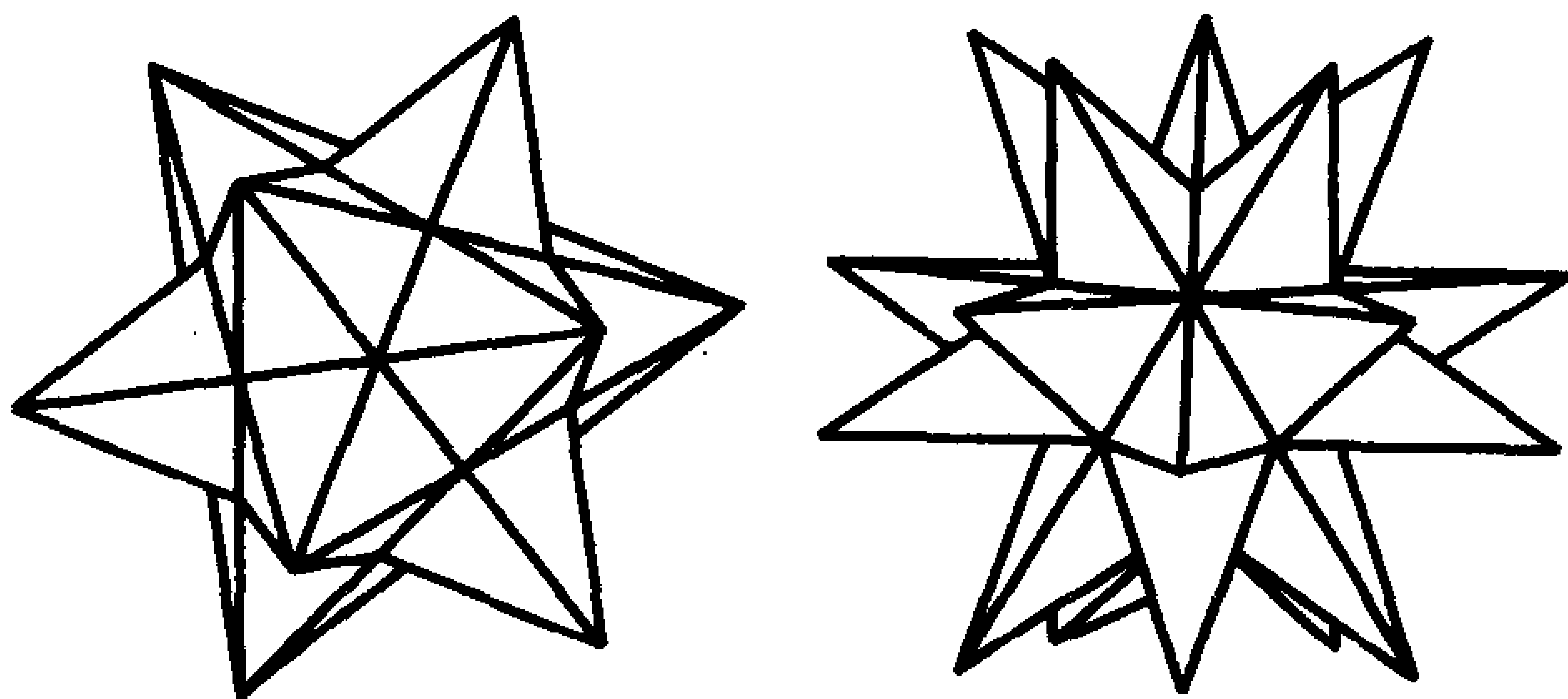
所得的结果就称为泊隆树. 如果三角形的底边被分得足够多，那么由此得到的泊隆树的面积可以变得要多少小就多少小. 若干个泊隆树放在一起就提供了一个使长度为 1 的线段可以完全转动的空间.

参考书：K. J. FACONER *The Geometry of Fractal Sets*. Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

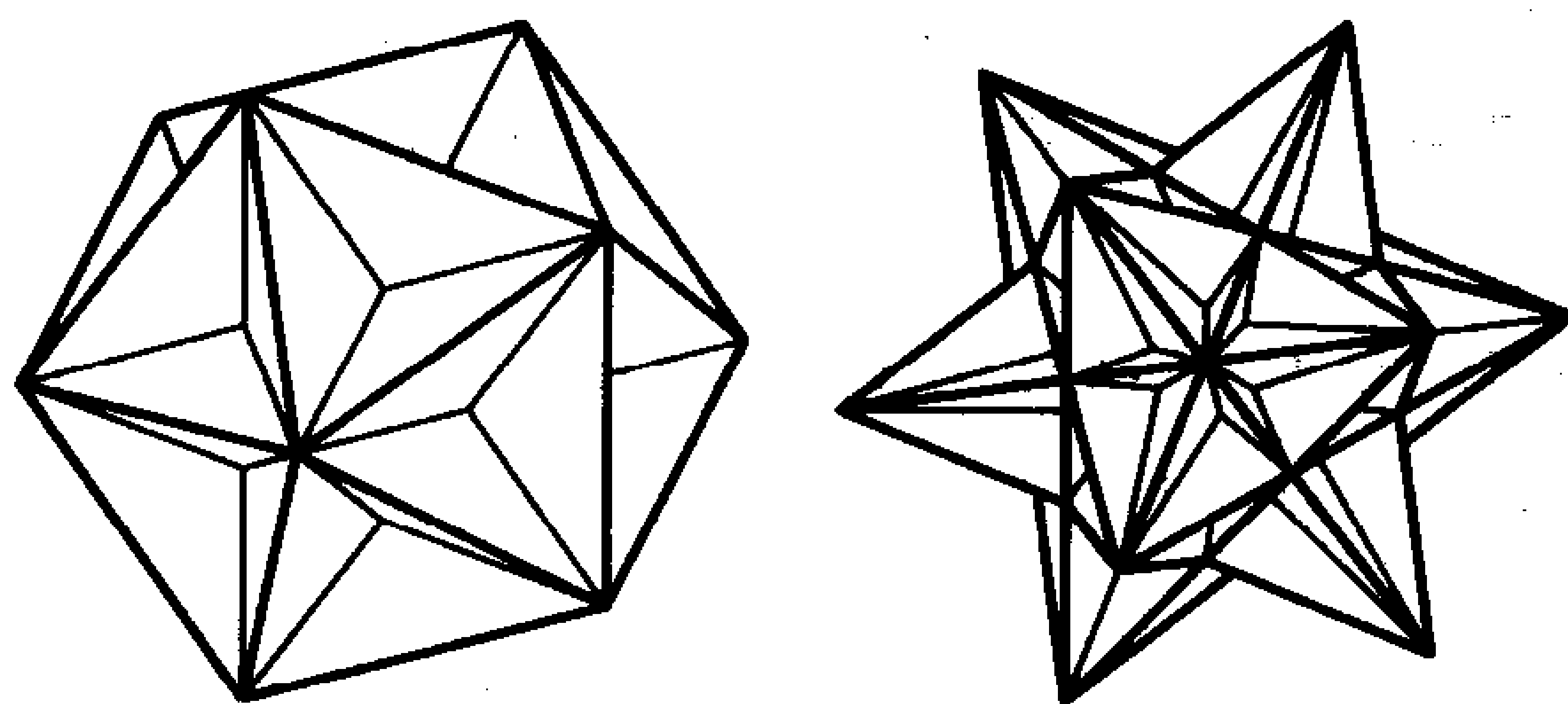
Kepler-Poinsot polyhedra　开普勒-泊洼松多面体

帕乔利(Pacioli)在其著作《神妙的比例》(De Divina Proportione)中出现了一个有"凸角"的正十二面体和正二十面体，有人相信列奥那多·达·芬奇已经画过这种多面体. 帕乔利加在正十二面体上的凸角是较扁的正五棱锥，后来又在正二十面体的各个面上加上正四面体.

下面两个图表示两种新的多面体，它们选自开普勒的著作《世界的和谐》(*Harmonice Mundi*, 1619)，该书之所以出名是因为书中包含了行星运动的第三定律. 虽然这两种新的多面体并不是凸的，但还是可以把它们当作正多面体. 它们的面都是彼此相交成的正五角星，左面那张图是小的星状正十二面体，右边的是大的星状正十二面体.



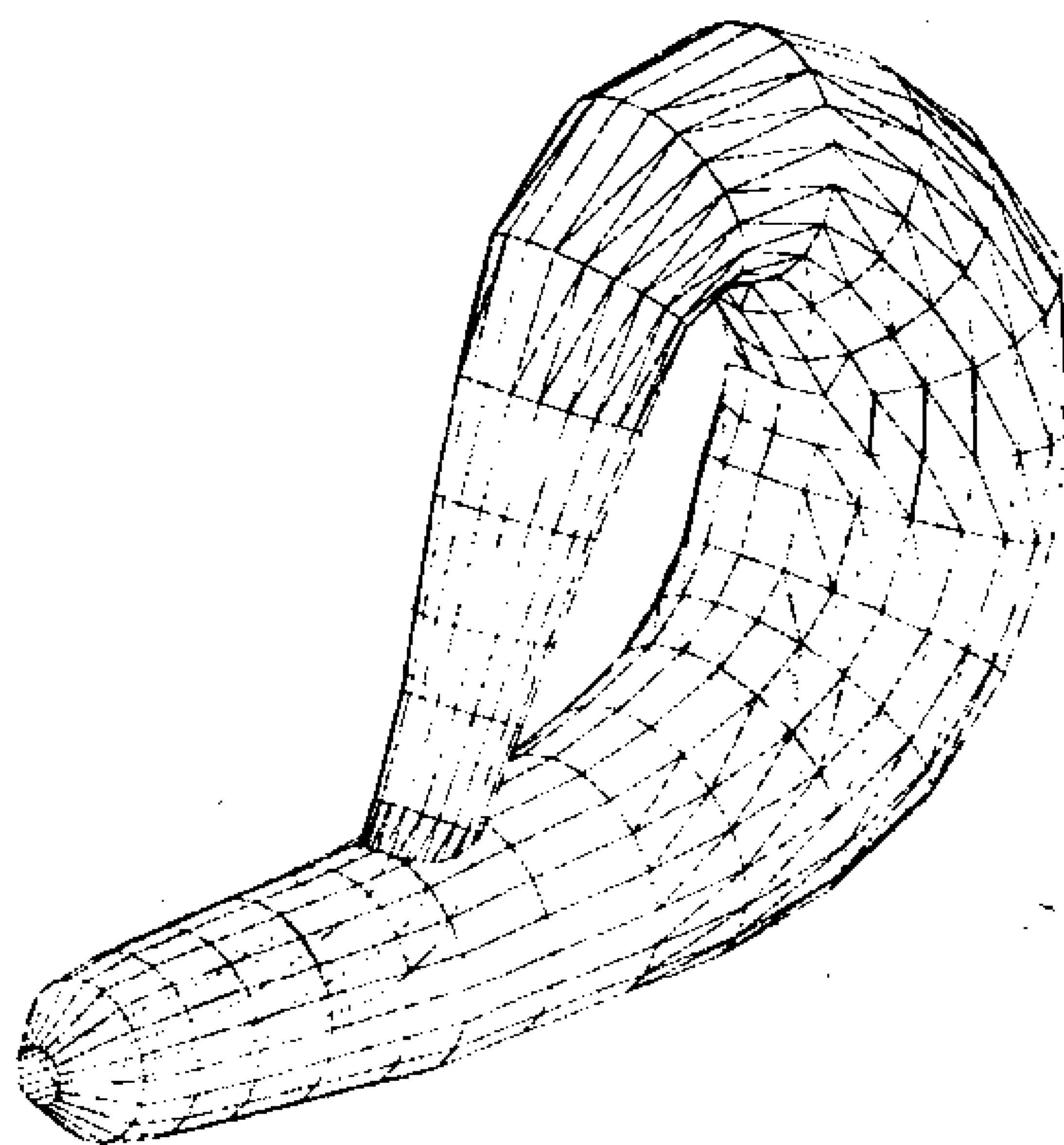
这两个图形在 1819 年被泊洼松(Poinsot)重新发现,此外他还发现了两个新的非凸正多面体:大正十二面体(左)和大正二十面体(右).



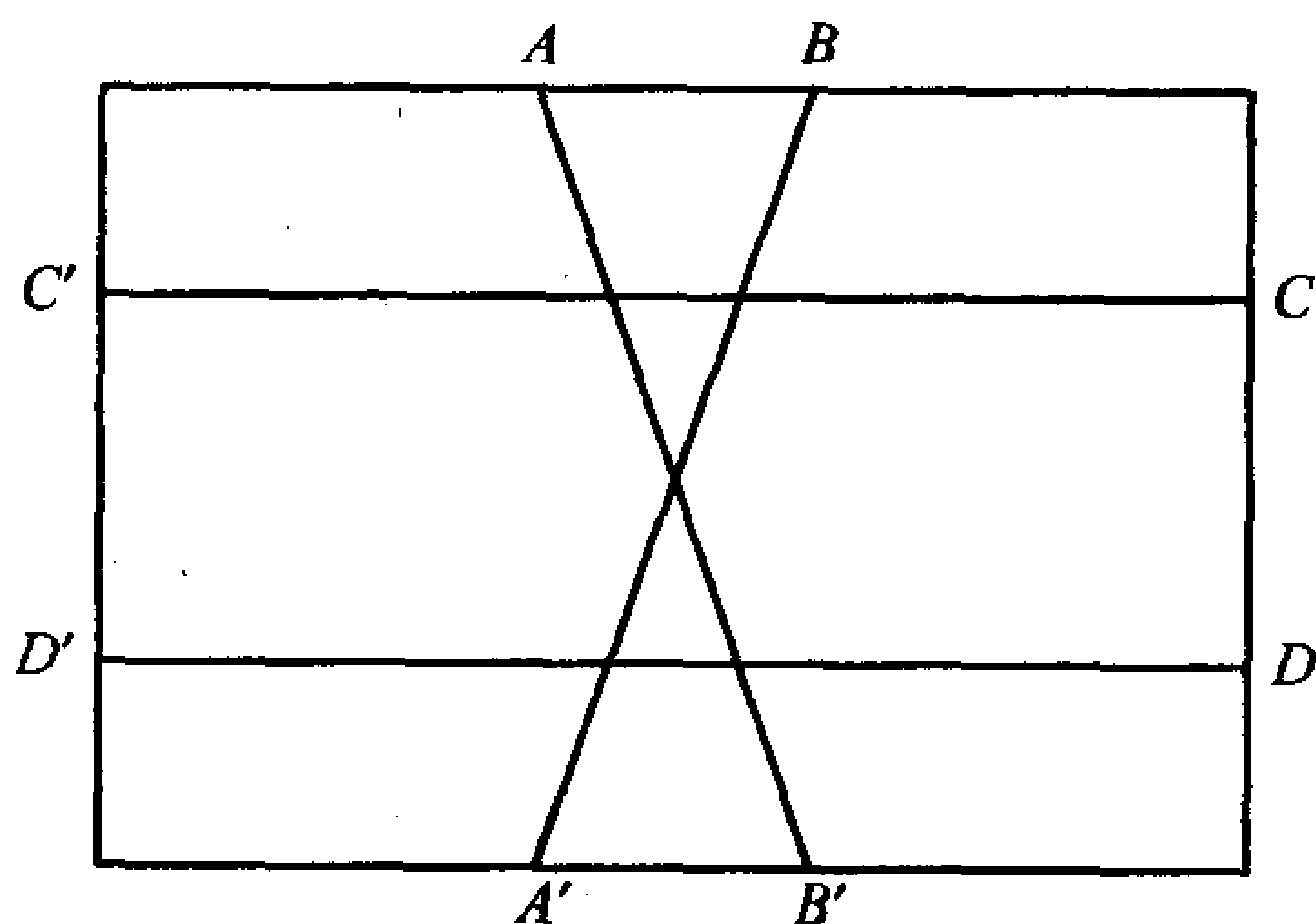
所有这些三维立体图形就相当于平面正多角星.大的正十二面体和小的星状正十二面体使一些数学家感到为难,因为并不清楚它们怎么会不满足欧拉关系:顶点数+面数=棱数+2,它们中的每一个似乎都有 12 个面,12 个顶点和 30 条棱.

Klein bottle 克莱因瓶

取一个圆柱,将其一端扭弯后穿过自己的表面.再把两端光滑地连起来就得到以费力克斯·克莱因(Felix Klein)命名的克莱因瓶.

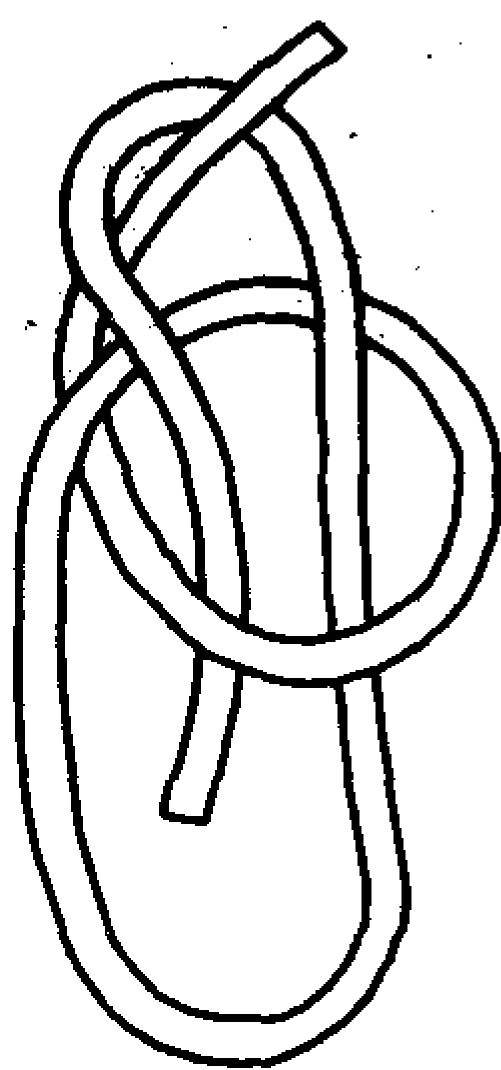


克莱因瓶可以看作是一个矩形，它的一组对边不扭转而直接连接（CD 与 $C'D'$ 连接），但第二组对边扭转半圈后连接（AB 与 $B'A'$ 连接）.



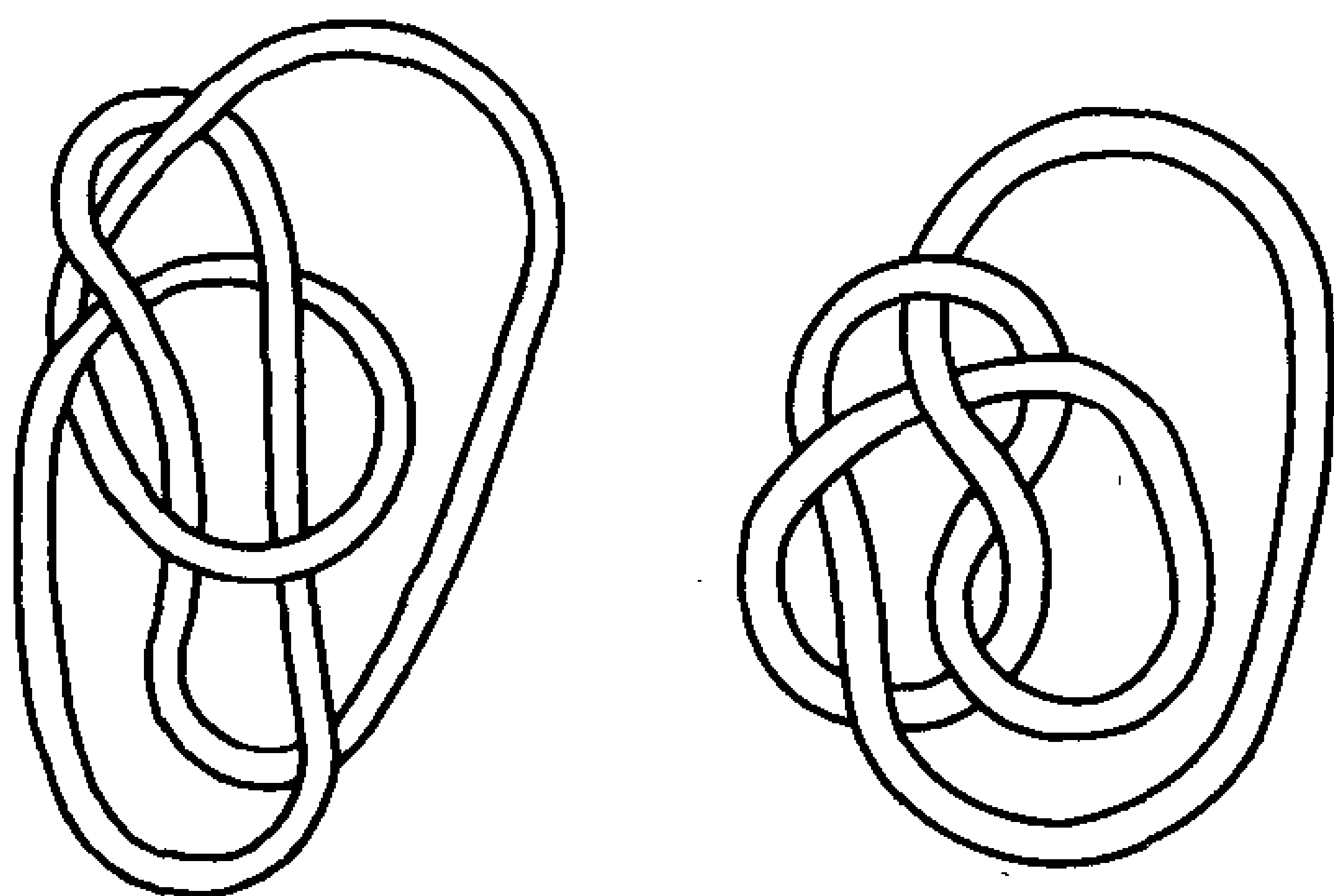
knots 绳结

随时间的消逝绳结的历史被渐渐遗忘. 人类在创造数以前就使用绳结，这一点似乎是可能的. 然而只是在近百年来数学家才认识到绳结具有数学意义，于是研究了绳结.

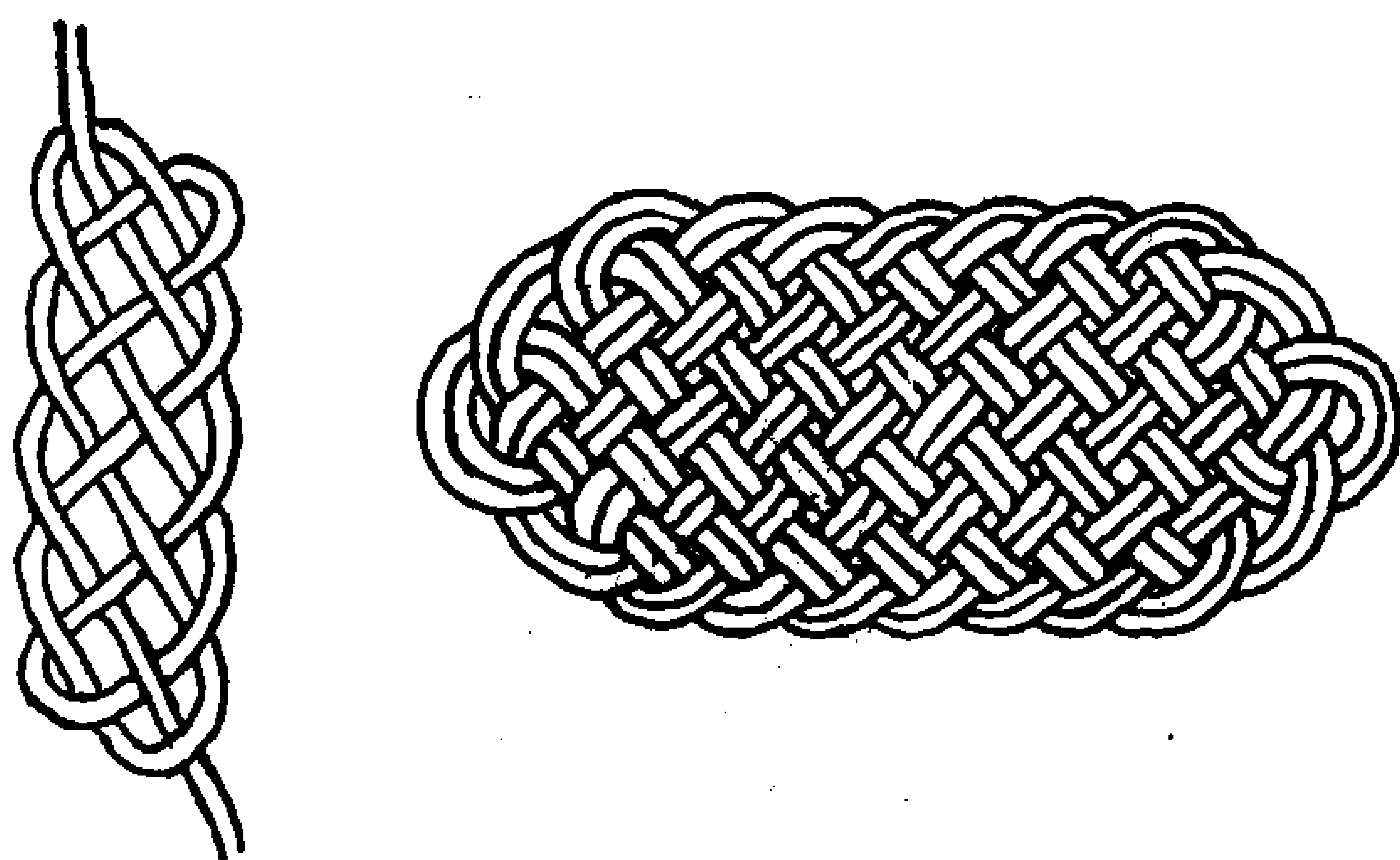


这是一个单套结，几年前考古学家在芬兰的一个渔网中发现的就是那种结，花粉分析家确定它的年代大约是公元前七千年. 把两头拼接起来，结果就像你先把一张纸条弄弯，再把两头

拼接起来一样:在数学中,这两种绳结是等价的.



传统的绳结有好几百种形式,应用范围也很广.起初只是实用的,后来变得越来越复杂,用于装饰.左下图是一个扁平的系物短结,右边是一个“远洋辫结”,这种结在凯尔特人的绳索装饰图案中用于记载往事.

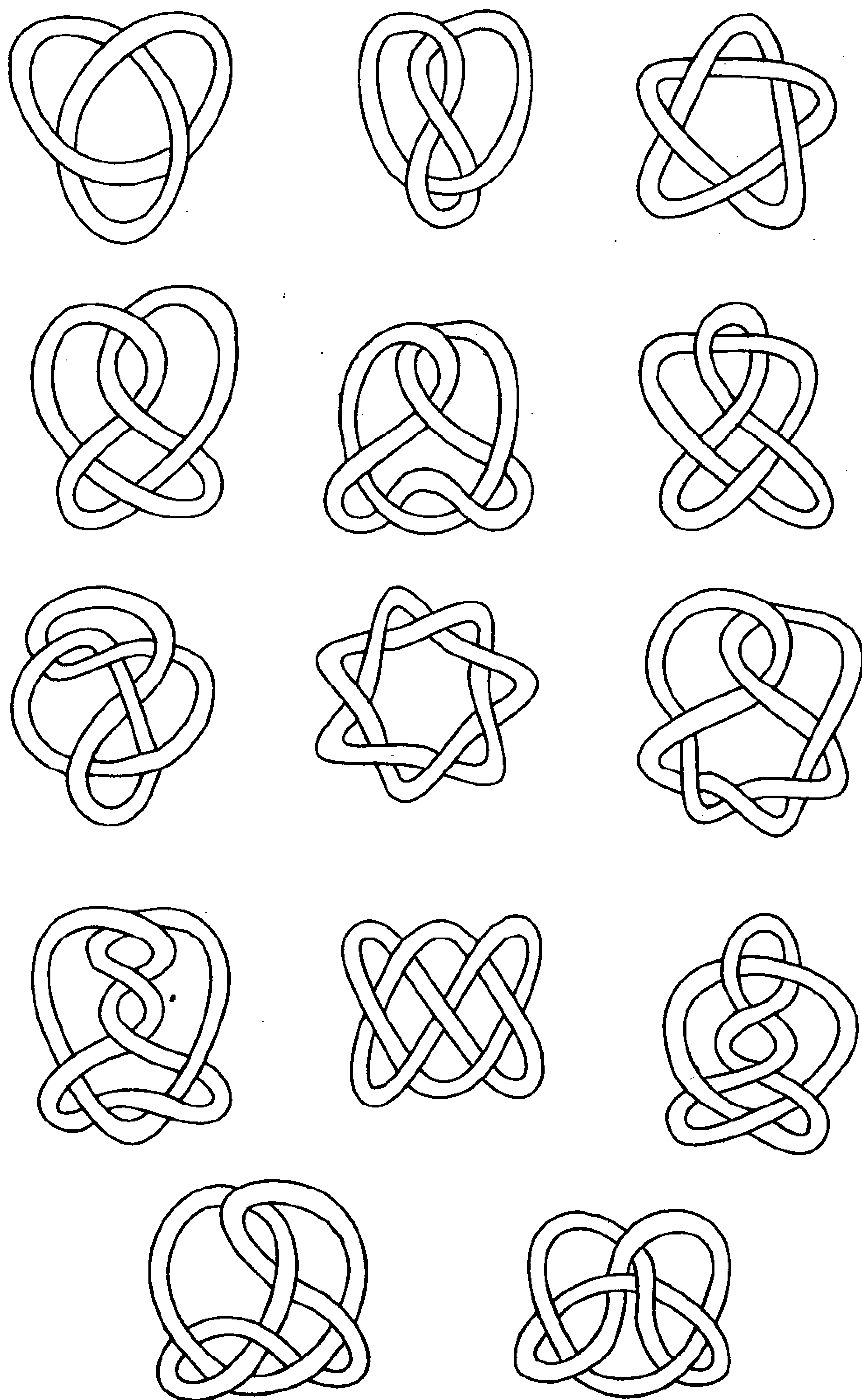


knots in sequence　连环结

数学家对绳结是否有实际应用价值（这取决于是否容易打结，是否容易脱落等）并不感兴趣，他们只是把绳结当作是相隔不远的空间曲线，因为两头可以连接起来．一条曲线只有在三维空间内才能打结．曲线在四维空间内不能打结，但曲面能

打结.

对绳结的分类自然是按照绳结交叉的次数. 有 7 次或不到 7 次交叉的结称为原始结. “原始”的意思是：如果在绳上打完一个结以后再打一个结，这样的结不算是两个结.

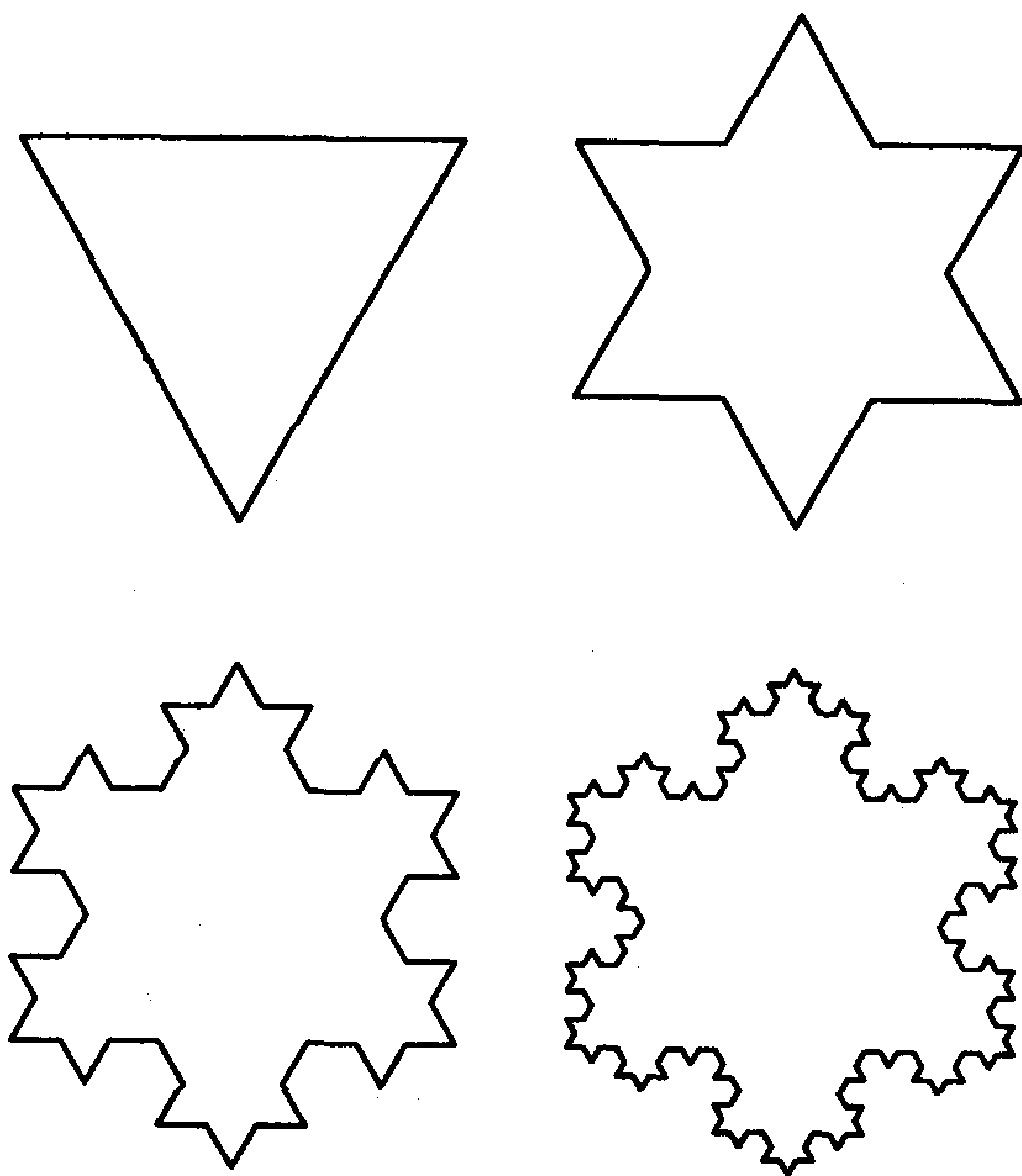


应该注意，任何绳结都可以将绳子弯一个小孔，然后穿进去，得到一个额外的，但是没有实际意义的交叉.这样的交叉不计在内，予以排除，然后再对绳结分类.

可以预料，绳结的个数随着某个交叉数起急剧增加.如果左穿和右穿不加区别，那么三次(至少三次)和四次交叉的绳结只有 1 种，五次有 2 种，六次有 3 种，七次有 7 种，八次有 21 种，九次有 49 种，十次有 165 种.

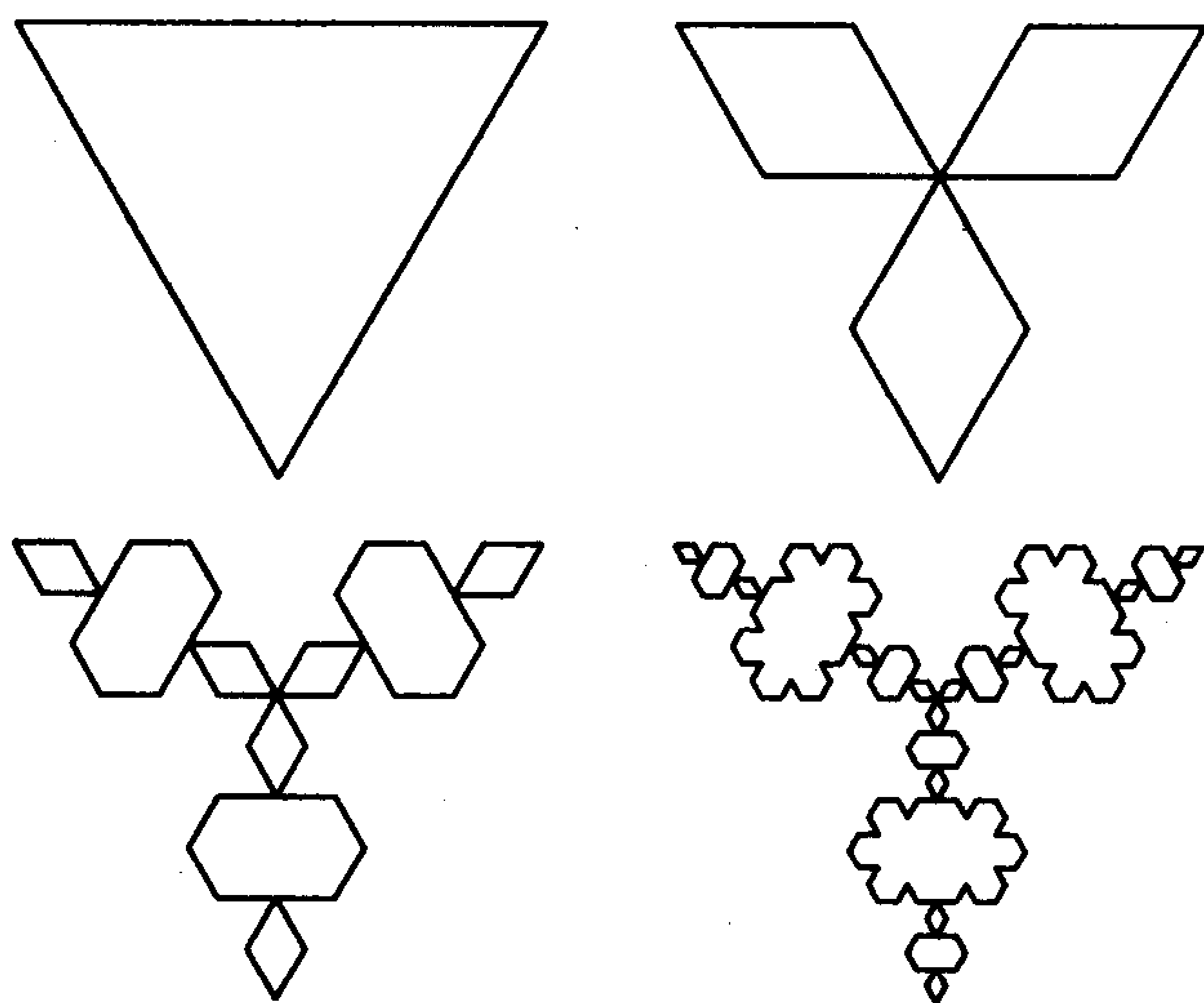
Koch's snowflake curve　科克雪花曲线

画一个等边三角形，把每一边三等分，抹掉中间一段后用两条同样长的线段代替.再用同样的方法代替每一条线段的中间的三分之一.下图表示一条雪花曲线的前四步.科克曲线是替代的次数趋向于无穷时，这一曲线的极限.



科克曲线的长度是无穷大，但它所围成的面积只是原三角形的面积的$\frac{8}{5}$．它是一条分形曲线，分形的维数是$\frac{\log 4}{\log 3}$，约为1.2618.（虽然分形思想在科克于1904年公布他的曲线时尚未出现）.

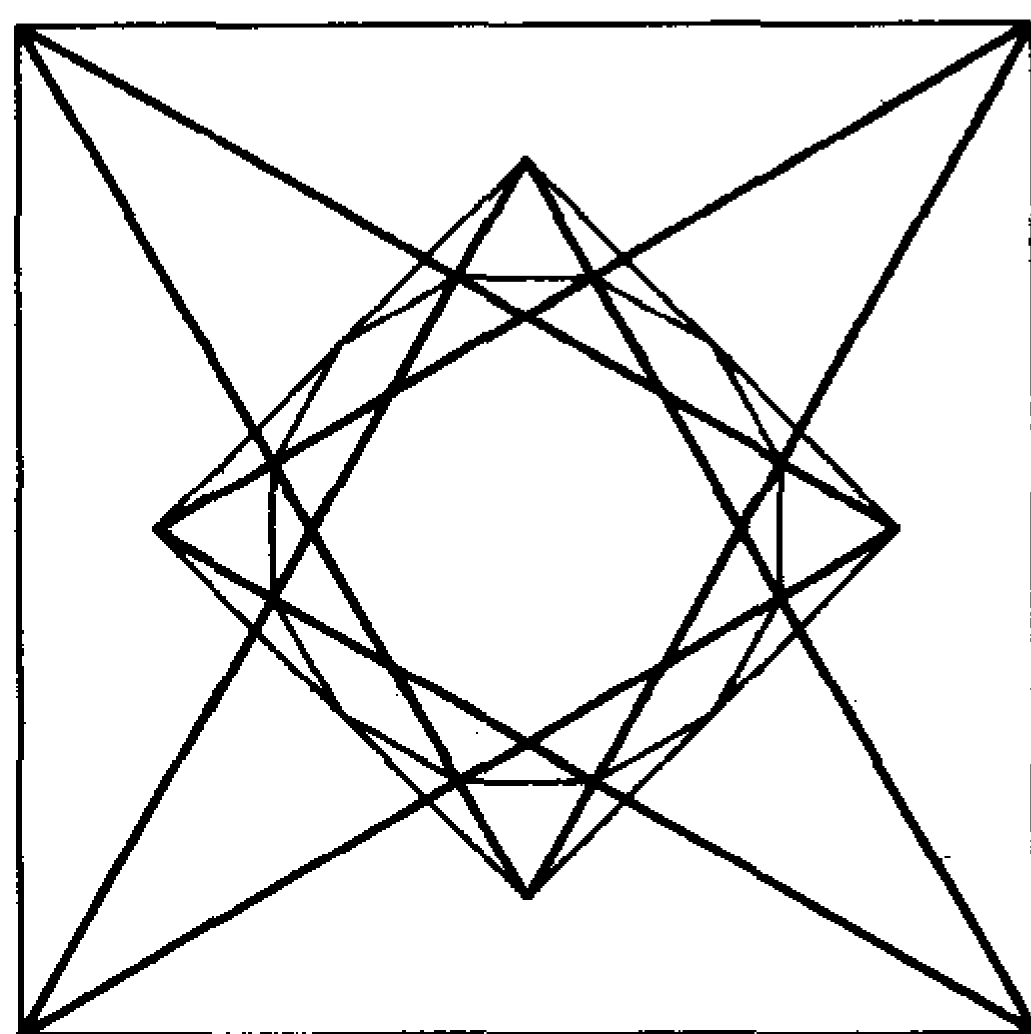
反雪花曲线是用两条同样的线段替代每一条线段的中间的三分之一得到，但是是往里的．它的极限面积是原三角形的$\frac{2}{3}$，它的长度是无穷大，在连接原三角形的中心和顶点的线段上的两重点是一个无限集.



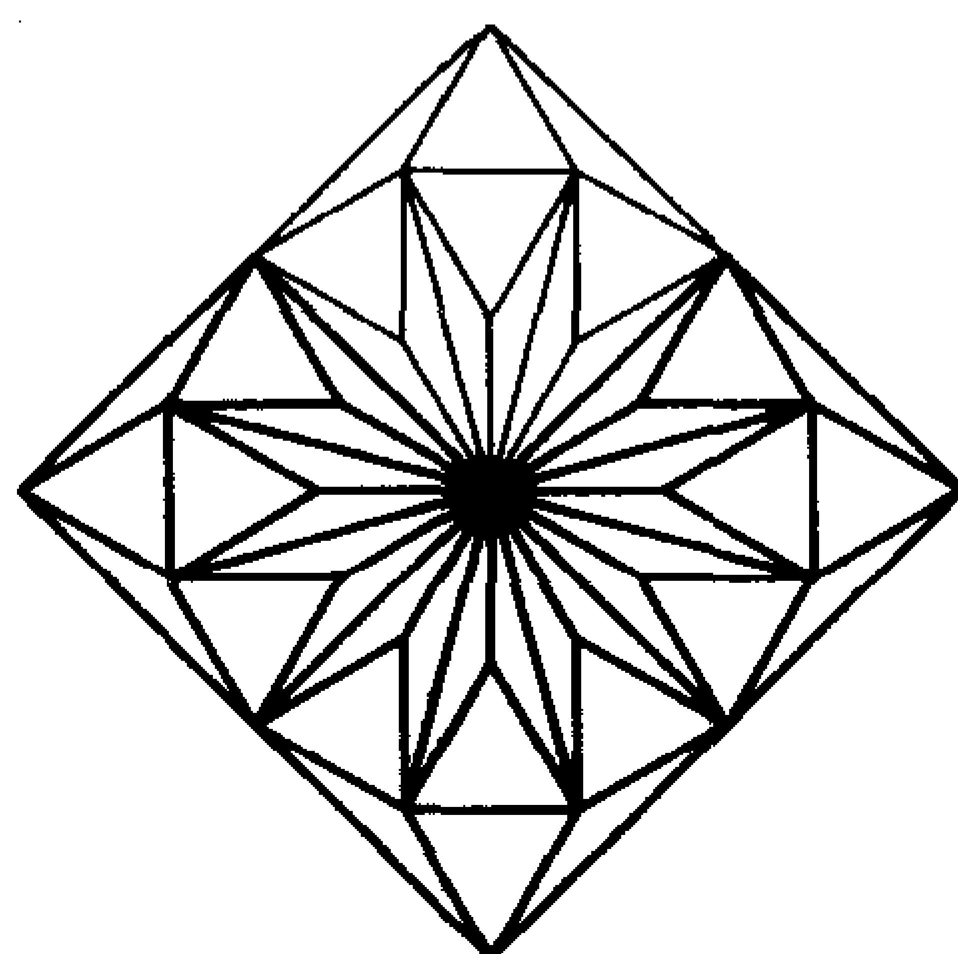
Kürschák's tile　古尔沙克铺块

取一个正方形，在每一条边上向内各画一个等边三角形．这四个等边三角形在正方形内的顶点组成一个正方形，再取该正方形的各边的中点．这四个点加上四个三角形各边的交点一共有12个点，这12个点是一个正十二边形的顶点．由这四个等边

三角形在正方形内的顶点形成的正方形和内切正十二边形形成了基本的古尔沙克(Kürschák)铺块,如第二张图所示.



这一铺块可以用来证明古尔沙克定理:半径为 1 的圆的内接正十二边形的面积是 3.(对于内接于半径为 1 的圆的其他正多边形来说,只有正方形的面积为有理数.)下面的整个图形包含 16 个等边三角形,32 个内角为 15°,15°和 150°的等腰三角形. 它的"北部"四分之一分别包含 4 个等边三角形和 8 个内角为 15°,15°和 150°的等腰三角形,它们的面积等于正十二边形的外部的面积.



正十二边形的面积给出了 π 的粗略的近似值,正六边形的周长也是如此. I · J · 松贝尔克(I. J. Schoenberg)证明了如果一

个正 n 边形的周长给出 π 的某个近似值，那么一个正 $2n$ 边形的面积给出 π 的同样的近似值.

参考书：G. L. ALEXANDERSON and K. SEYDEL, 'Kürschák's tile', *Mathematical Gazzette*, No. 421, 1978.

L

Lebesgue's minimal problem　勒贝格最小值问题

能覆盖任何直径不大于1的点集的最小的形状是什么？

边长为$\frac{1}{\sqrt{3}}$的正六边形是能覆盖任何直径不大于1的点集的；但是J·帕尔(J. Pal)在1920年证明了这个六边形还可能稍微减小一点，只要去掉底边与内切圆相切两个等腰三角形（阴影部分）. 去掉这两个三角形后的六边形称为帕尔万能覆盖.

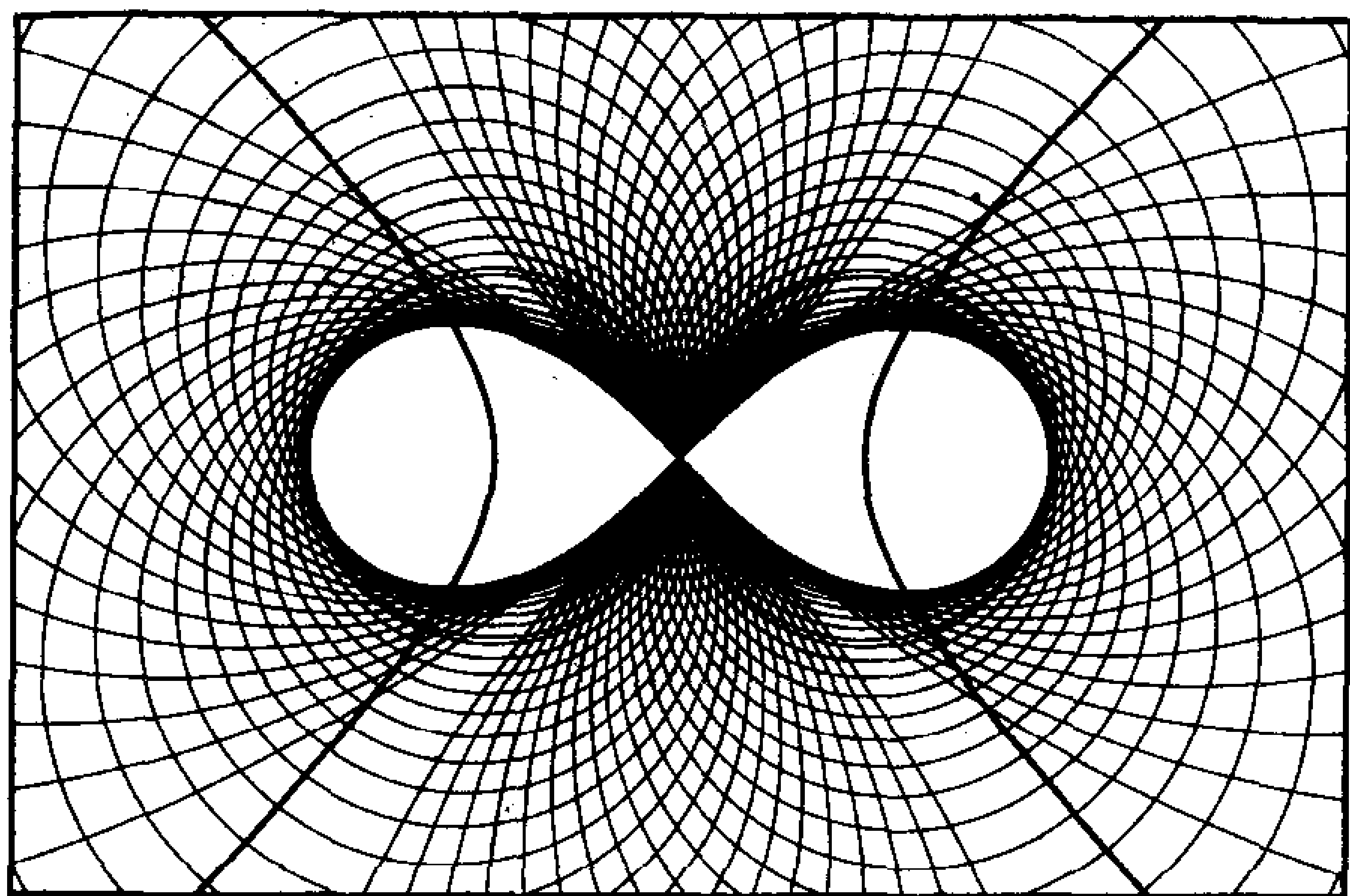
后来罗兰·斯普拉格(Roland Sprague)证明了还能去掉一小块. 以A为圆心画一条弧与对边相切，与以B为圆心画的类似的弧相交于该六边形的竖直的对称轴上.

B　A

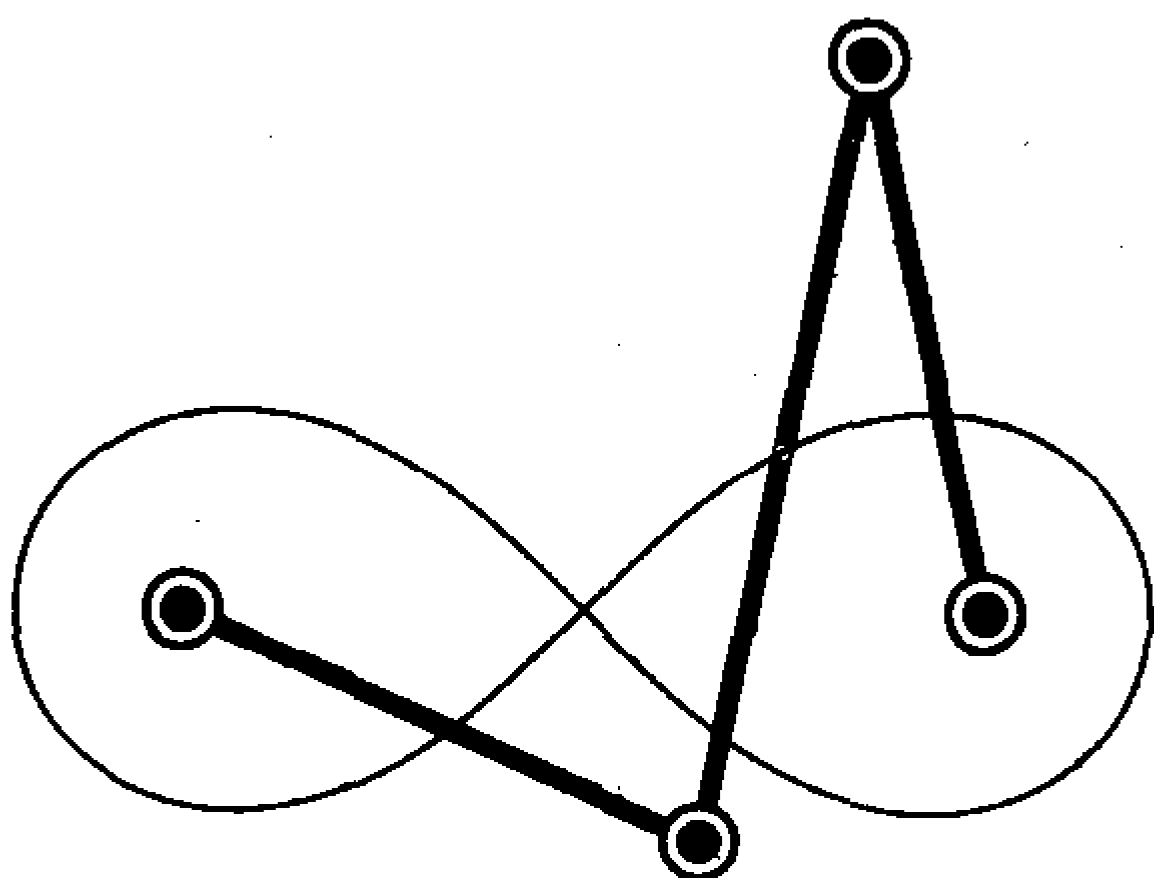
lemniscate of Bernoulli　贝努里双纽线

贝努里双纽线是贝努里于 1694 年以拉丁文 lemniscus 命名的，是“纽带”的意思.

为把双纽线作为包络画出，从等轴双曲线出发，以双曲线上的点为圆心，经过双曲线的中心画圆，这些圆的包络就是双纽线.



双纽线是双曲线关于其中心的反演. 选一个常数 k，过等轴双曲线的中心 O 画一条直线，交双曲线于点 X. 在 OX 上求点 Y，使 $OX \times OY = k^2$，则点 Y 的轨迹就是双纽线.



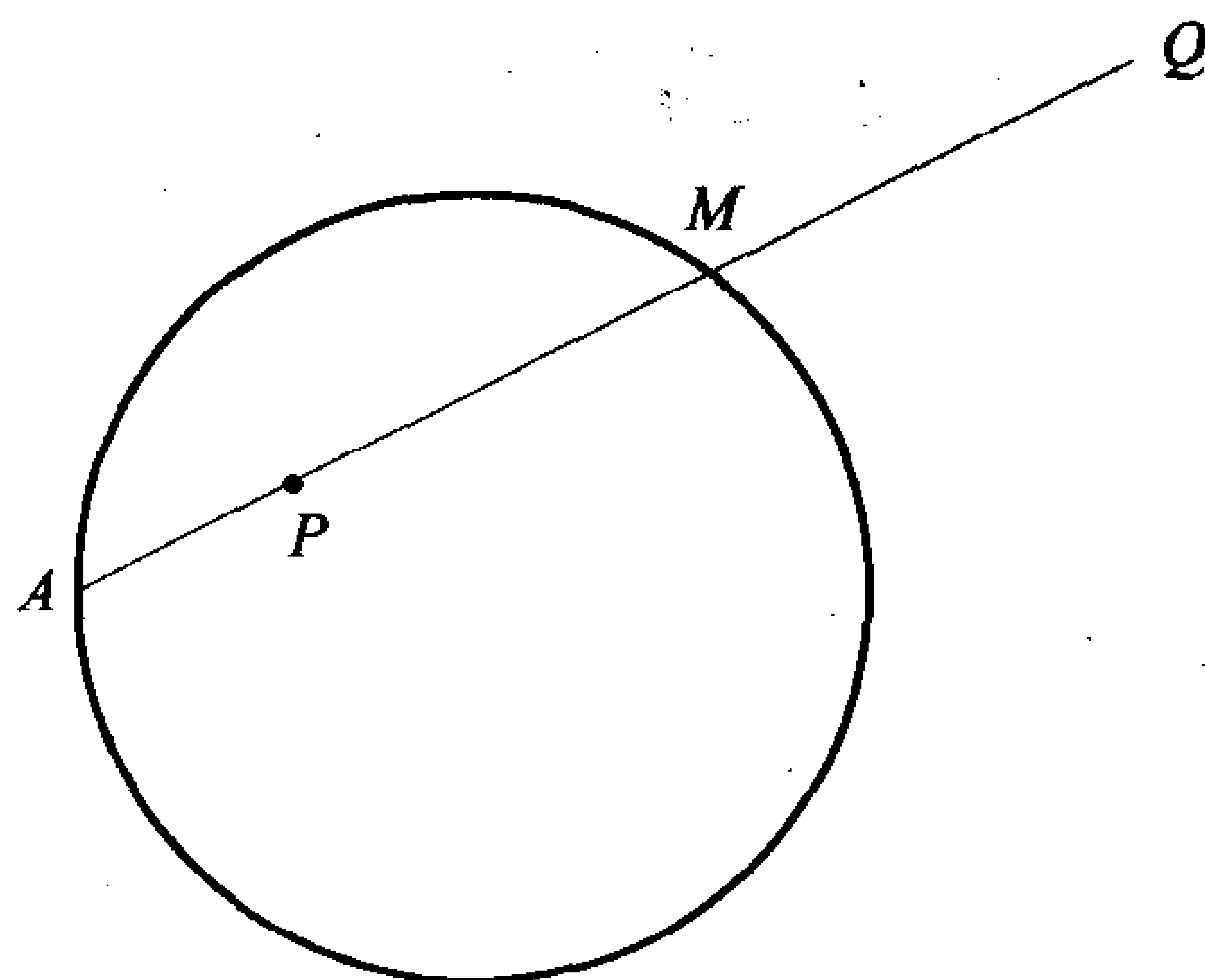
双纽线的极坐标方程是 $r^2 = a^2 \cos 2\theta$. 双纽线是卡西尼卵形线(Cassini’s ovals)的特殊情况.

双纽线可用一个很简单的联合器作出. 两个定点之间的距离等于中间一节的杆长,另两节的长是它的长的$\sqrt{2}$倍. 中间一节杆的中心画出的轨迹就是双纽线.

limaçon of Pascal　帕斯卡蚶线

帕斯卡蚶线是以布来兹·帕斯卡(Blaise Pascal)的父亲爱田·帕斯卡(Etienne Pascal)命名的,虽然丢勒已画过这一曲线.

让一条定长的线段 PQ 运动,使该线段(若有必要,则延长)经过一圆上的一个定点,并使该线段的中点在该圆上,于是帕斯卡蚶线就是一圆关于圆上一点的蚌线.



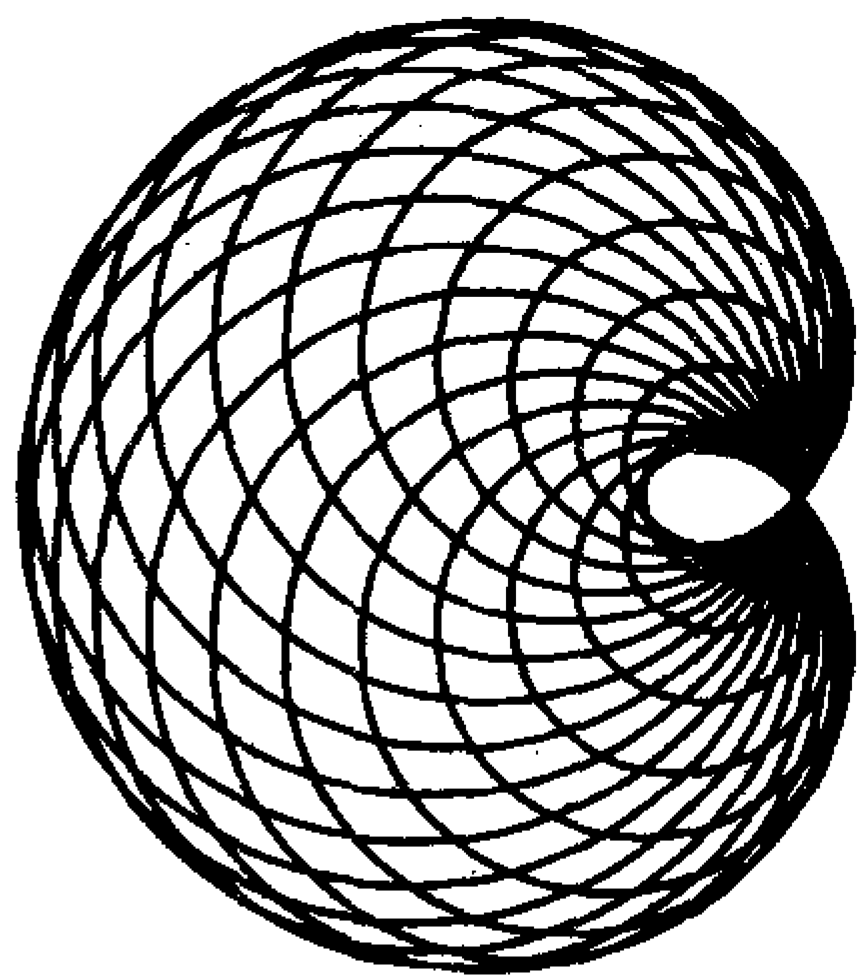
该线段的两个端点就画出帕斯卡蚶线. 如果该线段等于圆的直径的两倍,那么帕斯卡蚶线就是心脏线.

蚶线也可这样形成:有两个直径相同的圆,其中一个绕另一个滚动,前者上一点就形成蚶线. 它像摆线一样,有三种形式,这取决于这一点是在圆周上(形成心脏线),还是在圆内或圆外.

它的极坐标方程是 $r=2a\cos\theta+k$,这里 a 是圆的半径,$2k$ 是线段的长.

为把蚶线作为包络画出,先作一个基圆,再取一点(不在圆上),画一个圆,使圆心在基圆上,并经过该定点,所有这样的圆

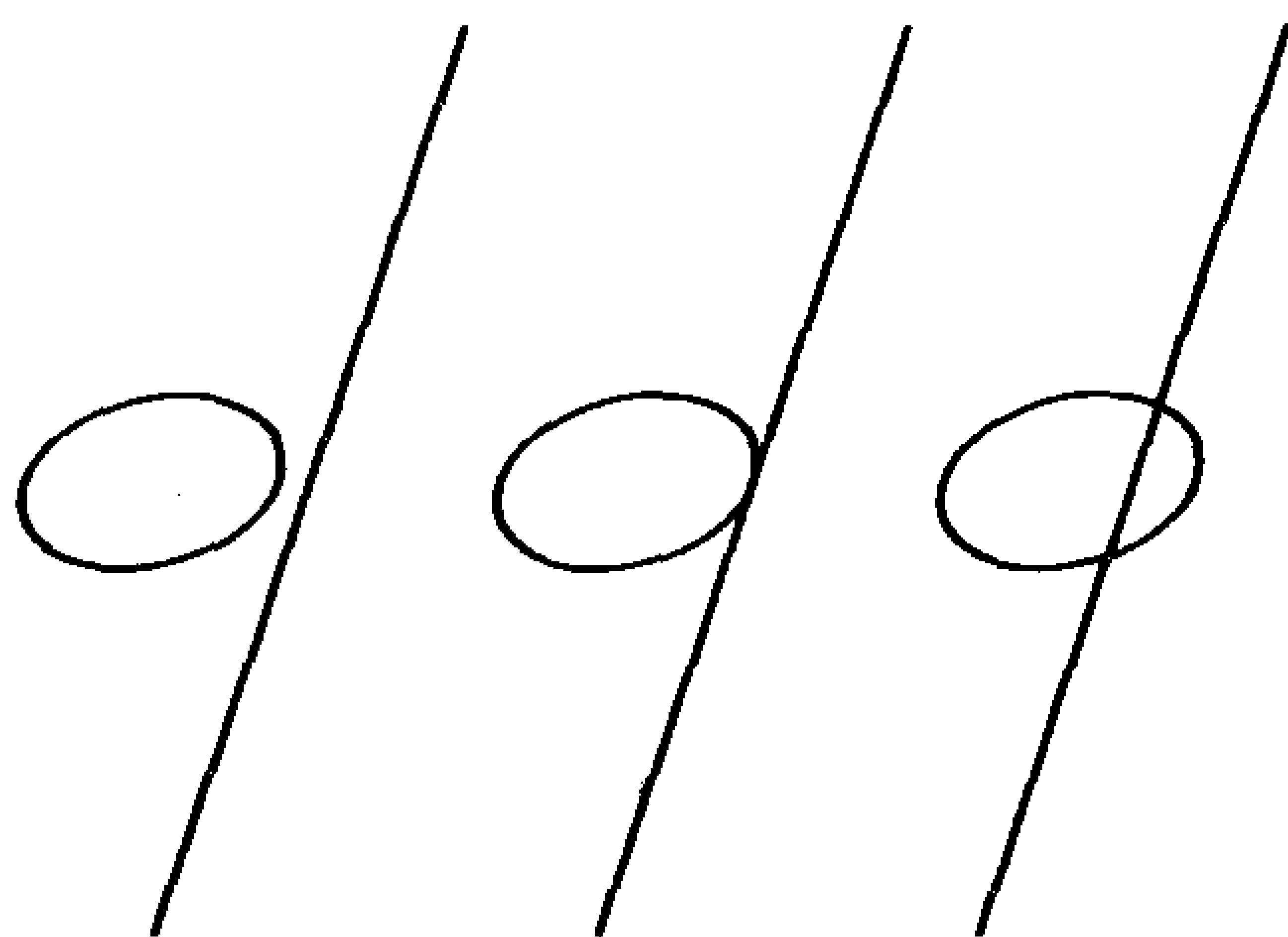
的包络就是蚶线.（如果定点在圆上，就形成心脏线.）



line at infinity　无穷远直线

在几何中认为每一条直线都有一个“无穷远点”，并认为所有这些点形成一条“无穷远直线”，这样的认识通常是很有益的.这里考虑的是一条直线，不是圆.

当然“无穷远直线”是不能画在书上的.但它可以如下面几张图那样表示出来，这些图首先表示一个与无穷远直线不相交的椭圆，然后是一条与无穷远直线相切的抛物线，最后是一条与无穷远直线的相交双曲线.



开普勒真可算得上是一位类比大师，他是第一个把圆锥曲线看作是连续形成的数学家.先是椭圆，在极端情况下变为抛物

线，接着变为双曲线，它好像是在一个方向上的无穷远处消失后，又在相反方向上重新出现的椭圆.

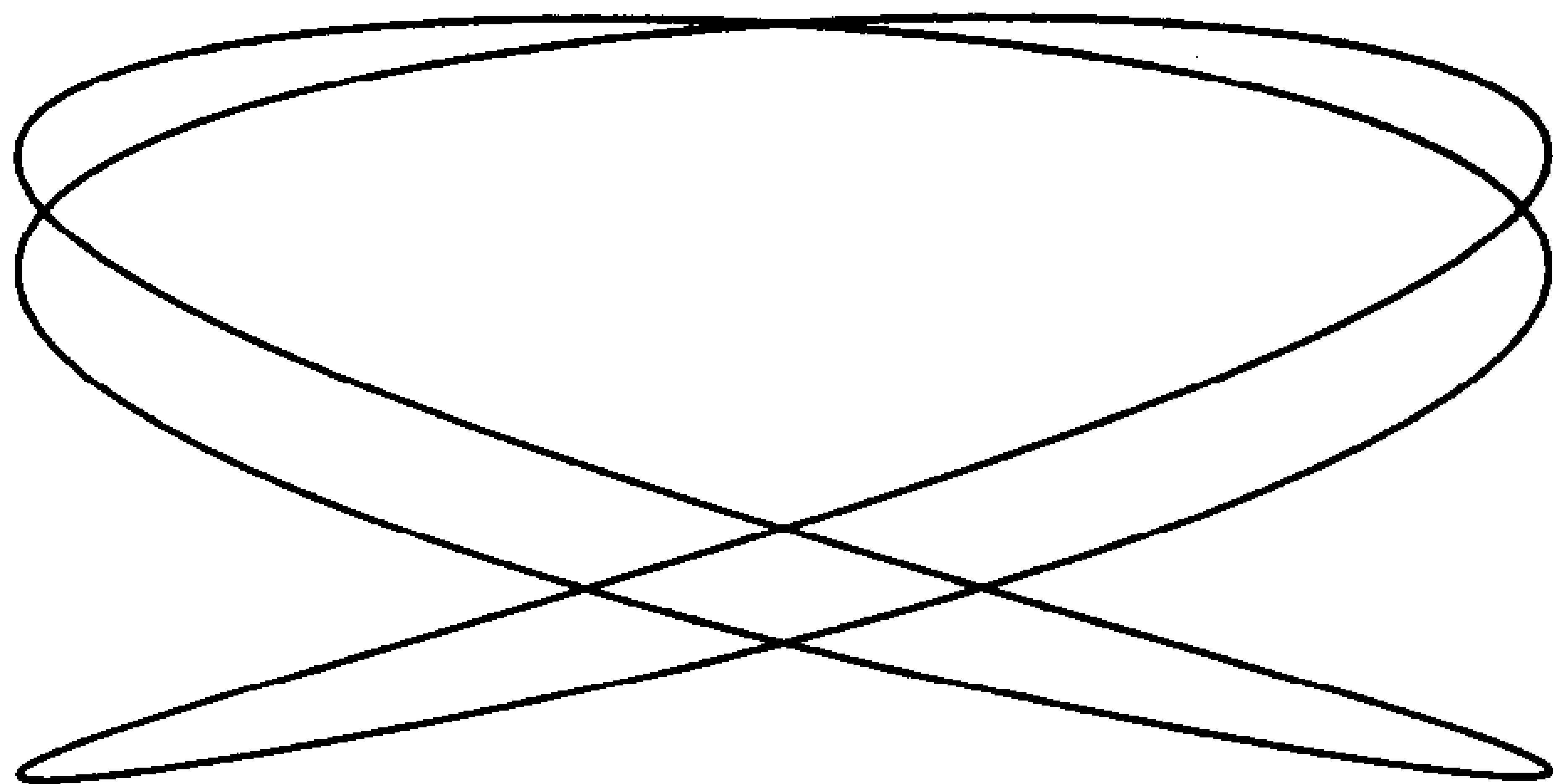
针对帕普斯以前描绘的特定的点，开普勒引进了"焦点"这一术语，因为经过椭圆一个焦点的光线反射后通过另一个焦点.

一个实圆不会与无穷远直线相交与任何实点，但它与无穷远直线相交于一对虚点，这一对虚点称为圆在无穷远处的点. 这两个点是所有的圆的公共点.

过圆在无穷远处的虚点向圆锥曲线(不是与无穷远直线相切的抛物线)作虚切线形成一个四边形，它的顶点是该圆锥曲线的四个焦点. 这四个焦点中两实两虚.

Lissajous figures *or* Bowditch curves 里沙朱斯图或波笛奇曲线

这一曲线是波笛奇(Nathaniel Bowditch)在 1815 年首先讨论过，后来由里沙朱斯(Jules Antoine Lissajous)于 1857 年重新讨论的.



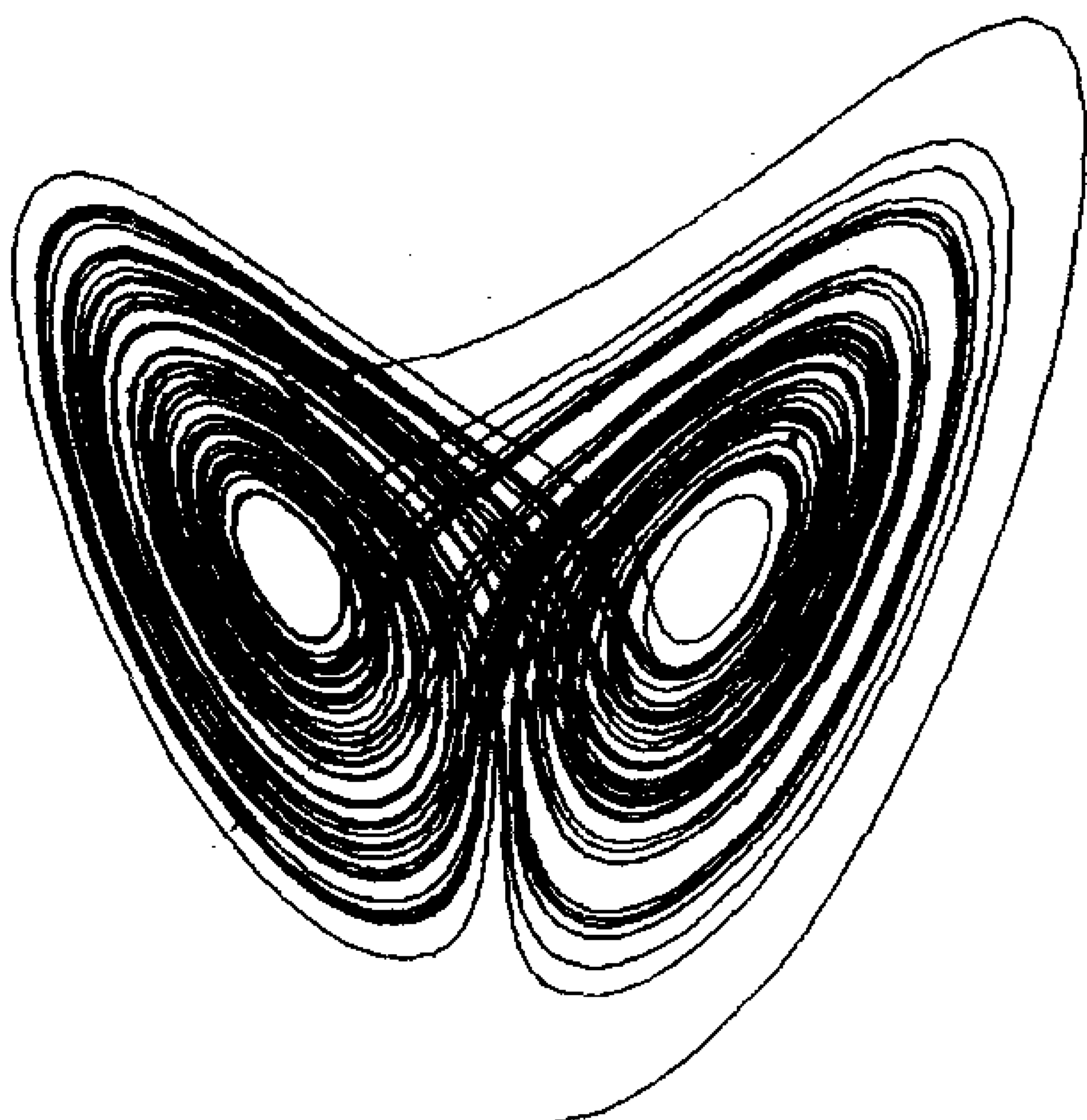
里沙朱斯图是在两个相交成直角的方向上的两个调和运动的组合. 如果周期相等，那么曲线是一个椭圆. 如果一个周期是另一个周期的两倍，那么曲线是一条四次曲线，贝努里双纽线是它的特殊情况.

它的方程可写为以下形式：

$$x=a\sin(pt+q),\ y=b\sin t.$$

Lorenz attractor　洛伦茨吸引子

洛伦茨吸引子是以麻省理工学院(Massachusetts Institute of Technolegy)的气象学家爱德华·洛伦茨(Edward Lorenz)命名的，他是在研究从下面得到热量的一层液体的状态时发现的，这层液体可能就是大气层中的一层空气.

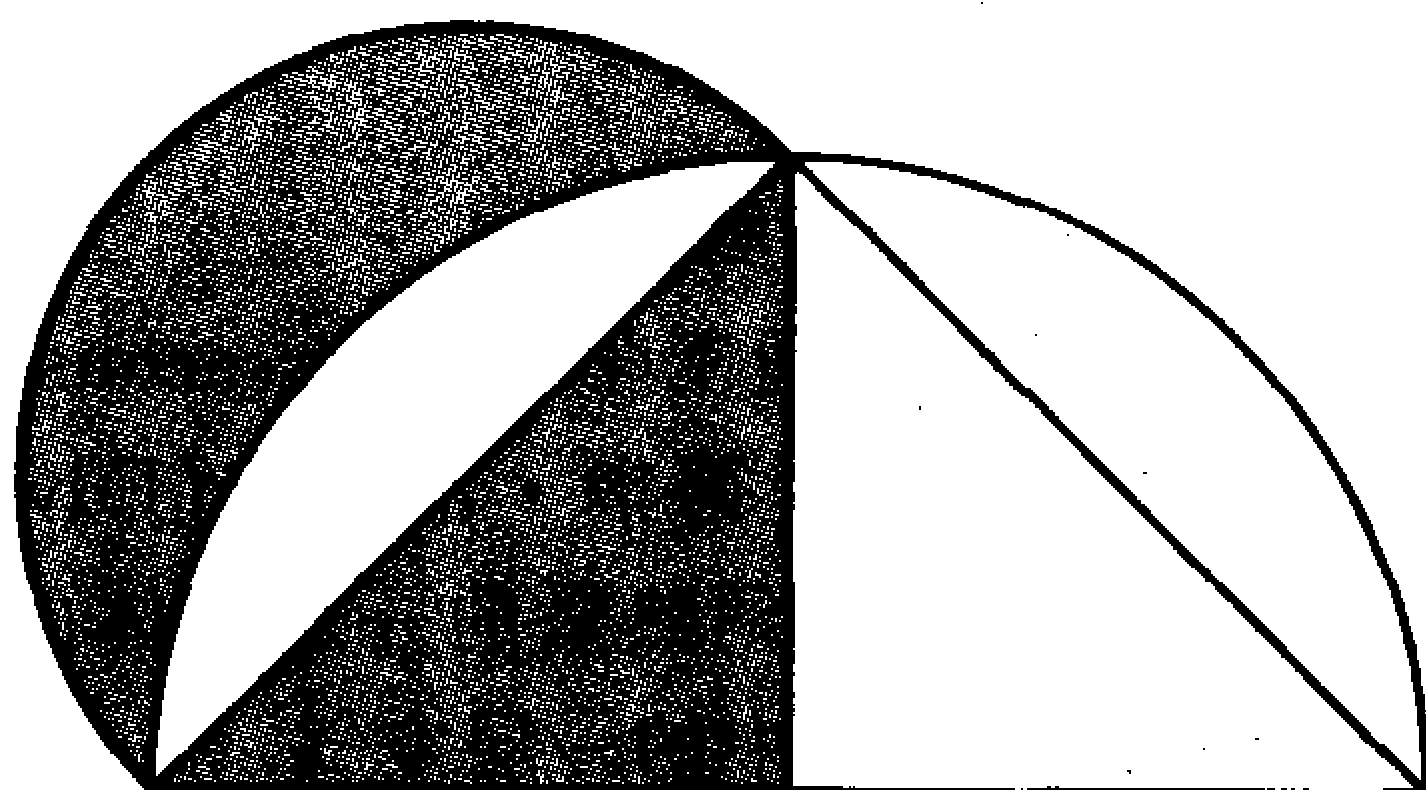


表示这种状态的点的路径在三维空间运动.当时间为零时，它从原点出发，绕一个圈摆动，可能摆动几次，然后换到另一个圈摆动几次，如此穿来穿去，似乎是不能预料的.

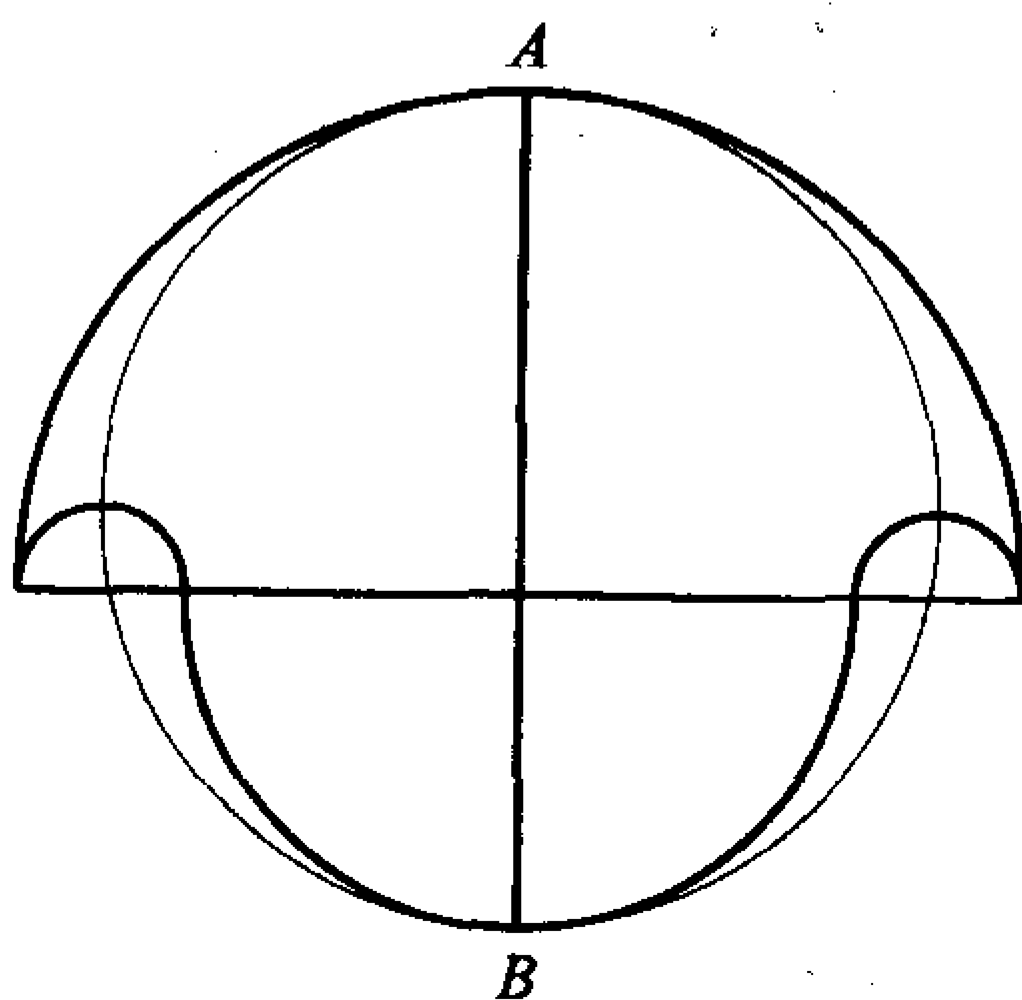
lunes　月牙形

亚里士多德(Aristotle)是一位出色的几何学家，但在处理日常生活的事务中却是一个无能的人.他在参加一次当代的数学家的漫画聚会上描绘了月牙形(开奥斯的希波克拉底(Hippocrates of Chios)).更有意义的是可以认为他是第一位把定理按照逻辑的顺序排列的数学家，欧几里得的《几何原本》所用的

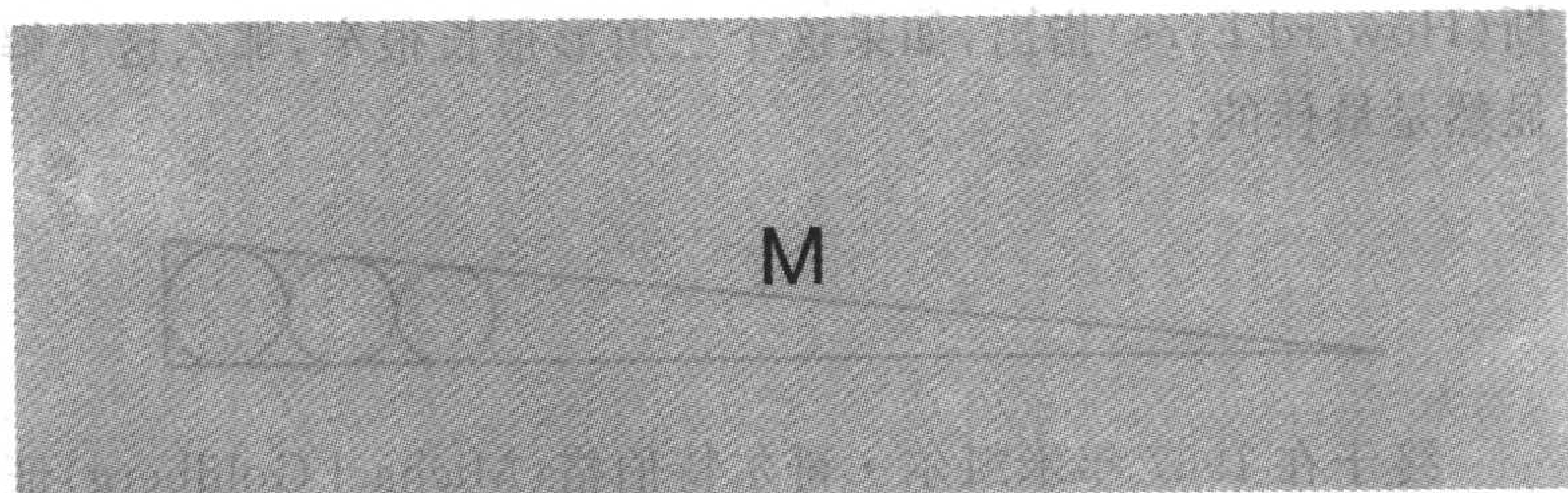
就是这种方法.



上图中有一个内接于半圆的半个正方形以及正方形的一边上的另一个半圆.希波克拉底(Hippocrates)证明了影阴部分的月牙形的面积等于影阴部分的三角形的面积.(使一个以曲线为边界的区域的面积等于一个以直线为边界的图形,这暗示化圆为方的可能性.)

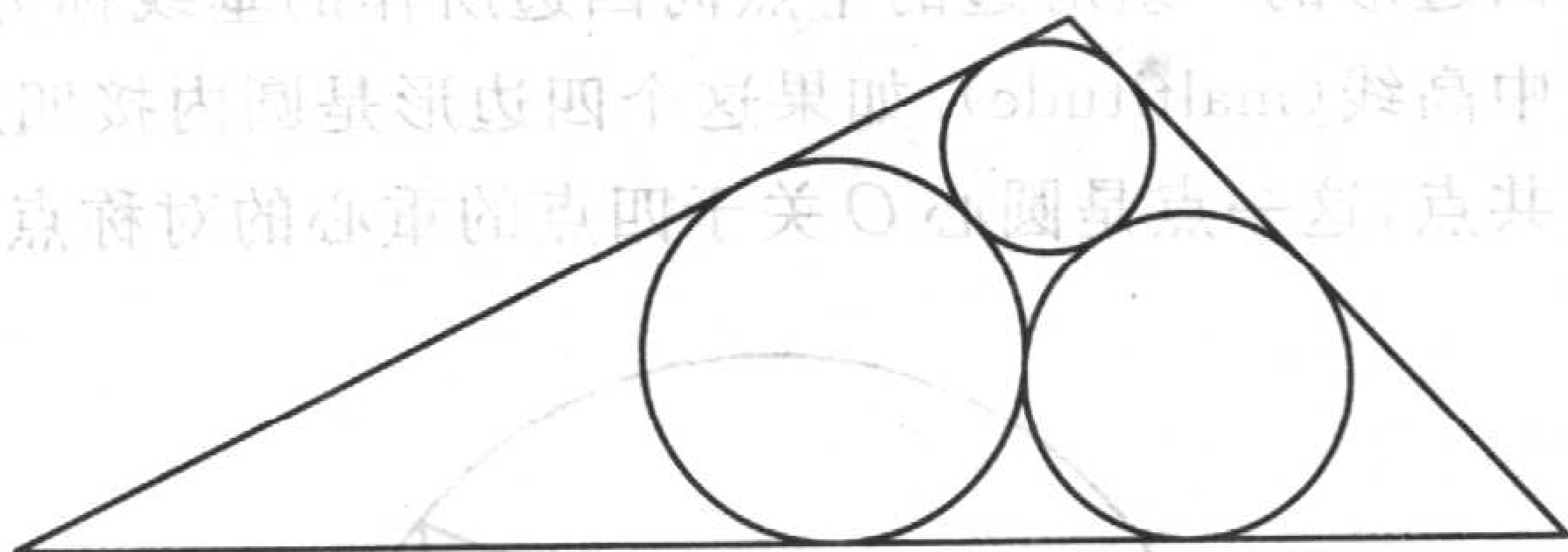


阿基米德在其著作《论引理》(*Book of Lemmas*)中证明了上述由四个半圆组成的图形(他称它为盐瓶(salimon))的面积等于以 AB 为直径的圆.

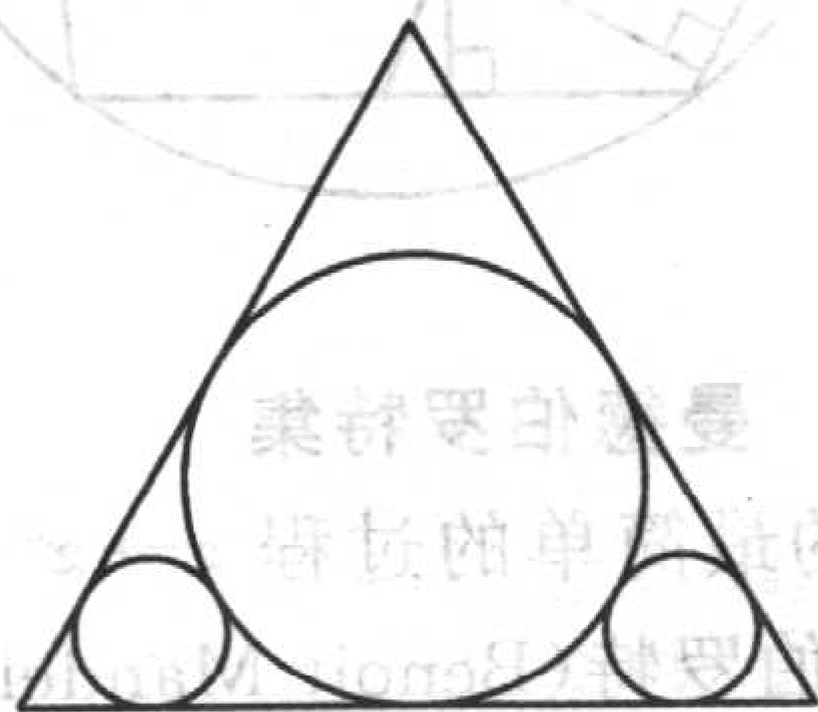


Malfatti's problem　马尔法蒂问题

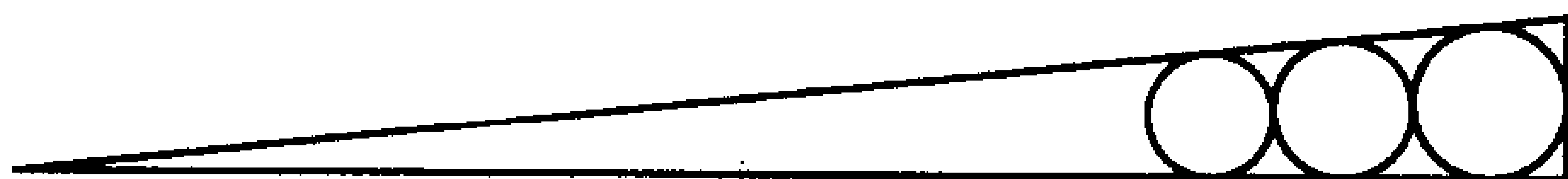
1803 年马尔法蒂(Malfatti)提出了这样一个问题:从一个大理石棱柱中割出三个(总体积)最大的圆柱.数学家们立即认为只要找到两两相切,且与棱柱的截面三角形的三边相切的三个圆时,问题就可解决.这一问题被一些数学家及时解决了.



后来在 1930 年有人指出,即使在一个等边三角形中,如果从柱体的截出的是一个内切圆和两个较小的圆,那么大理石就少浪费一点,尽管圆的面积增加不多,对于等边三角形只增加 1%多一点.



三十五年以后(有时数学的发展是很慢的),霍华德·伊芙斯(Howard Eves)指出,如果这个三角形很长很窄,那么这个解显然是最佳的:

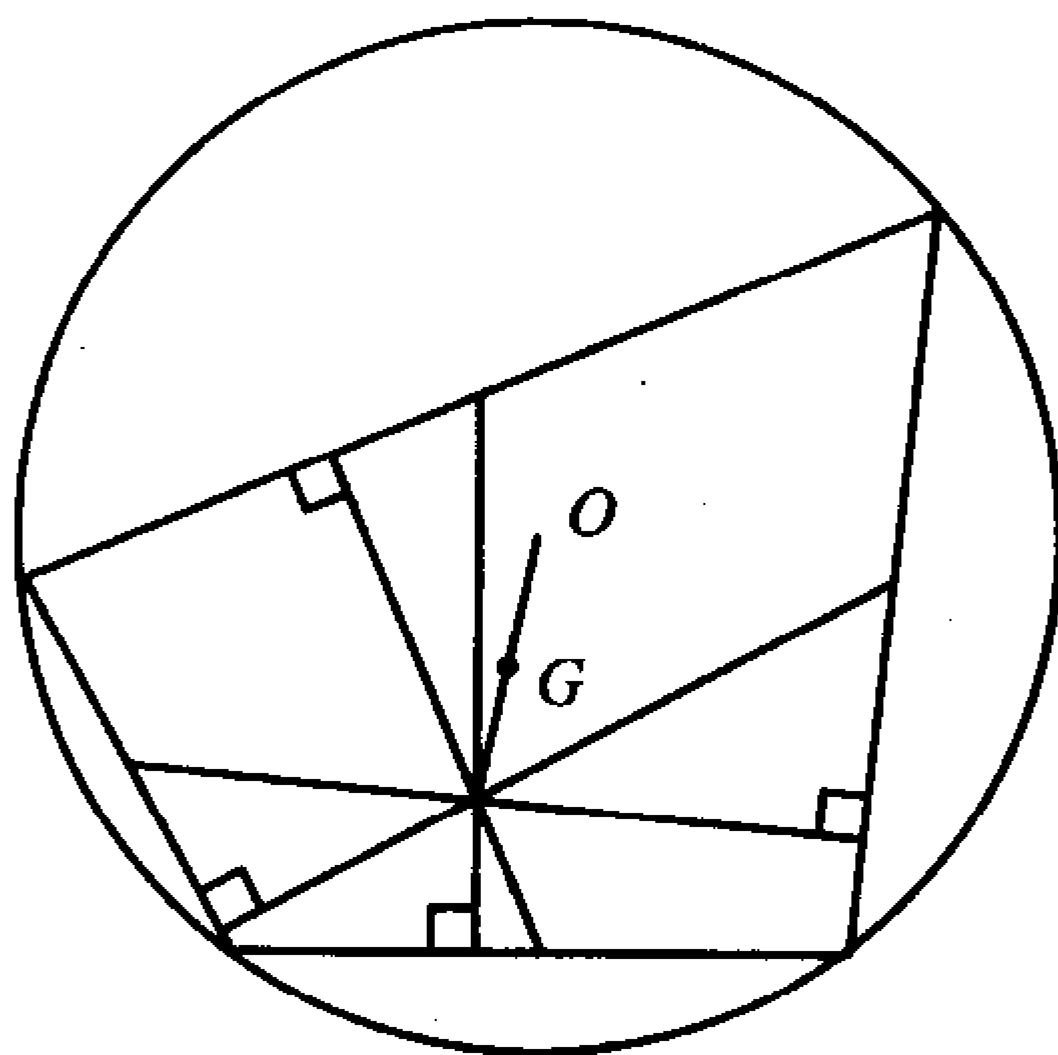


终于在1967年米凯尔·哥尔特伯格(Michael Goldberg)证明了"原来的"解从来不是最佳的.最大的面积是在不断争论中得到的.

参考书:C. STANLY OGILVY, *Excursions in geometry*, Oxford University Press, New York, 1969.

maltitudes　中高线

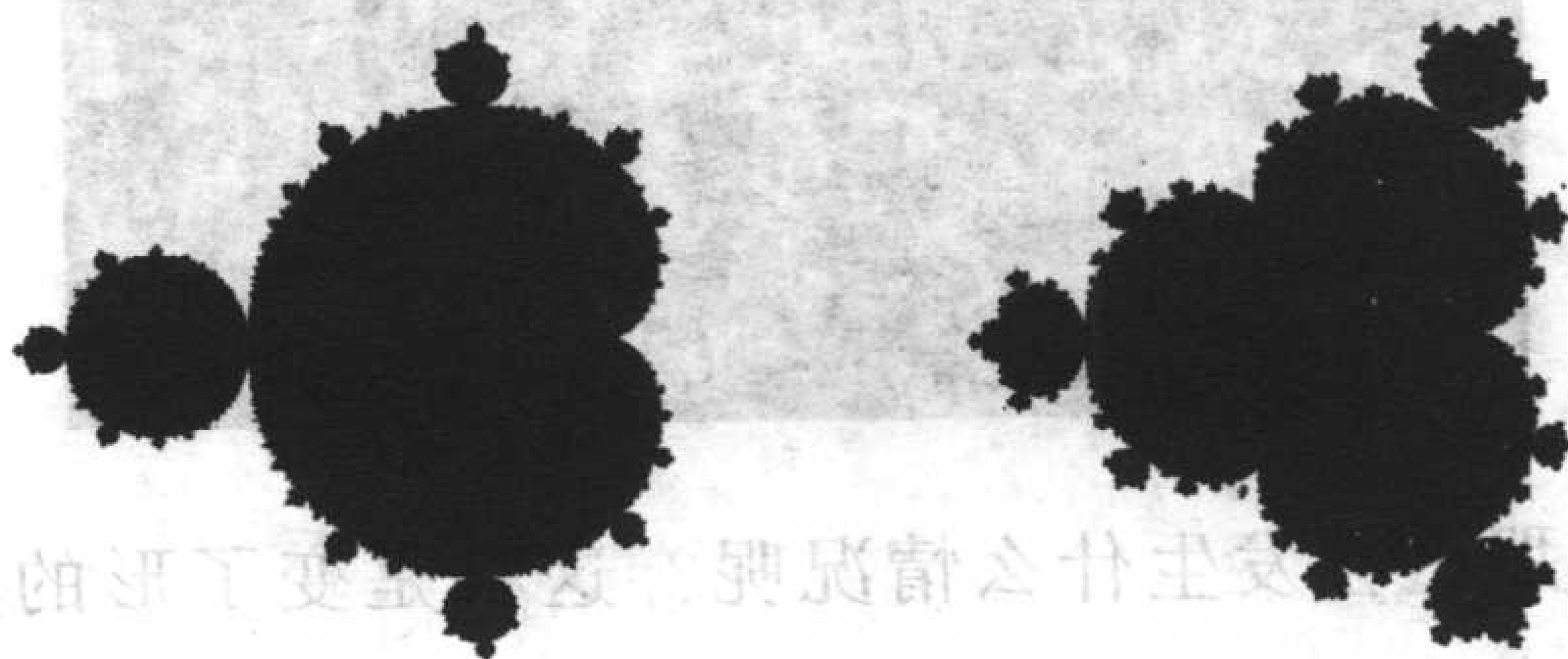
过四边形的一组对边的中点向四边所作的垂线称为这个四边形的中高线(maltitude).如果这个四边形是圆内接四边形,那么它们共点,这一点是圆心 O 关于四点的重心的对称点.



Mandelbrot set　曼德伯罗特集

定义朱里亚集的最简单的过程 $z \to z^2 + k$ 也定义曼德伯罗特集,它是B·曼德伯罗特(Benoit Mandelbrot)在1980年发现

的，曼德伯罗特曾经是朱里亚的学生．对于每一个复常数 k，原来的点或者趋近于无穷远，或者趋近于一个定点，或者在朱利亚集内跳动．z 不趋向于无穷时，所有这些 k 的值形成一个曼德伯罗特集．对于不同的函数类似的集合都是存在的．下图就表示曼德伯罗特集（左图）以及对于函数 z^4+k 的类似的集合．

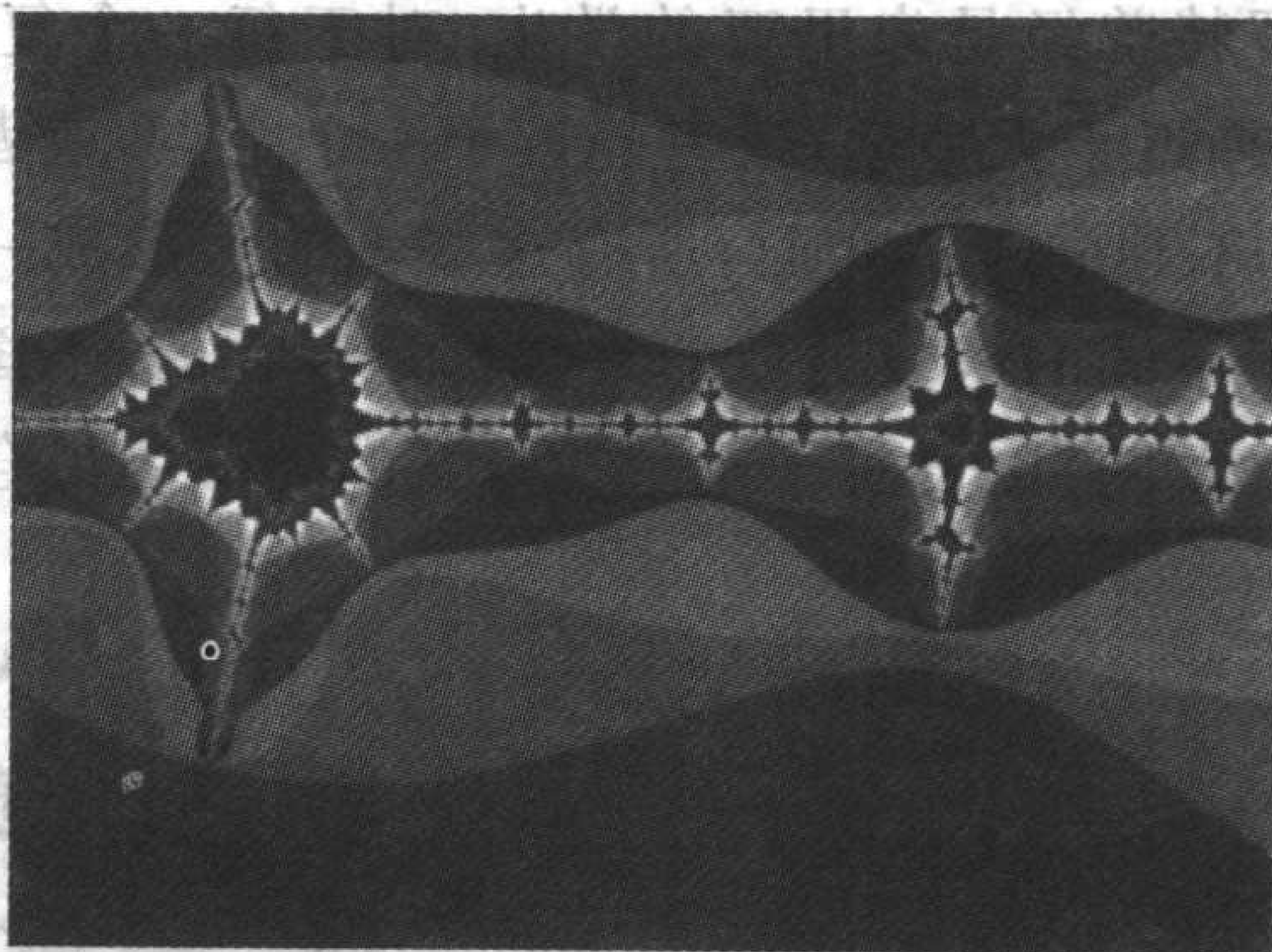


曼德伯罗特集的主体是一条心脏线．它的左边有一个大圆，上下各有一个圆形区域．心脏线和所有这些区域都附有一些小区域，这些小区域也都附有许多更小的小区域，英国小说家斯威夫特（Jonathan Swift）的诗这样写道：

> 就像自然学家观察到的那样，
> 一个甲虫俘获一些更小的甲虫；
> 这些甲虫又咬住更小的甲虫，
> 直到无限．

曼德伯罗特集的边界是分形．不管放大的倍数有多么大，在某种意义上，显示在计算机的荧屏上的总与它本身相似．在某个位置上，重新出现曼德伯罗特集的整个图像．如果图像不是集合的一部分，那么当 z 趋近于无穷时的速度能在荧屏上显示出一种颜色或灰色的阴影．在沿集合的对称轴的一个附带的圆形区域的左边的一点上，图像显示出放大 170 倍的效果．

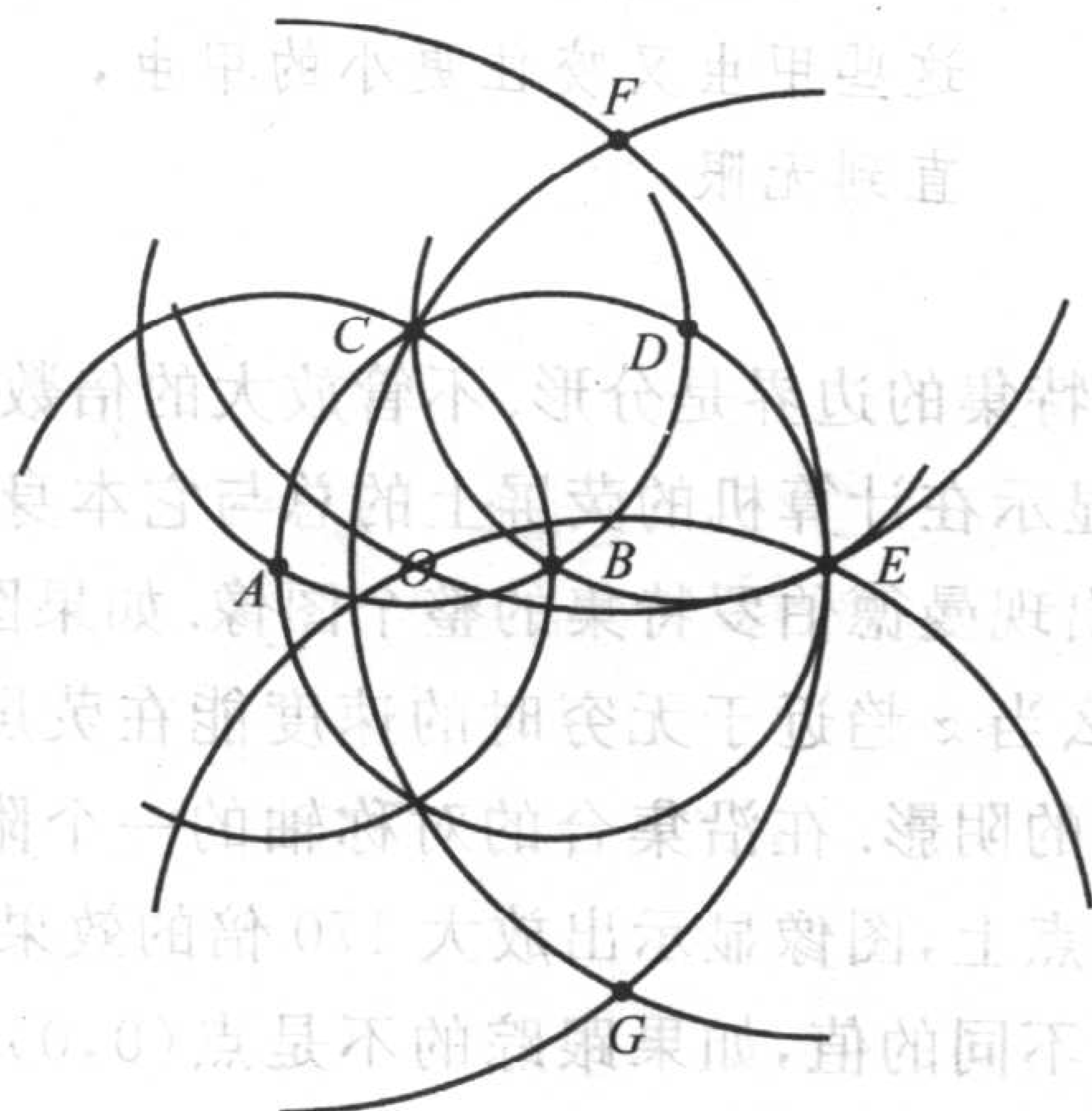
对于 k 的不同的值，如果跟踪的不是点(0,0)，而选取其他



点的路径，那么会发生什么情况呢？这将是变了形的曼德伯罗特集.

Mascheroni constructions 马斯凯罗尼作图法

摩尔（Mohr）和马斯凯罗尼（Mascheroni）发现了这样一个奇怪的事实：任何能用圆规和直尺作的图也都能只用圆规作图. 只用直尺不用圆规也是可能的，但是要给出一个定圆及其圆心，或者就给出一段圆弧及其圆心，或者在不给出圆心时给出两个相交的定圆.

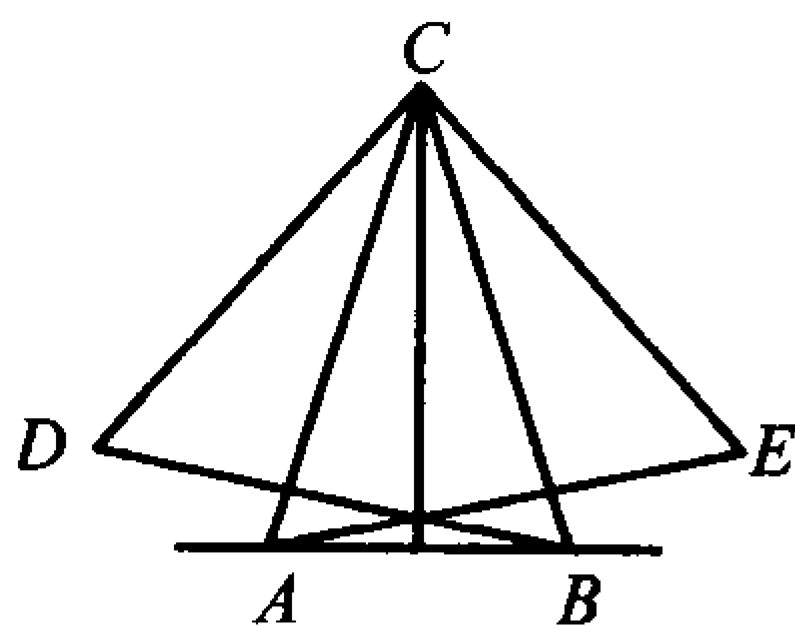


例如，要求出 AB 的中点，首先以 A 和 B 为圆心，作半径为 AB 的圆. 然后以 C 为圆心，AC 为半径画一个圆，以 D 为圆心，DB 为半径画一个圆，以 A 为圆心，AE 为半径再画一个圆，再以 E 为圆心，EC 为半径画一个圆. 最后以 F 和 G 为圆心，经过 E 各画一个圆，相交于 AB 的中点.

参考书：H. STEINHAUS, *Mathematical snapshots*, 3rd edn, Oxford University Press, 1969.

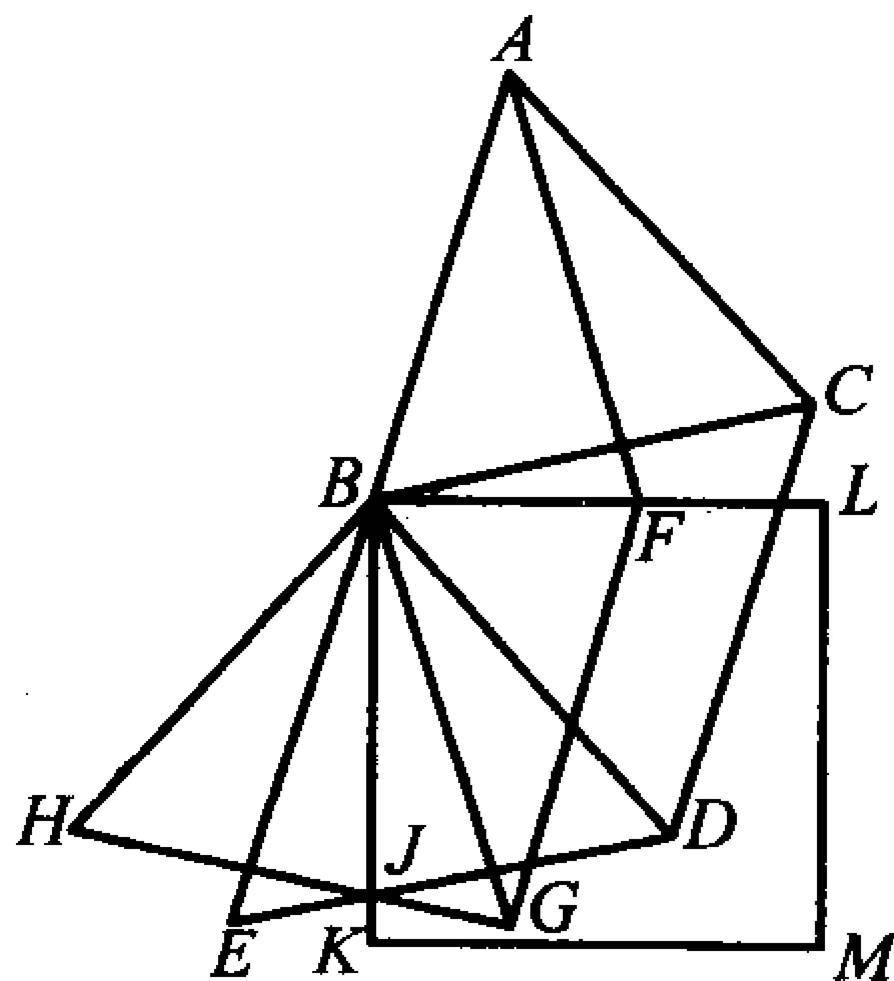
matchstick constructions 火柴作图法

著名的棋类问题专家道森(T. R. Dawson)发现了能用尺规作出的每一个点都能用同样长的火柴，即用活动的线段作出，但其他点不行.



上图是道森用 7 根火柴作出的平分 AB 的方法. 正如他所指出的那样，它也平分了$\angle ACB$ 和$\angle DCE$，或者说平分任何一个小于 120°但不等于 60°的角.

下图表明如何作一个正方形. 先作三个等边三角形 ABC，

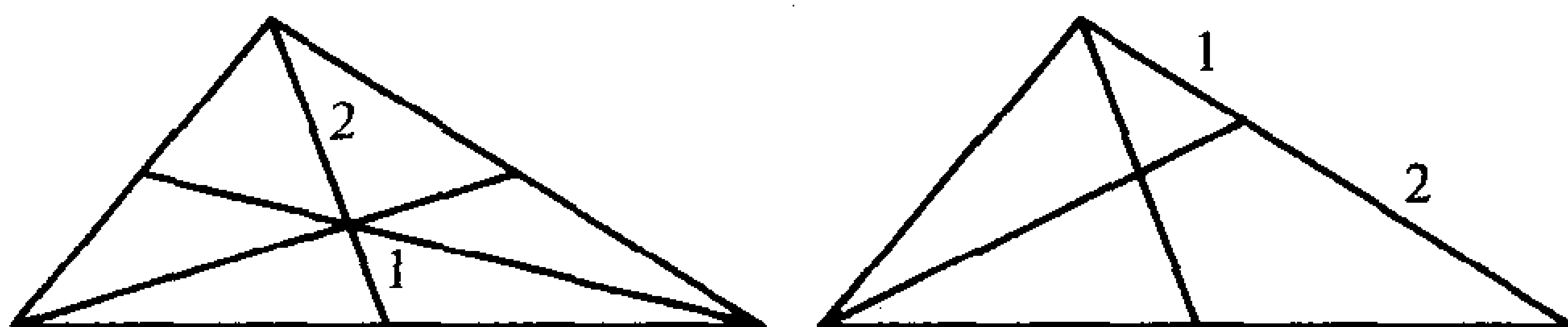


BCD 和 BDE. 设 AF 是$\angle BAC$ 内的任意一条直线，再作点 G，然后作点 H. 点 F 和 GH 与 ED 的交点确定了所求的正方形 $BKML$ 的两边.

参考书：T. R. DAWSON，：'Match-stick geometry'，*Mathmatical Gazette*，No，254，1939.

medians of a triangle concur　三角形的中线共点

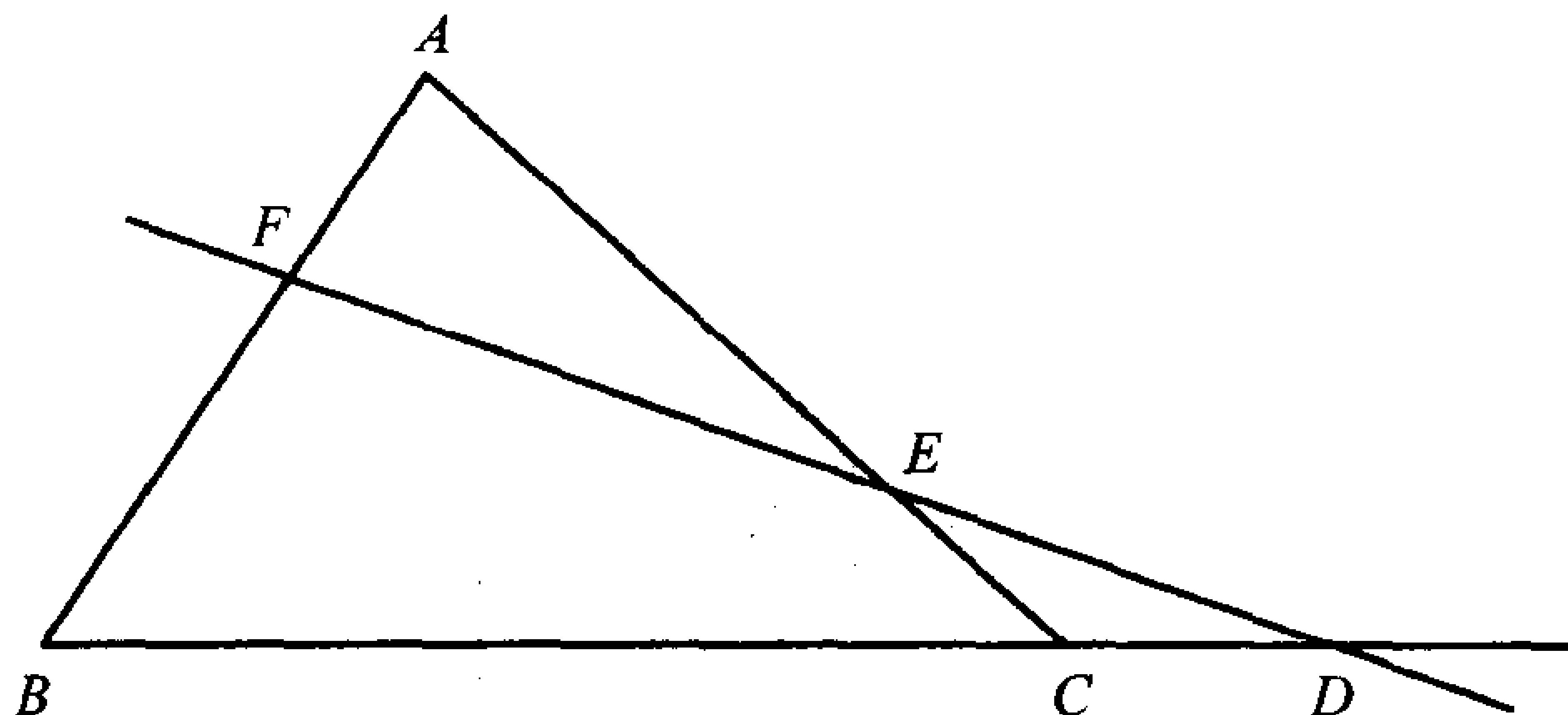
中线是连接三角形的顶点和对边中点的线段. 中线的交点把每一条中线分成的比是 2∶1. 有趣的是过顶点平分中线的直线把对边也分成 2∶1.



中线的交点也是在顶点处的三个等质量的重心，也是把整个三角形看作为厚度均匀的薄片的重心.

Menelaus' theorem　梅涅劳斯定理

亚历山大的梅涅劳斯在其关于球面三角的著作中证明了这一定理.



如果 ABC 是任意三角形，DEF 是截所有三角边的所有的直线，那么

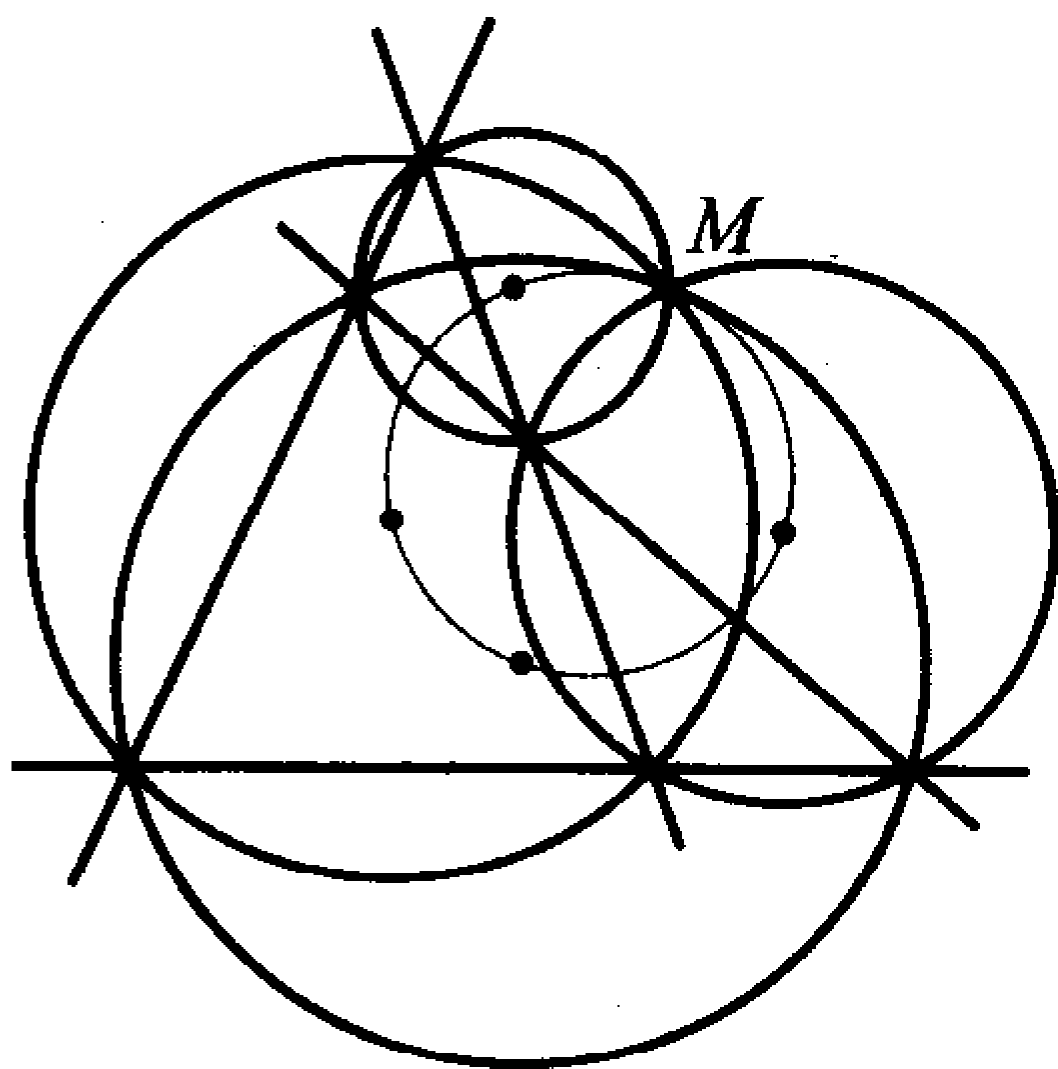
$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=-1.$$

这个比为负是因为 DEF 必截在一边的延长线上．上图中，D 截 BC 在延长线上，DC 是反向度量到 D 的，所以算作负的.

梅涅劳斯定理可以推广到任意多边形.

Miquel point　密克尔点

四条一般的直线形成四个三角形，它们的外接圆共点，这一点是密克尔点．该点是与四条直线都相切的抛物线的焦点．这四个圆的圆心也在同一个圆上，这个圆经过密克尔点.



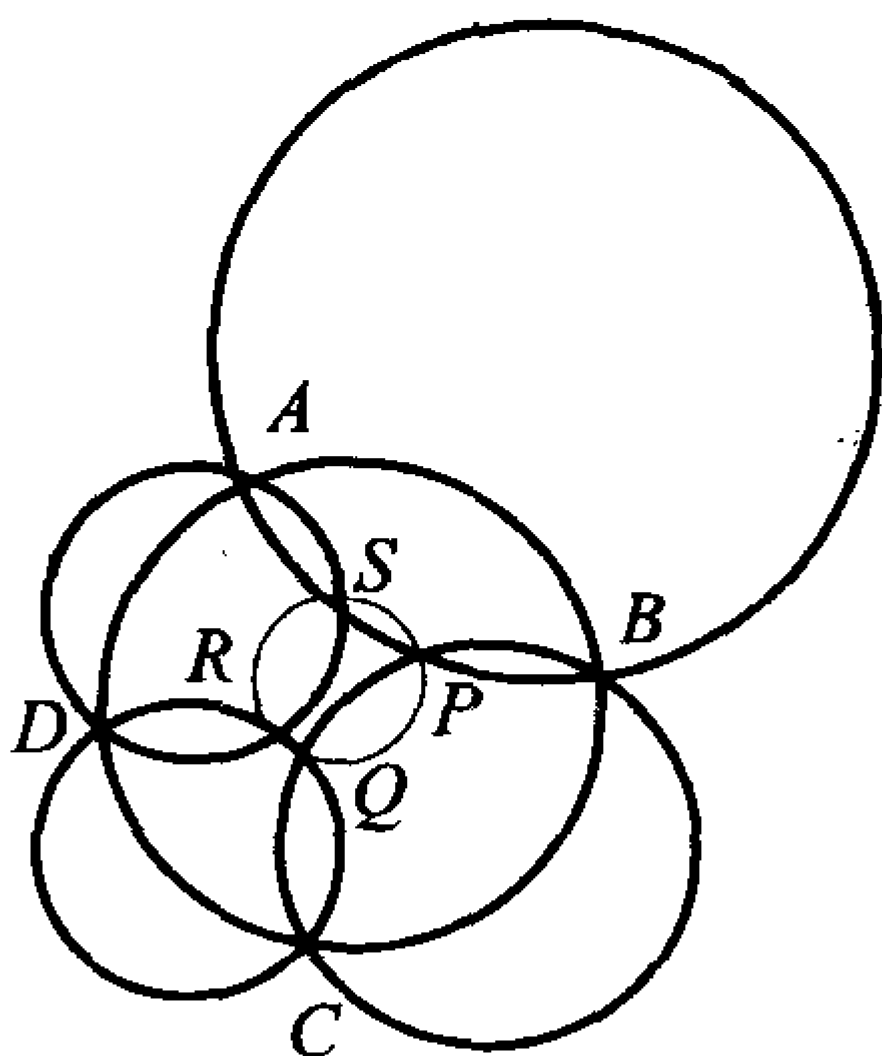
如果我们画五条一般的直线，那么会发生什么情况呢？每次取其中的四条，得到五个密克尔点，它们都在同一个称为密克尔圆的圆上．此外，四条直线的每一组都得到一个“外心圆”，所有这五个圆都经过同一点.

如果画六条直线，那么每五条一组生成一个密克尔圆，当

然，所有这些密克尔圆都经过同一点，等等.

Miquel's theorem　密克尔定理

画一个圆，在圆上取四点 A,B,C,D. 过 A 和 B，B 和 C，C 和 D，D 和 A 各作一个圆. 于是这些新的圆的另四个交点也在一个圆上.



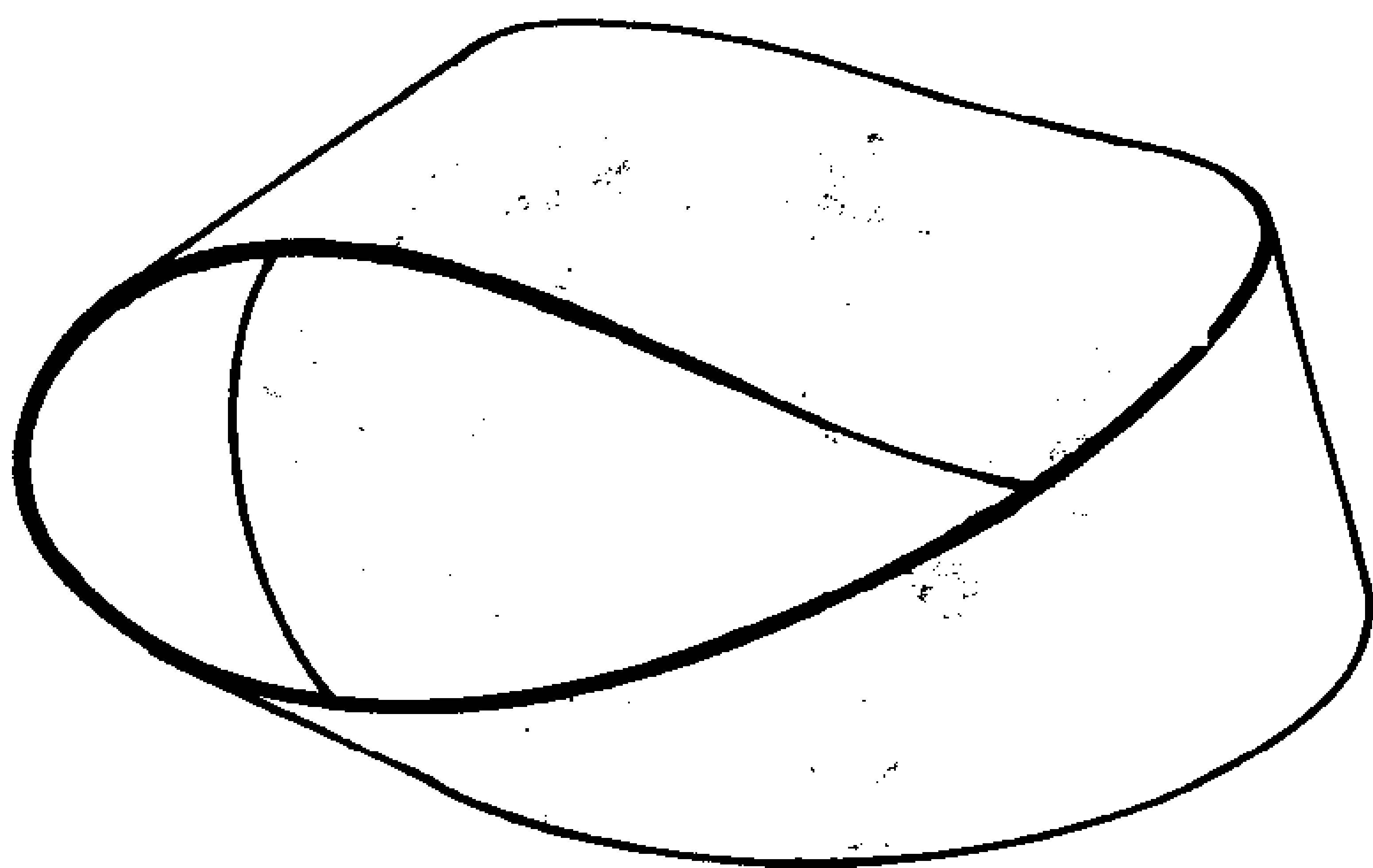
上面的图是对称的. 虽然从圆 $ABCD$ 出发，但从另一些圆中的任意一个出发也能得到同样的结果. 当这些点排列成以下形式时就明显出现对称性：

$$\begin{matrix} A & B & C & D \\ S & P & Q & R \end{matrix}$$

从第一行中选出两个字母有六种方法. 加上第二行中不对齐的两个字母，所有这四点在同一个圆上.

Möbius strip　莫比乌斯带

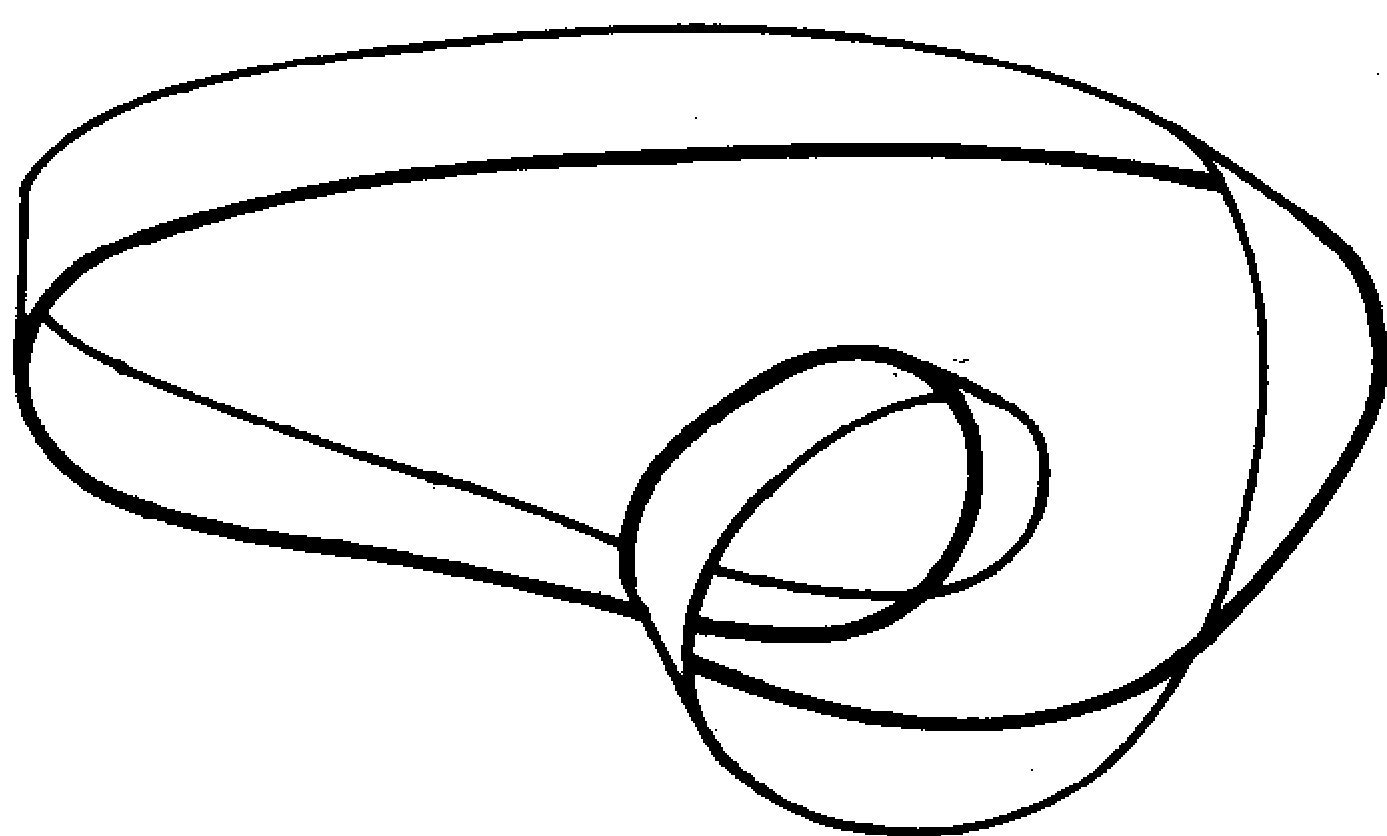
取一张薄的矩形的长纸条，把纸条转半圈后将狭的两头拼接起来.（也可以将较长的边拼接起来，但不方便.）结果就得到以莫比乌斯（August Möbius）命名的莫比乌斯带，这是他在 1865 年发表的.



莫比乌斯带有一条棱，只有一个面，以左旋和右旋两种形式出现，这两种形式只有在四维空间内才能互相转化.

从这一曲面上的任意一点出发，沿着与棱不相交的方向画一条线. 在画线的过程中画到一半时就会经过出发点，但是这一点在纸的另一面上，继续画一圈就会回到出发点.

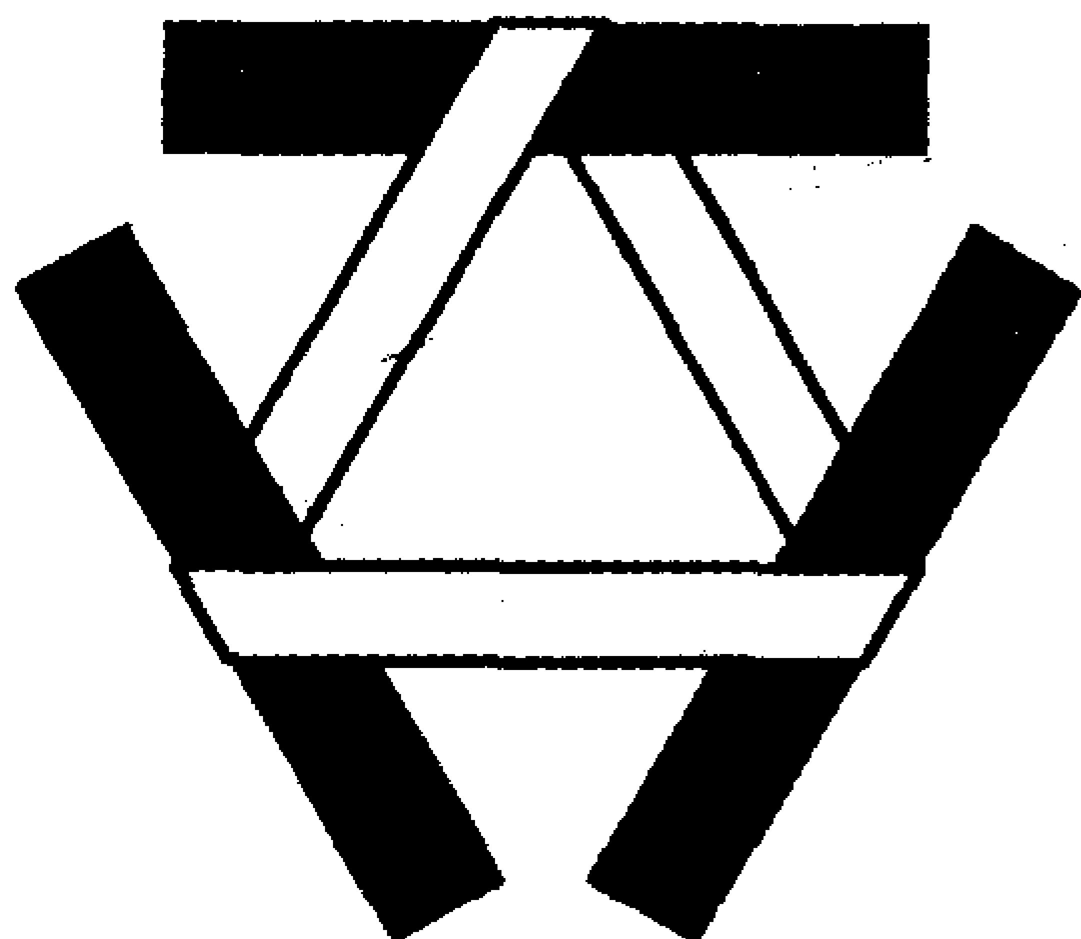
因为曲面是单面的，绞半圈的传送带被哥尔特利奇(Goldrich)轮胎公司作为专利，使两面经受同样的磨损.



沿莫比乌斯带的中心线剪开. 结果不是两片，而是有四个半扭转的一片，就像把一个长的矩形扭转两整圈，再把两头拼接起来那样. 现在的棱是两条分开的曲线，把它们连起来的并不是各自的结.

两个滚筒可将一个柱形的纸条拉紧，三个滚筒可将一个莫

比乌斯带拉紧.



Monge's theorem　蒙日定理

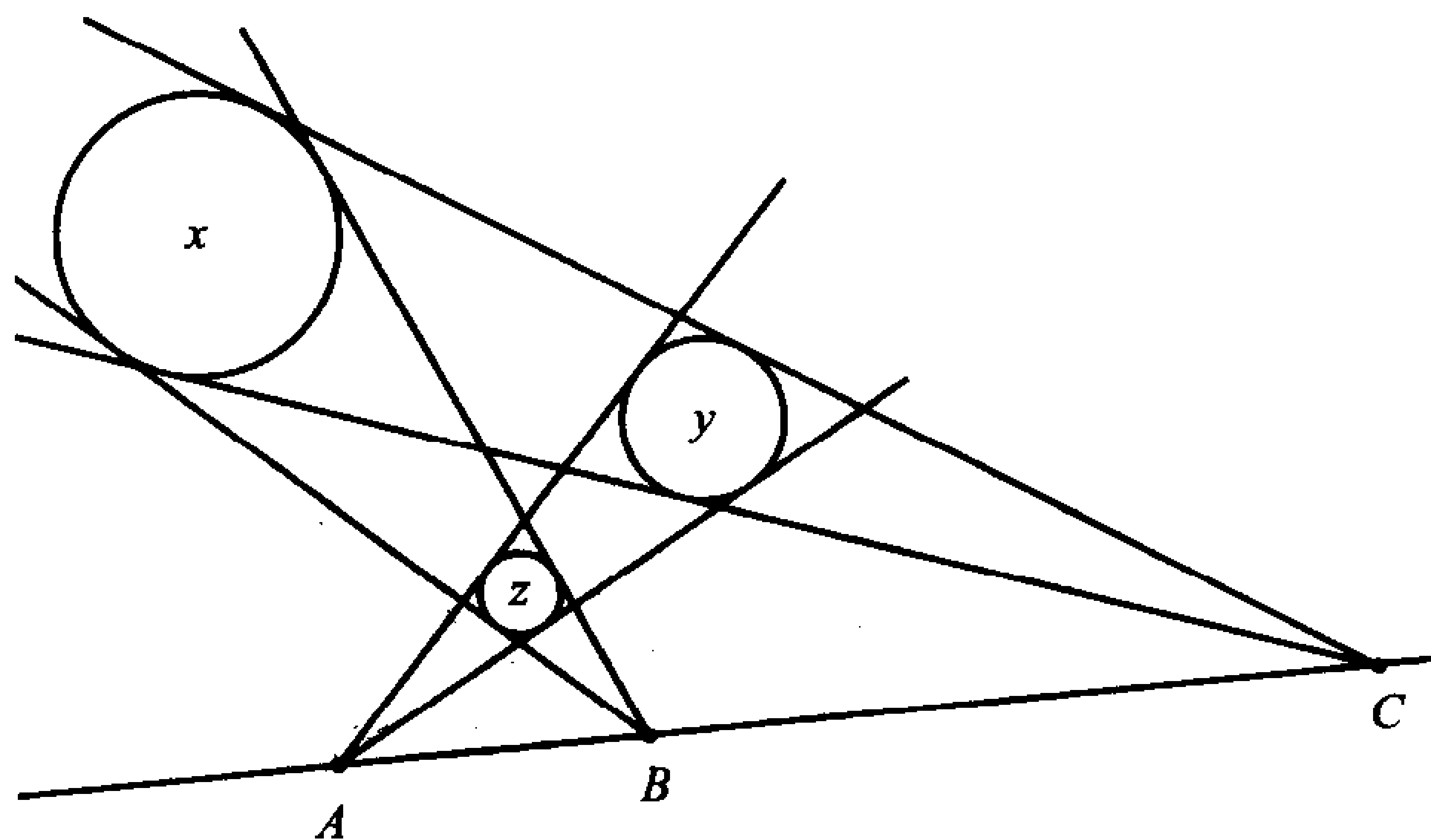
x,y,z 三个圆中每一对外公切线相交于同一直线上的三点 A,B,C. 如果考虑内公切线的交点(L,M 和 N 分别为圆 y,z,圆 z,x 和圆 x,y 的内公切线的交点),那么 AMN,BNL 和 CLM 也分别在一直线上.

工程师约翰·埃德森·斯威特(John Edson Sweet)首先提出这一问题时,L·A·格拉姆(L. A. Graham)这样写道:

> 他停了一会儿说,"是的,那本身就是十分明显的". 他的朋友感到很惊讶,要他解释一下……实际上,斯威特教授回答说,"设想平面内的三个球,不是平面内的三个圆. 设想有一个包着每一对球的圆锥,而不是画切线. 于是这三个圆锥的顶点都位于这个平面内. 这三个球的上面还有一个平面. 它靠着这三个球,且与这三个圆锥的每一个都相切,并包含这三个圆锥的顶点. 因此这三个圆锥的顶点位于这两个平面内,自然位于一条直线上."

这一定理是达朗贝尔(d'Alembert)首先提出的,蒙日

(Monge)采用与斯威特同样的方法证明的.



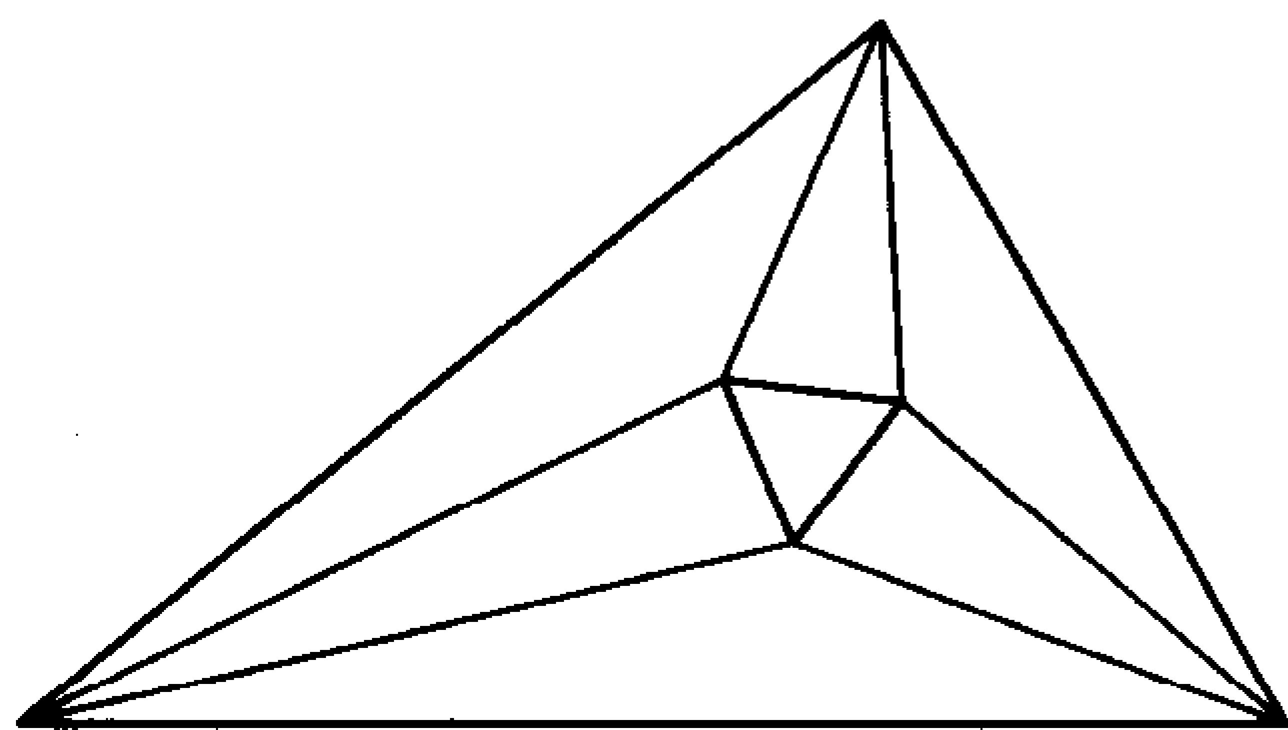
它在三维空间的类似的情况是在四个球中每次取两个所确定的圆锥位于同一平面内. 这些圆锥应画得使球在圆锥顶点的同一侧.

参考书:I. A. GRAHAM, *Ingenious Problems and Methods*, Dover, New York, 1969.

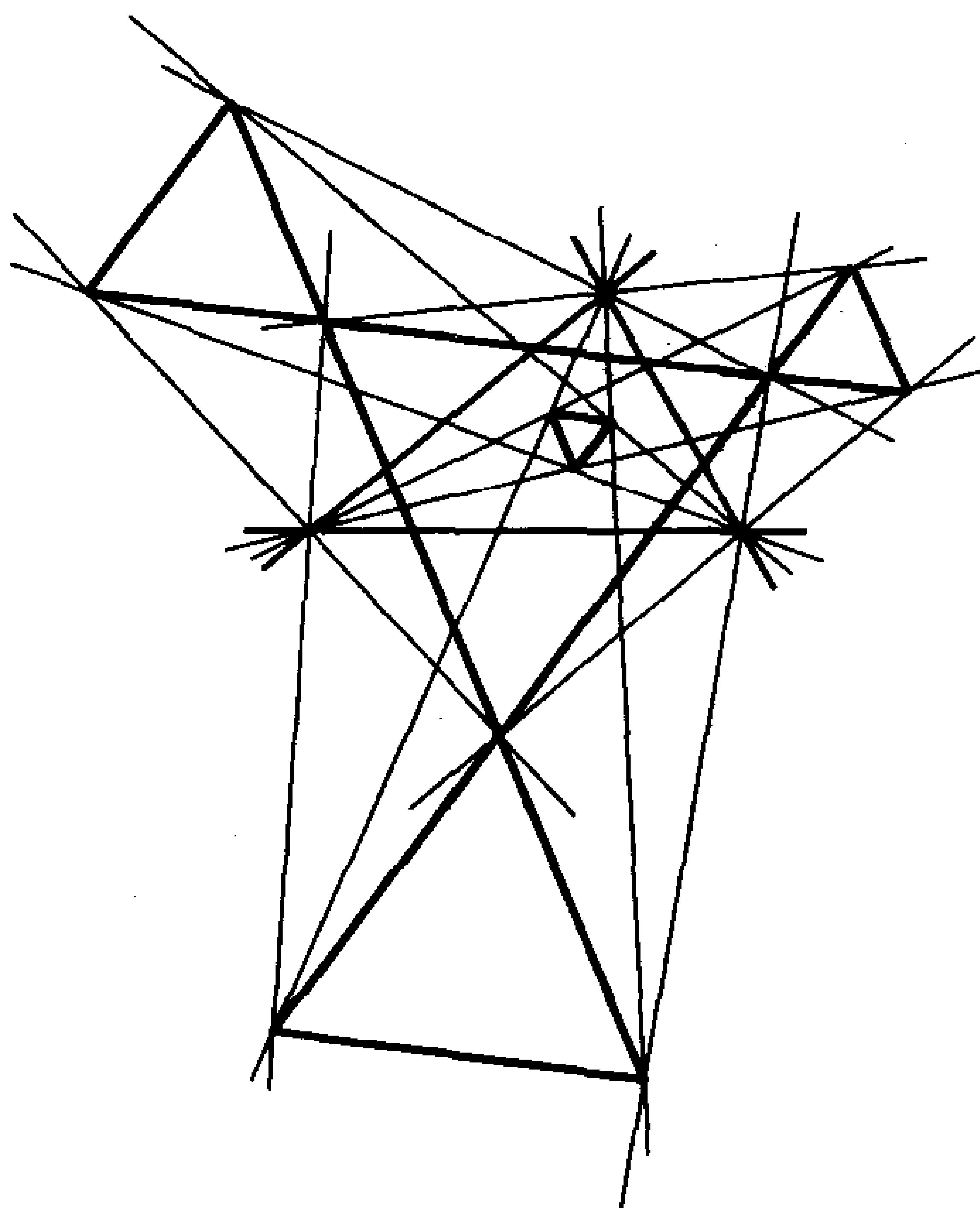
Morley's triangle 莫莱三角形

当弗兰克·莫莱(Frank Morley)在1899年突然发现一个奇特的定理时,他正在研究心脏线. 这一定理也许早就被许多人用铅笔和纸漫不经心地画过了.

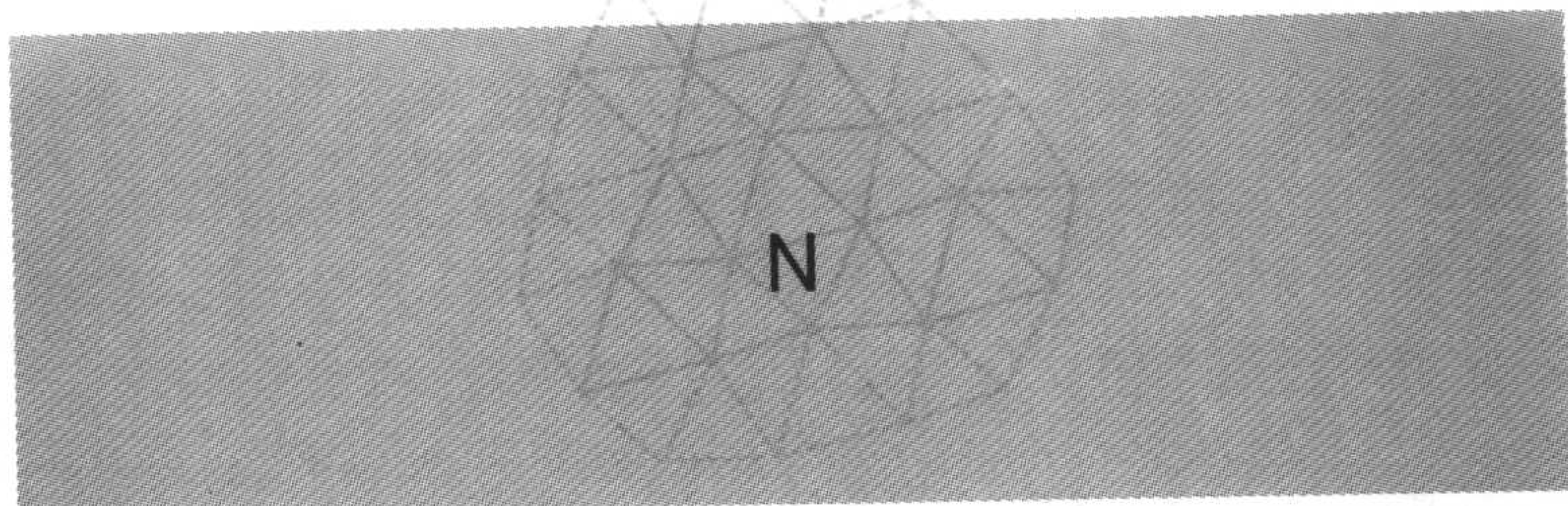
画一个三角形,再作各个内角的三等分线,这些三等分线的交点形成一个等边三角形.



如果改成该三角形的外角的三等分线,那就形成另一个等边三角形,这是理所当然的.还有,另两条外角的三等分线和该三角形的边的交点又形成三个等边三角形,如下图所示.



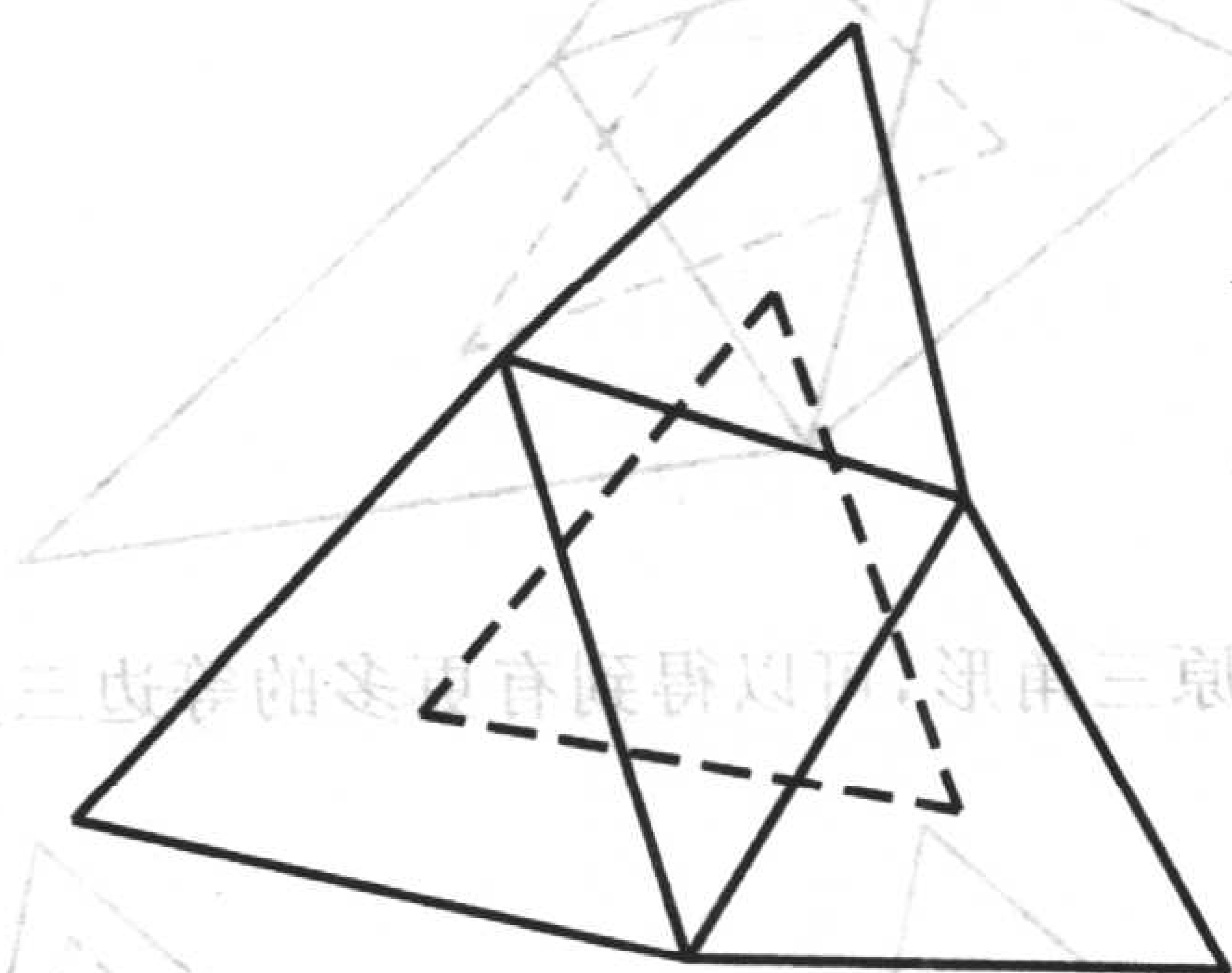
莫莱三角形与三尖点内摆线具有同样的方向,三尖点内摆线是该三角形的所有的西姆松线的包络.



Napoleon's theorem　拿破仑定理

传说是波拿巴·拿破仑(Napoleon Bonaparte)发现了这一定理.他在数学方面有一定造诣,所以这也是可能的.

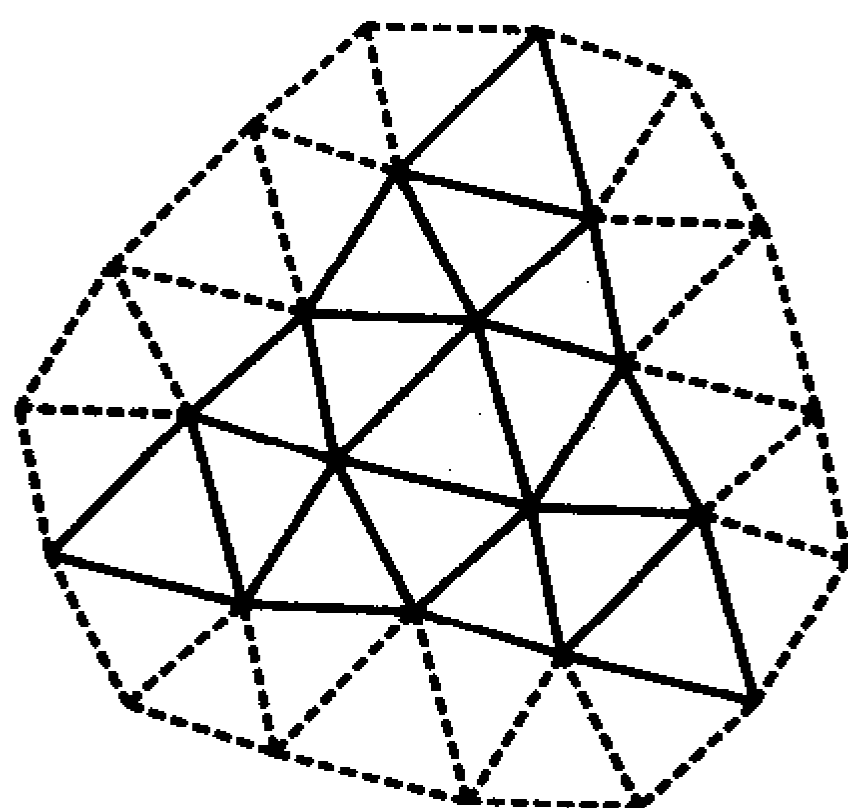
取一个三角形,在其边上向外各作一个等边三角形.此时这三个新的三角形的中心又形成一个等边三角形.



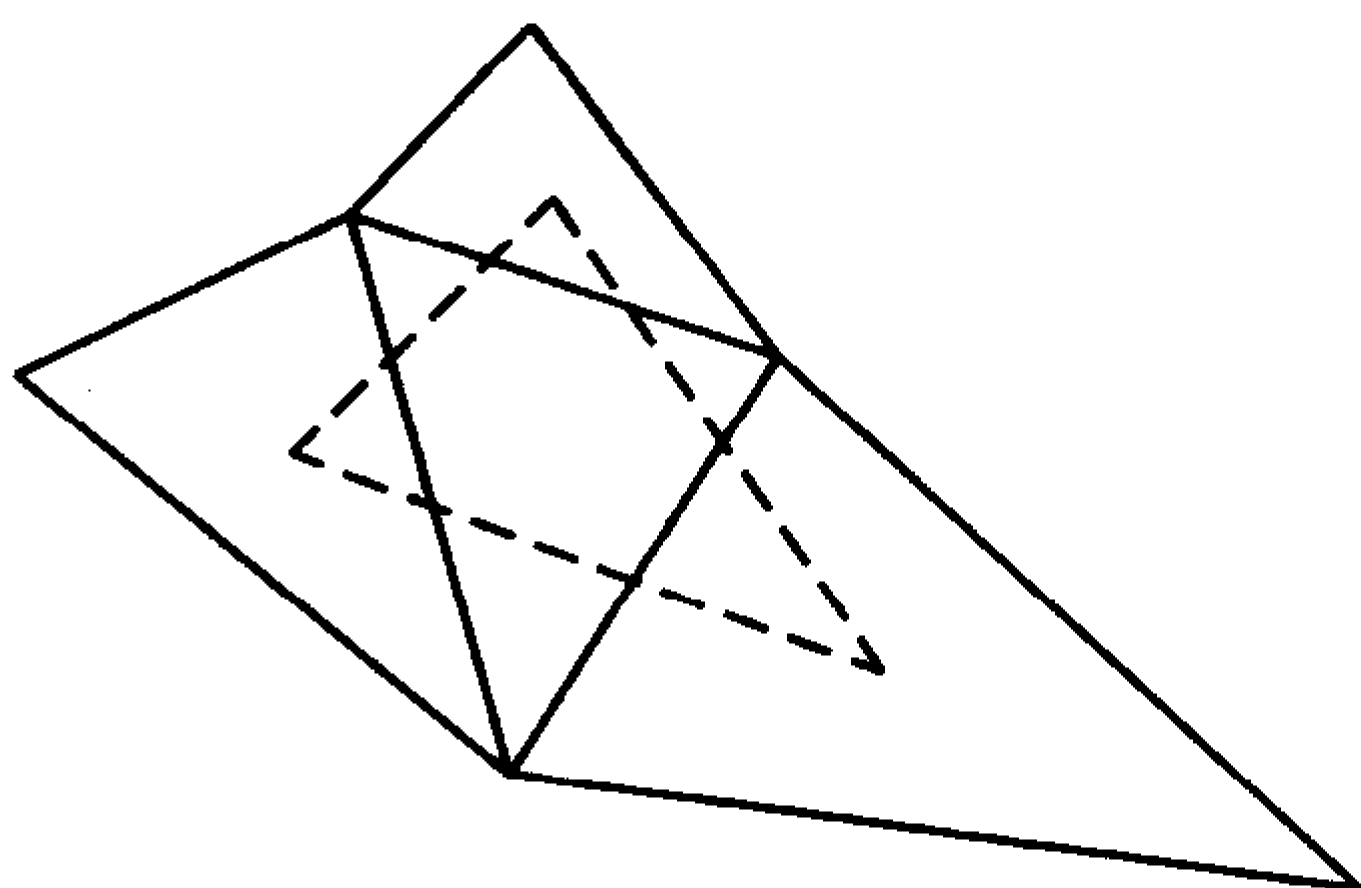
另外,这些等边三角形可以作在三角形内:它们的中心形成另一个等边三角形.这个三角形和向外作时得到的三角形具有同一个中心,它们的面积之差等于原三角形的面积.

另一方面,把一个等边三角形画在里面,两个画在外面,那么就得到一个三个角为30°,30°,120°的三角形.

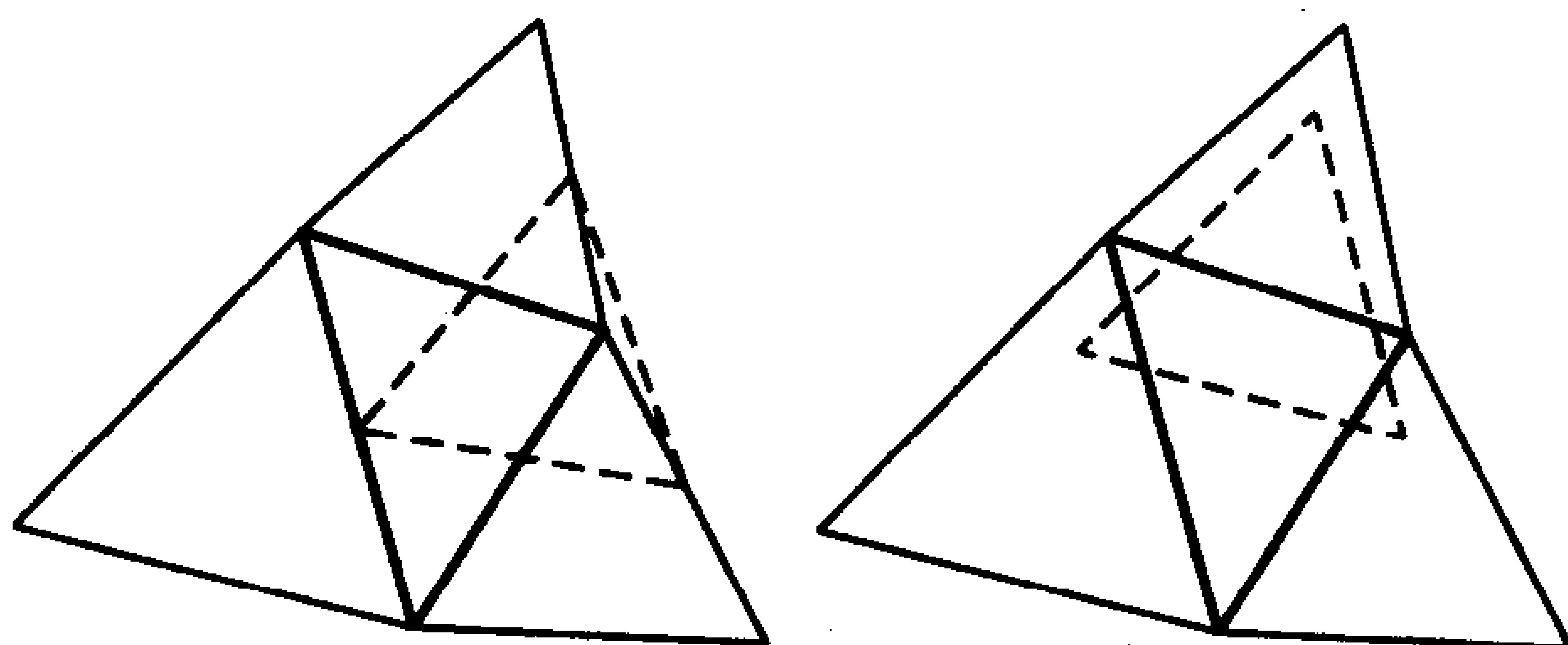
该定理的可以用具有六重对称的镶嵌图的方法证明.



外面的三角形不必是等边三角形，只要它们相似，并与原三角形相连，而不改变方向，最多稍有旋转，如下图. 于是一般性的定理是说，每一个三角形各取一个对应的顶点就形成具有同样形状的另一个三角形.



如果回到原三角形，可以得到有更多的等边三角形：



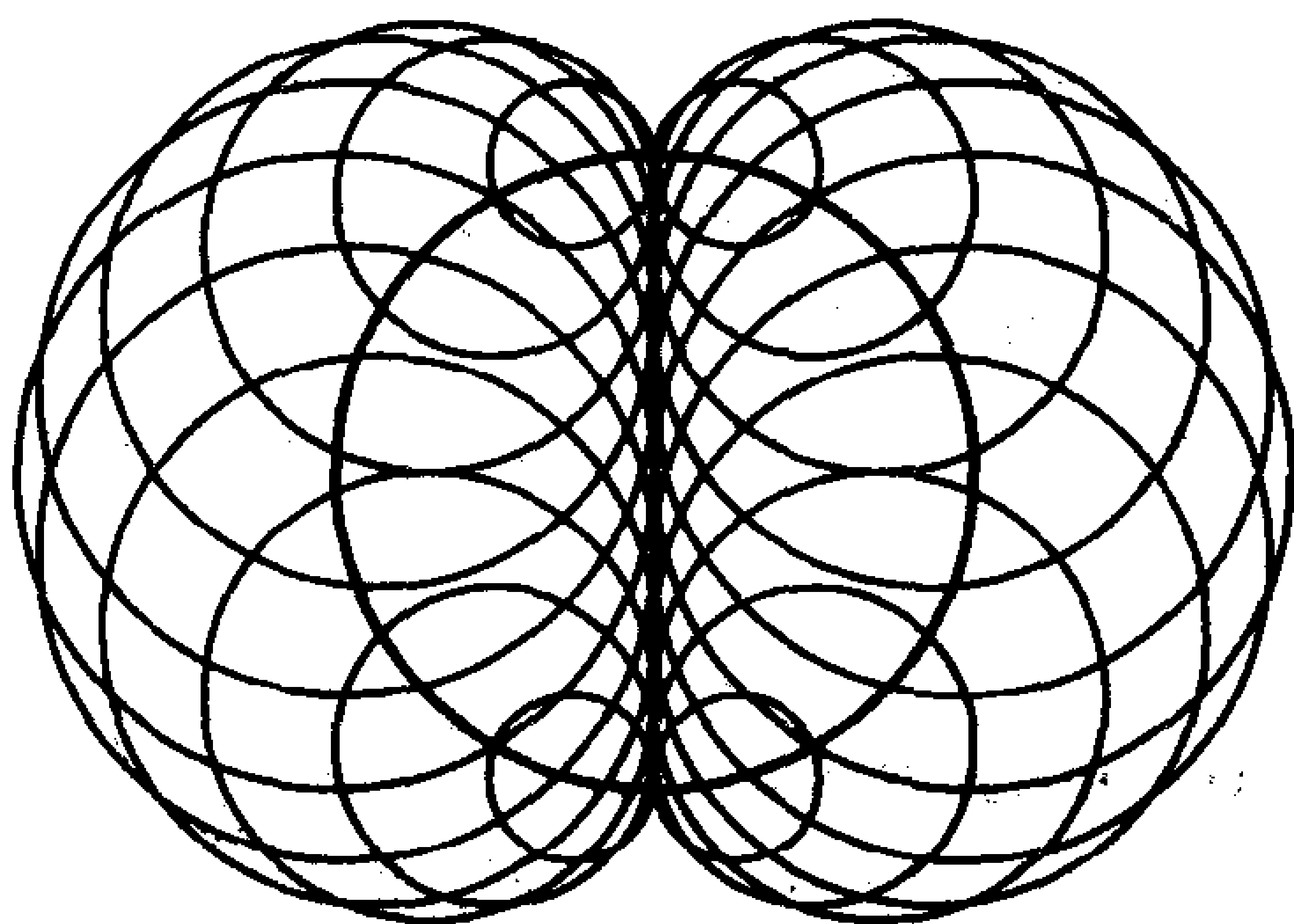
在一个三角形的边上所作的等边三角形与费尔马点有关.

如果在一般的四边形的边上作等边三角形，或者向内作，或

者向外作，那么它们的顶点形成一个平行四边形.

nephriod 肾脏线

这样命名的原因是因为它的形状很像肾脏. 它是半径为 a 的圆在绕半径为 $2a$ 的定圆的外部滚动时，圆周上一点的运动轨迹. 换句话说，它是半径为 $3a$ 的圆绕半径为 $2a$ 的定圆的外部滚动时，周上一点的运动轨迹的内部，因此定圆在大圆的内部.



为了把它画成包络的样子. 先画一个基本圆，再作一条直径. 以这个基本圆上的点为圆心，画一些圆使它们与所作的直径相切，这些圆包就络成一条肾脏线.

肾脏线也是一个圆在另一个与它相等的定圆外滚动时，前者的直径的包络.

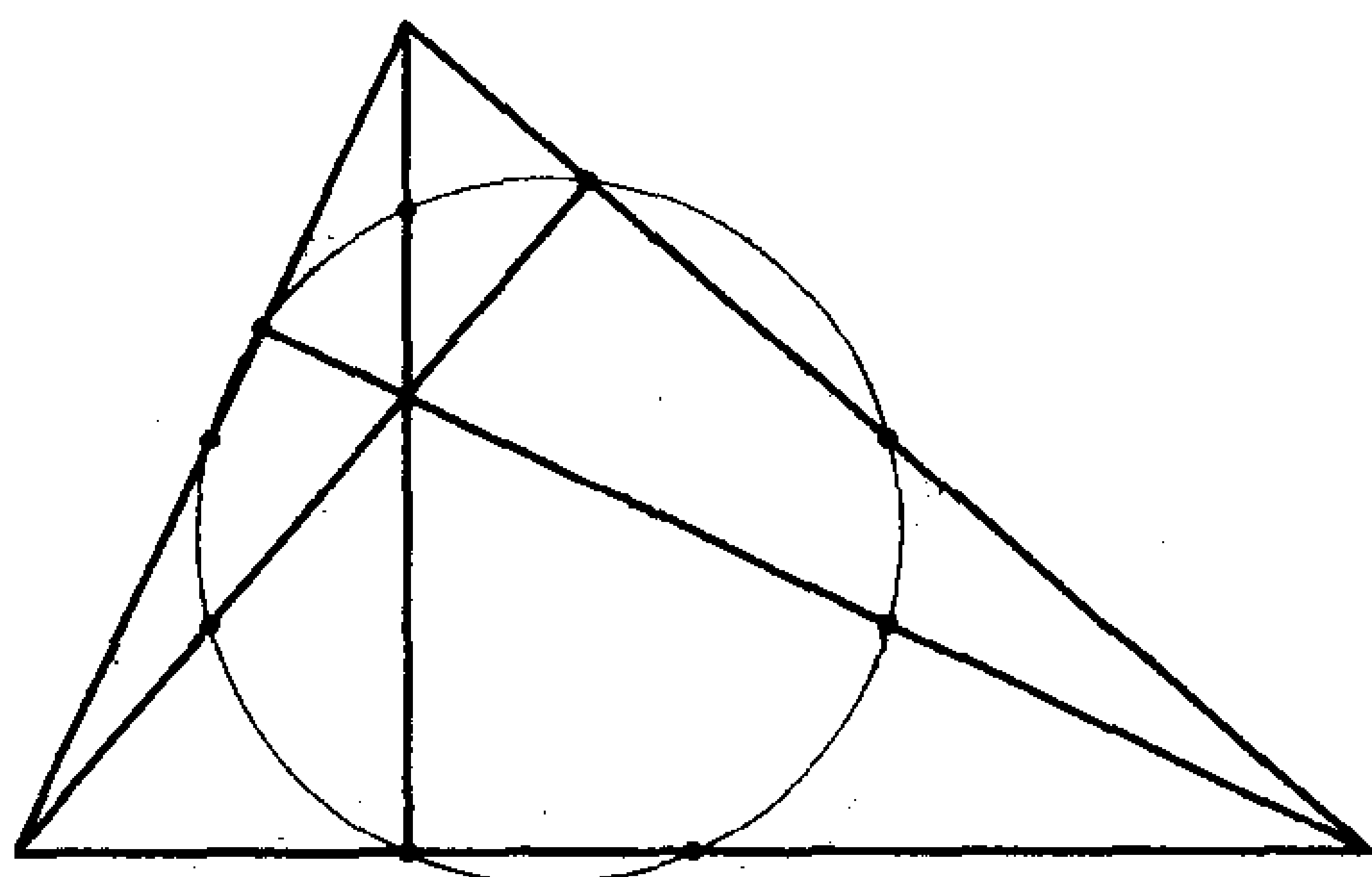
肾脏线的渐屈线是具有同一中心，但缩小一半且旋转 180° 的另一条肾脏线.

nine-point circle 九点圆

任意三角形中，各边的中点，高的垂足，连接顶点和垂心的线段的中点在同一个圆上.

布列安匈(Brianchon)和彭色列(Poncelet)在 1821 年发表了这一定理，虽然一个不出名的英国人本吉明·贝凡(Benjam-

ing Bevan)在 1804 年提出了一个实际上等价的一个问题.

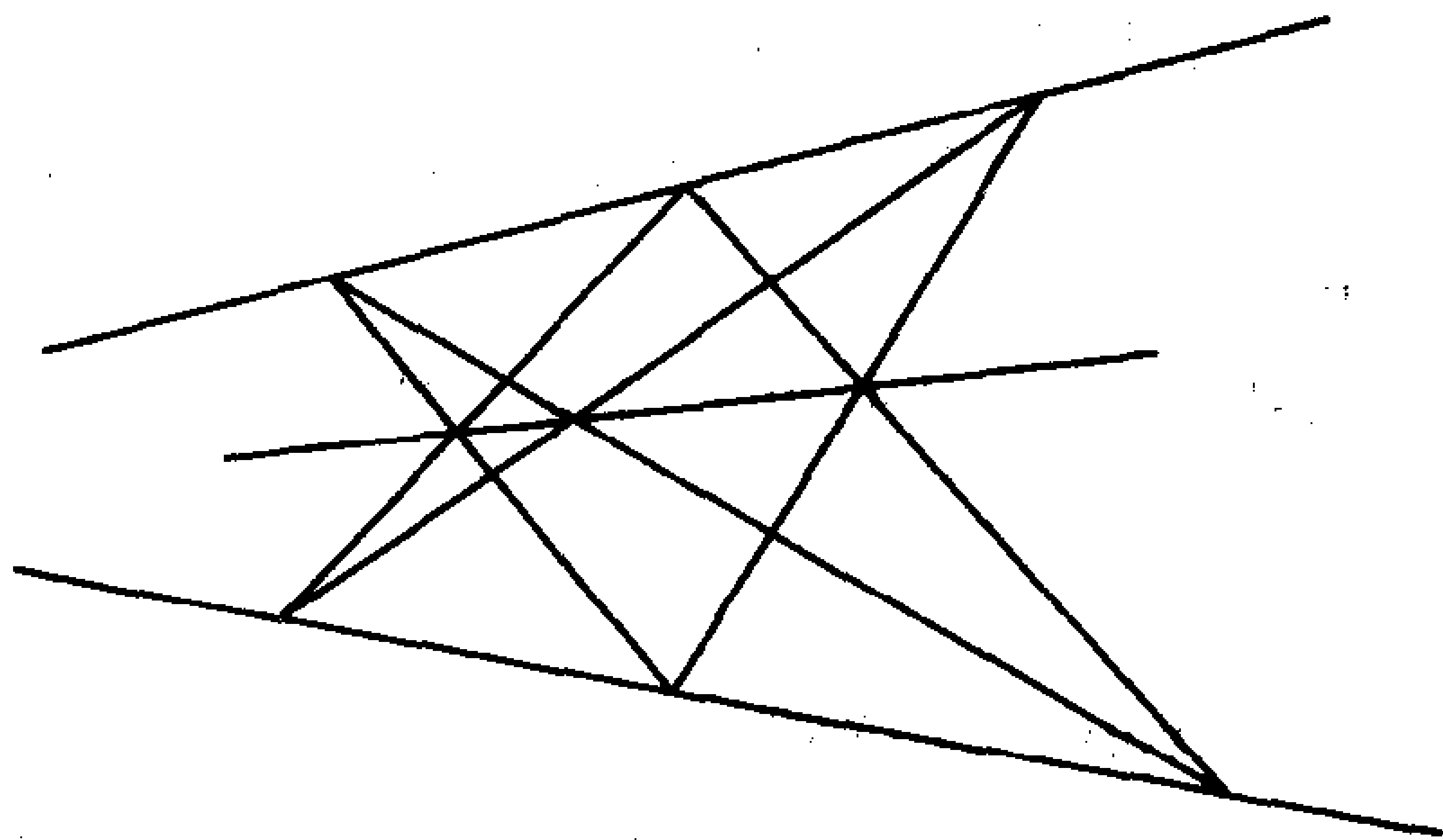


九点圆的大小是该三角形的外接圆的一半,它的圆心恰在连接外心和垂心的线段的中点.

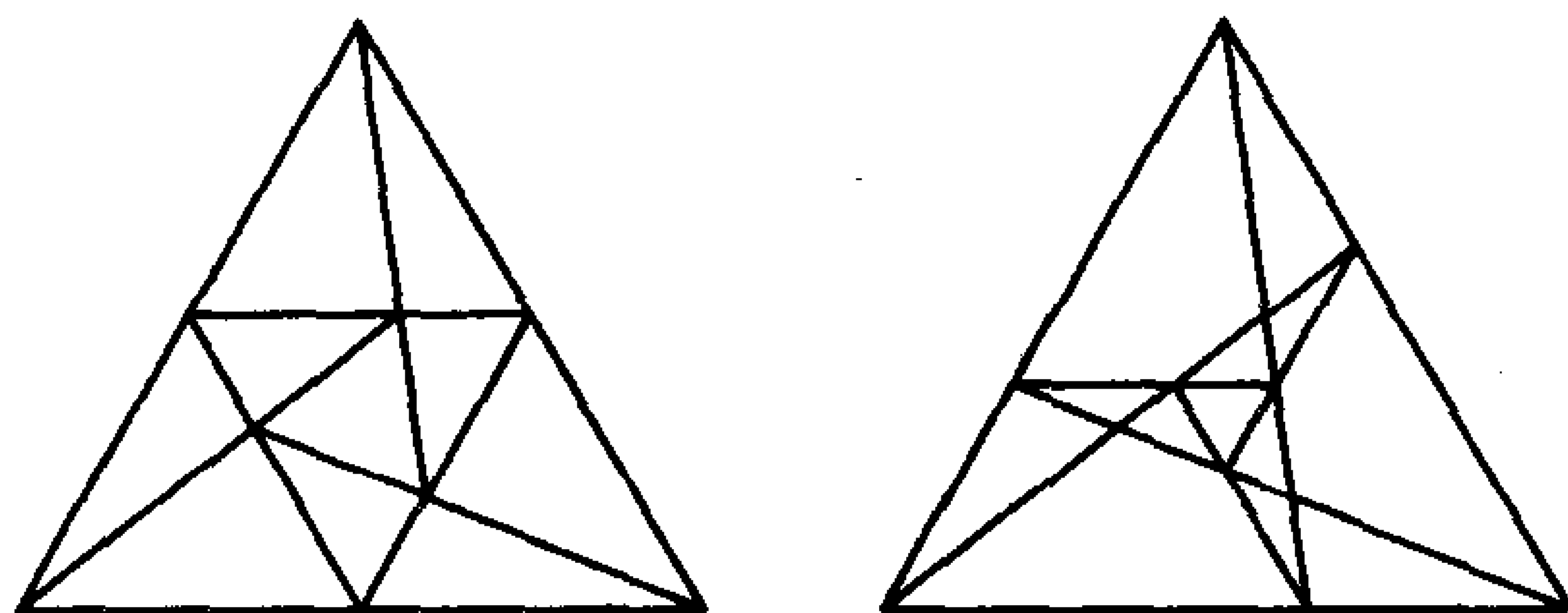
九点圆实际上包含了比九点更多的内容,详见费尔巴赫(Feuerbach)定理.

nine-three configurations　九-三构形

有三种本质上不同的九-三构形.也就是说,有三种方法把九条直线和九个点这样放置,使每一个点都有三条直线经过,每一条直线上有三个点.

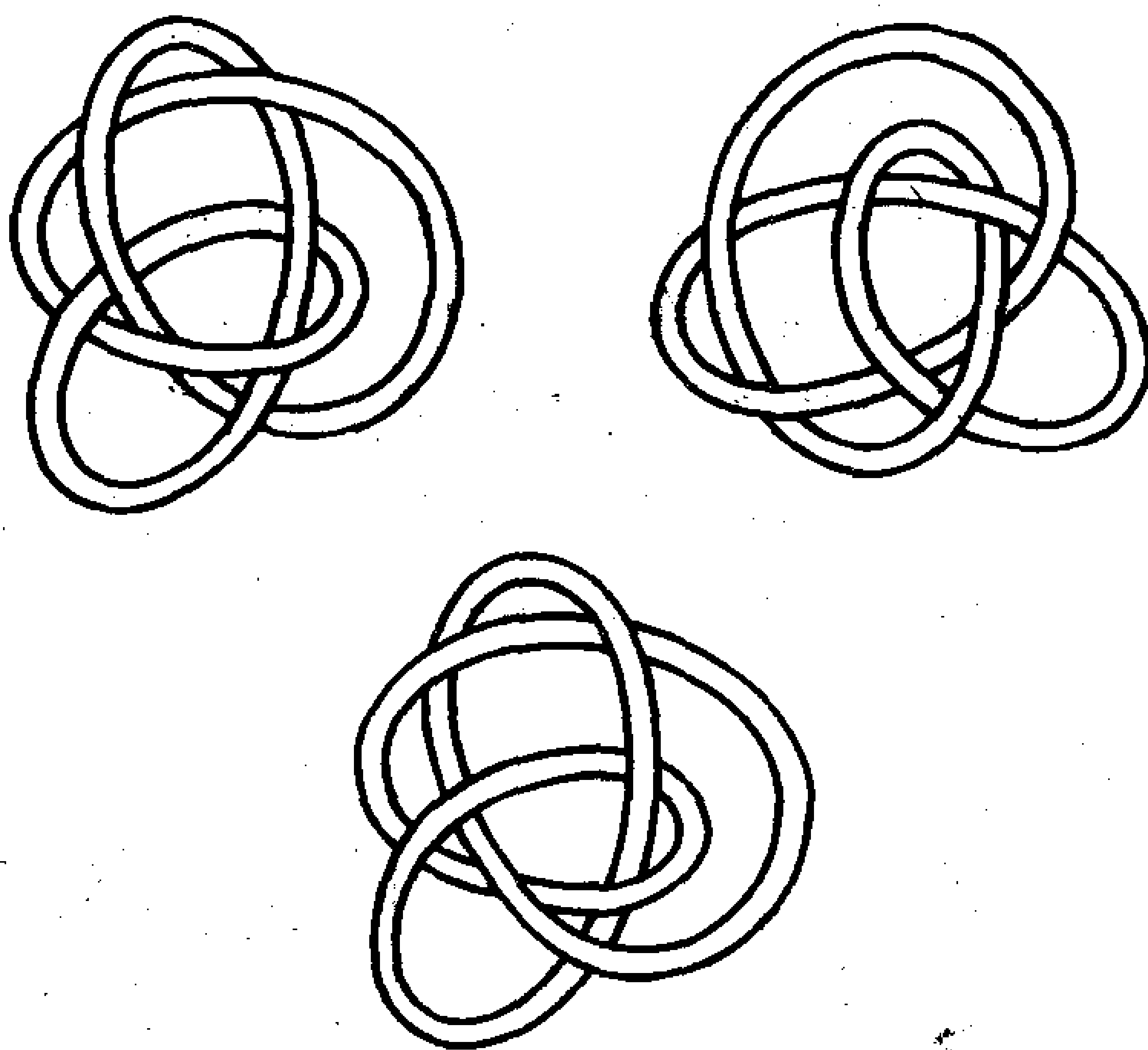


第二种构形可以看作为一个三角形内接于另一个三角形,而这个三角形又内接于第三个三角形,第三个三角形又内接于第一个三角形.第一种构形也就是帕普斯定理的图.



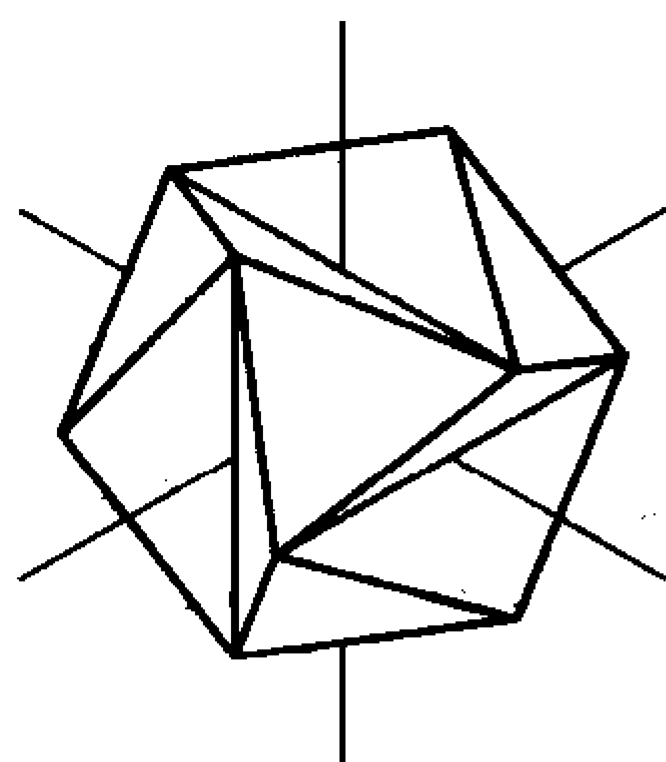
non-alternating knots　非交替结

少于 8 次交叉的初始结必是交替结. 也就是说,当绳子时穿过本身时,所画出绳子的路径是交替穿上穿下的.(按照交叉的次数进行分类时,将绳子弯一个小孔,然后穿进去所得到的平凡交叉,不算是结.)以下三种八次交叉结是最小的非交替结.



non-rigid polyhedra　非刚性多面体

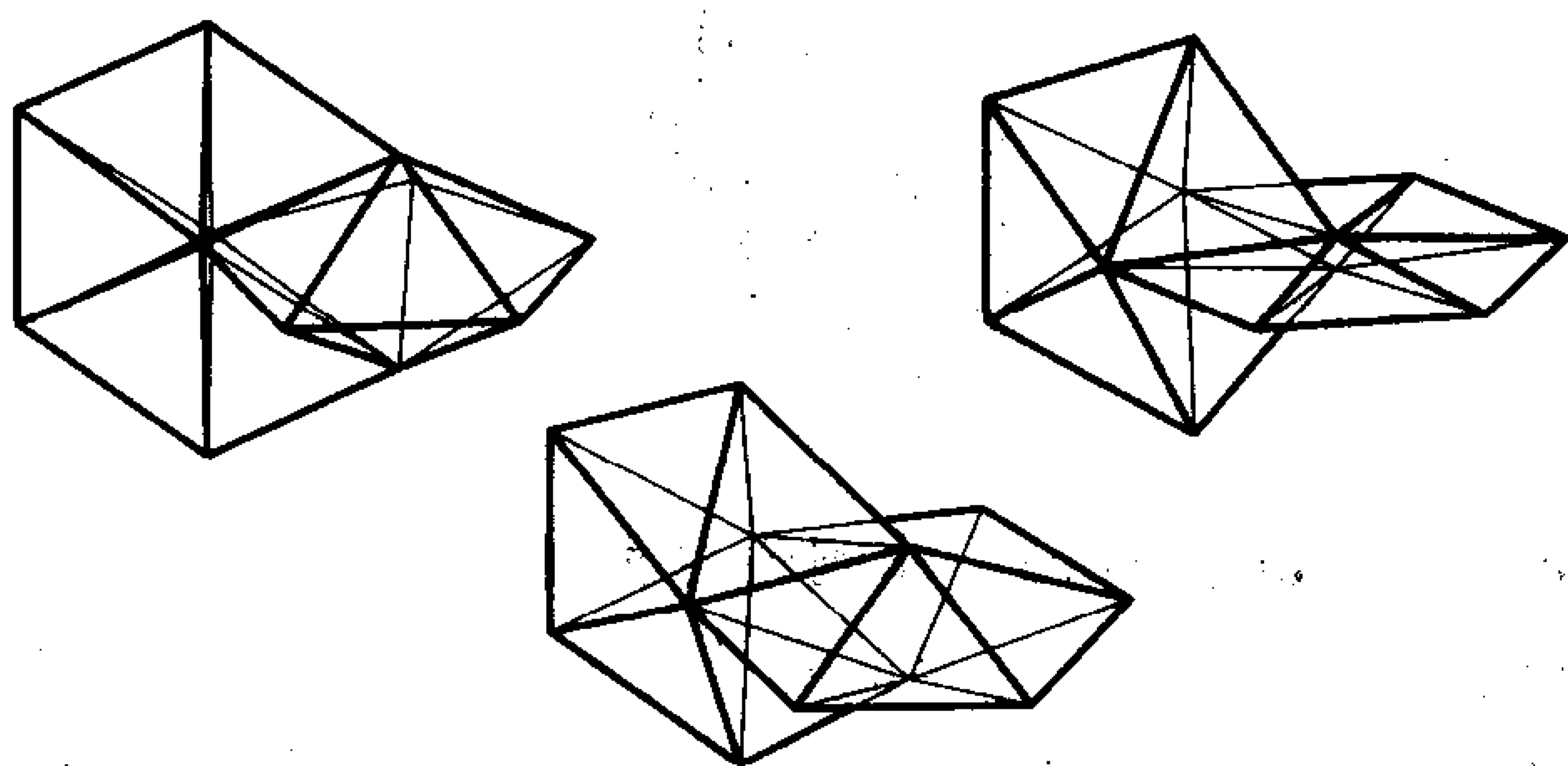
柯西(Cauchy)在 1813 年证明了由各刚性的面连接各棱所成的凸多面体是刚性的. 但如果它不是凸的,那么就有多种可能性:它可以是刚性的,也可以是"晃动"的(在无穷小的范围内移动),它有两种或更多种稳定的形式,或者就是像联合器那样可连续移动.



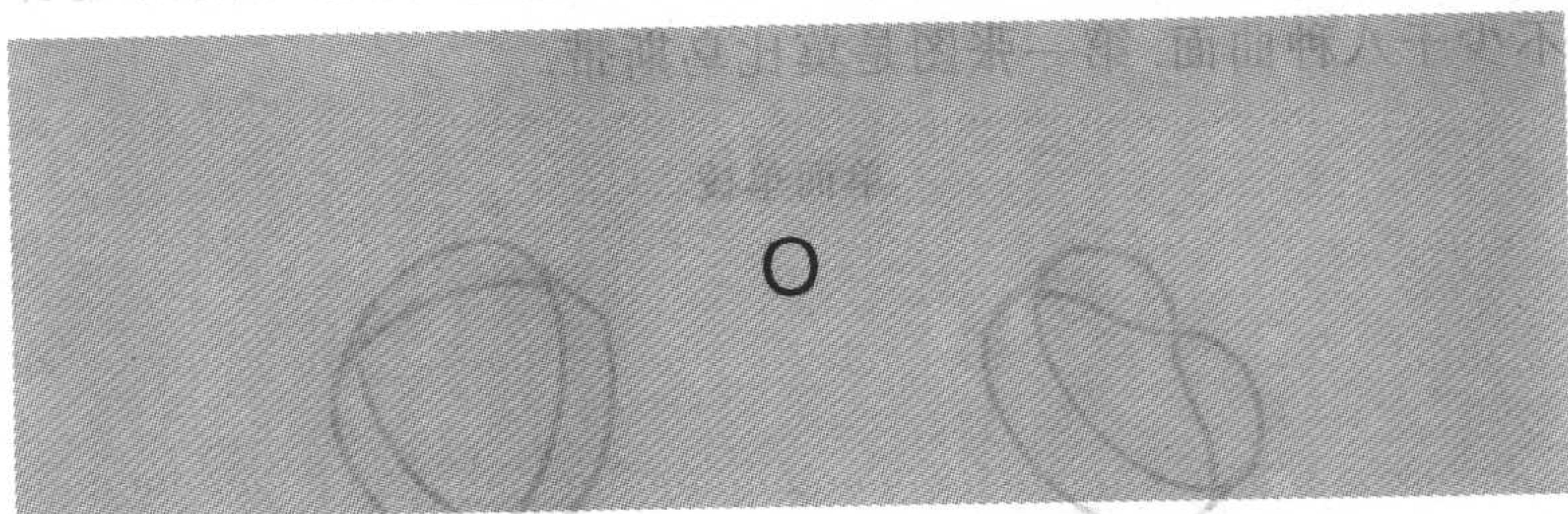
考虑一个正二十面体一对相邻的面.这两个面的棱形成一个空间四边形,这些空间四边形的棱也是具有公共棱的另一对三角形的棱.

取一个正二十面体,用一对等边三角形取代具有公共棱(其方向与正方体的面匹配)的六对面中的每一对面.结果形成了杰森(Jessen)正交二十面体.它是晃动的:它沿着长的棱在无穷小的范围内变形,但不影响面.

取十个等边三角形,将面和面连起来组成两个五棱锥,但留一些空隙,最后的两对面不连.取这样的两个不完整的五棱锥,把它们连成直角,将其中的一个挤压时,高就缩小,空隙就扩大,另一个就压扁.计算表明,这个多面体有三个稳定的位置,这是由 M·哥尔特伯格(Michael Goldberg)首先构筑出来的.

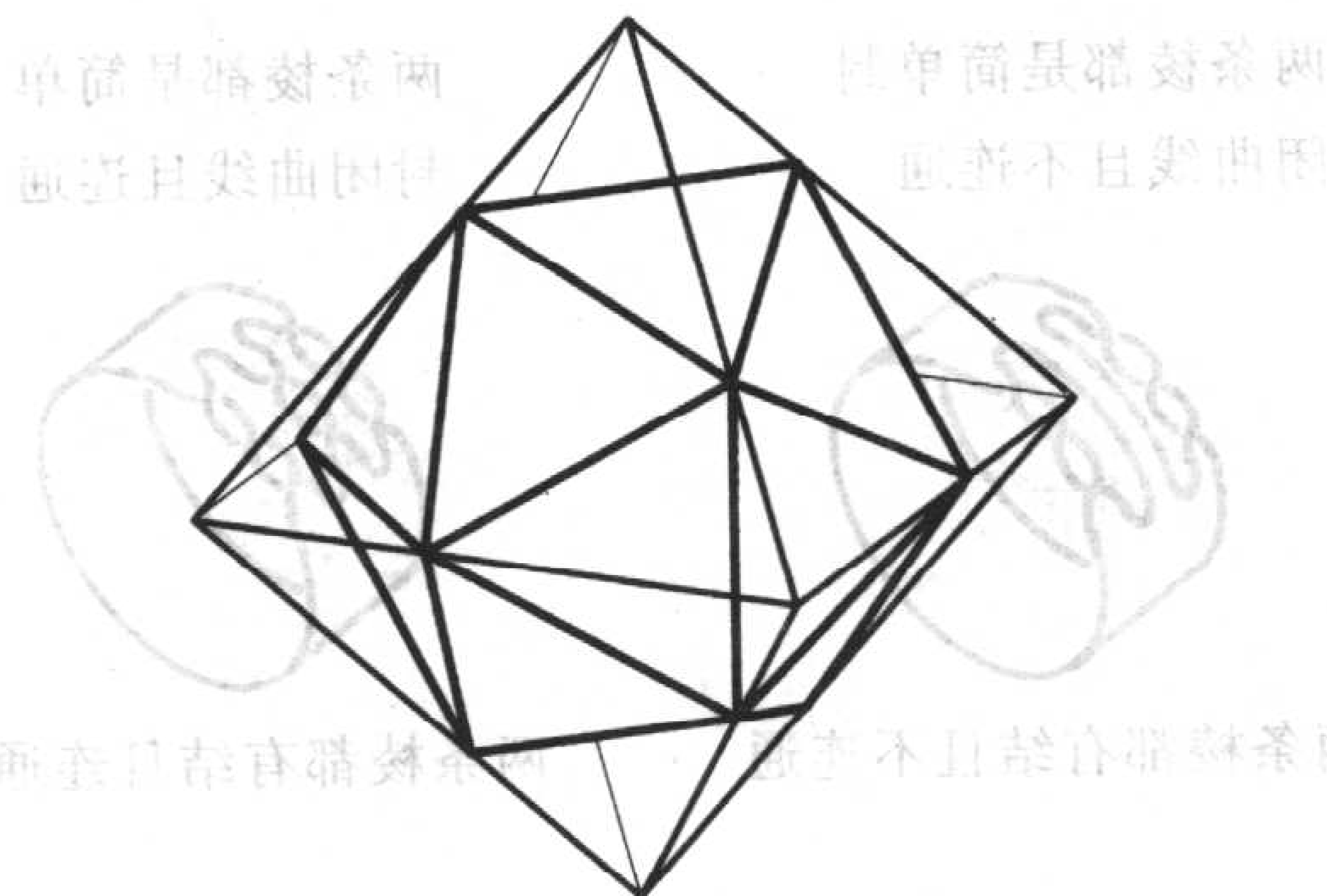


参考书:MICHAEL GOLDBERG,'Unstable polyhedral structures',*Mathematics Magazine*,May 1978.



octahedron　正八面体

如果将一个正八面体的棱黄金分割$\left(\text{即分成比 }1:\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\right)$,这样正八面体的任何一个面上的分点都形成一个等边三角形,于是这12个分点是一个正二十面体的顶点.



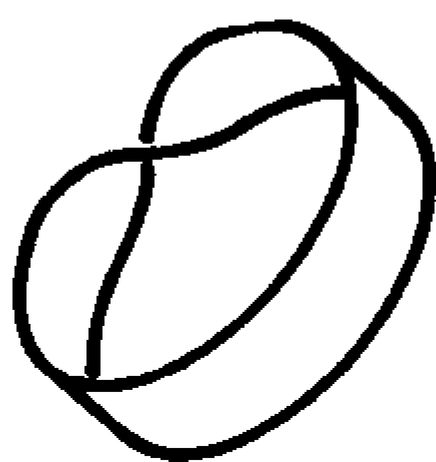
有两种方法将棱内分成黄金比,还有另两种方法将棱外分成中外比,总共产生四个正八面体.

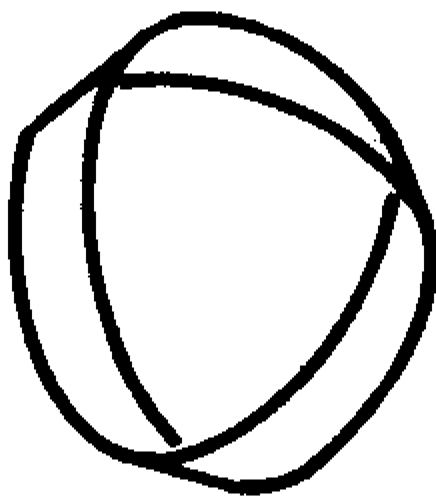
one-sided surfaces　单侧曲面

单侧曲面可以只有一条棱,这条棱可以有结,也可以没有结.如果它有两条棱,那么情况就更多了:每一条棱可以有结,也

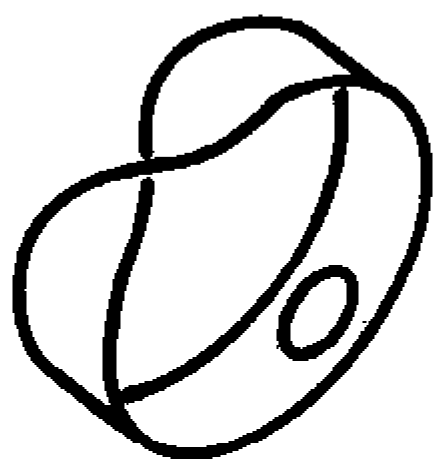
可以没有结，这些棱可以连通，也可以不连通，这些可能的组合不少于八种曲面. 第一张图是莫比乌斯带.

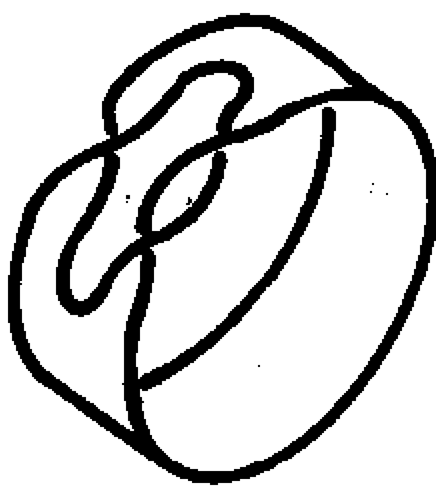
单面单棱

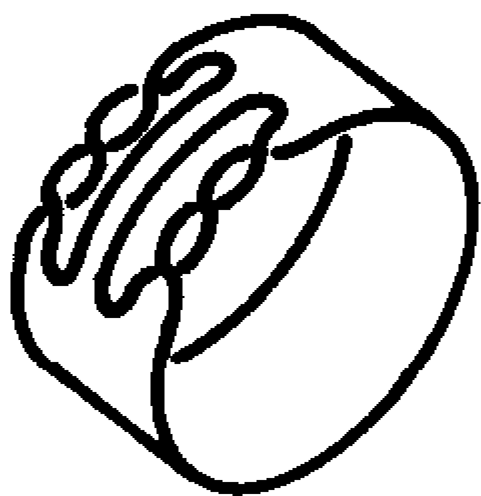

棱是简单封闭曲线

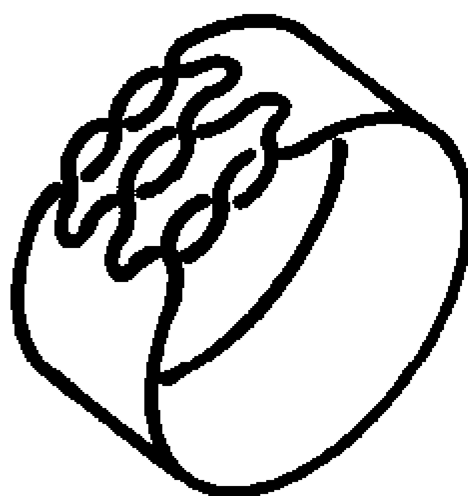

棱有结

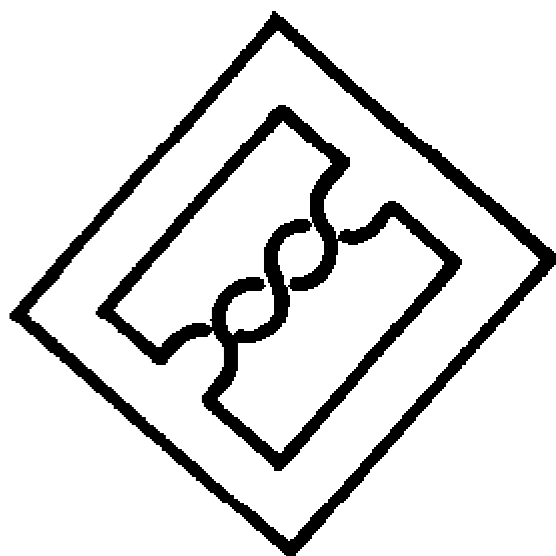
单面双棱

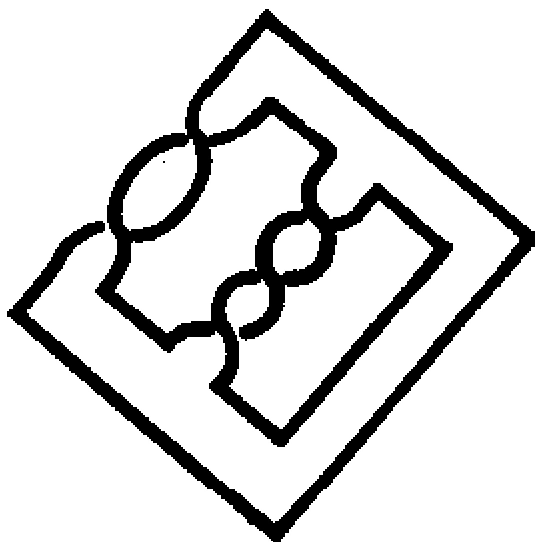

两条棱都是简单封闭曲线且不连通


两条棱都是简单封闭曲线且连通


两条棱都有结且不连通

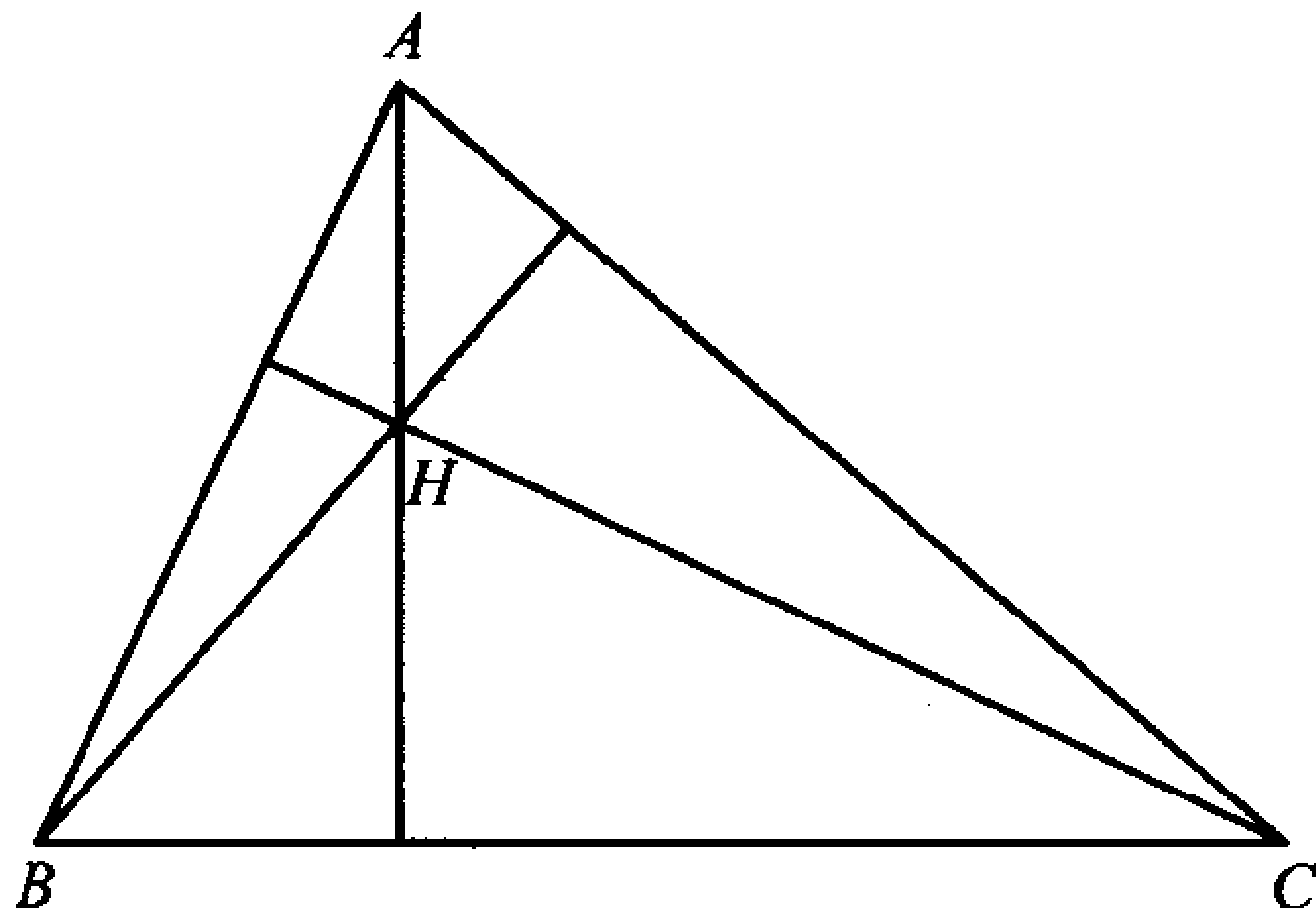

两条棱都有结且连通


一条棱是简单封闭曲线
一条棱有结且不连通


一条棱是简单封闭曲线
一条棱有结且连通

orthocentric points　垂心

普洛克拉斯(Proclus)第一个记录了三角形的三条高共点，这一点就是三角形的垂心，常用 H 表示.原三角形的三个顶点和垂心有很美妙的对称性，卡诺(Carnot)首先注意到：任何一点都是由其他三点组成的三角形的垂心，它们形成垂心组.



由四个垂心组成的四个三角形具有同一个九点圆，它与16个内切圆和旁切圆都相切. H 关于 BC 的对称点在三角形 ABC 的外接圆上，等等，这四个三角形也有同样大小的外接圆.

这四个三角形的外心组成一个与原来四点全等的图形，这四点与原来四点关于九点圆的圆心的对称. 这四个三角形的重心组成一个垂心组，它与原来的垂心组相似，但大小只有三分之一.

潘恩(Dwight Paine)以诗歌的形式提出了三角形的这一著名的性质.下面是关于高的几行，它也许能激起读者去阅读其他部分：

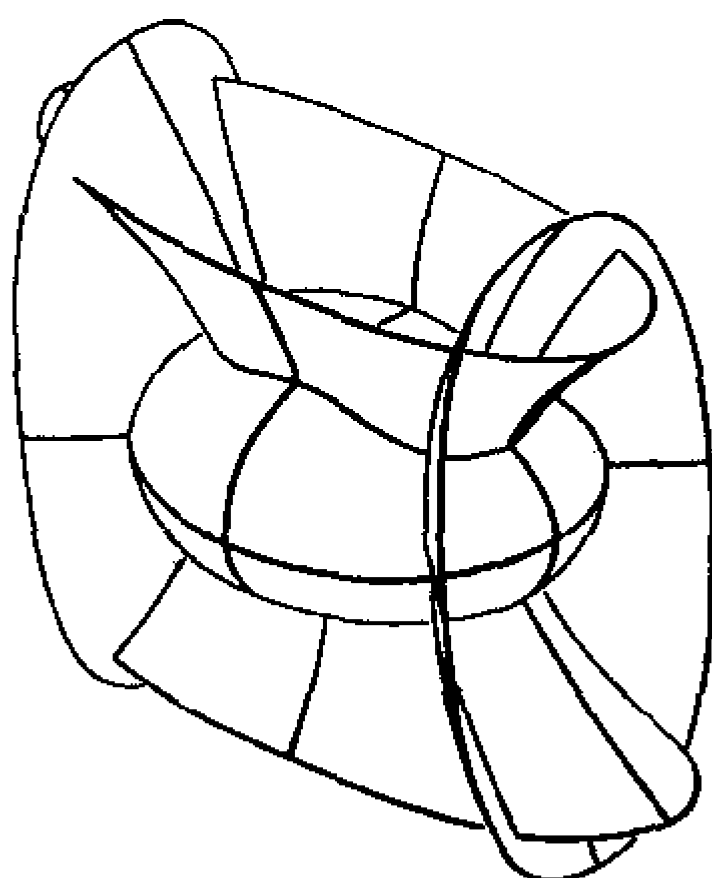
> 这是女儿拉茜尔的话，
> 虽说高有三条，
> 有一点在三条高上：
> 是垂心 H 吧.

参考书：Dwight Paine，'Triangle rhyme'，*Mathmatical Magazine*，September，1983.

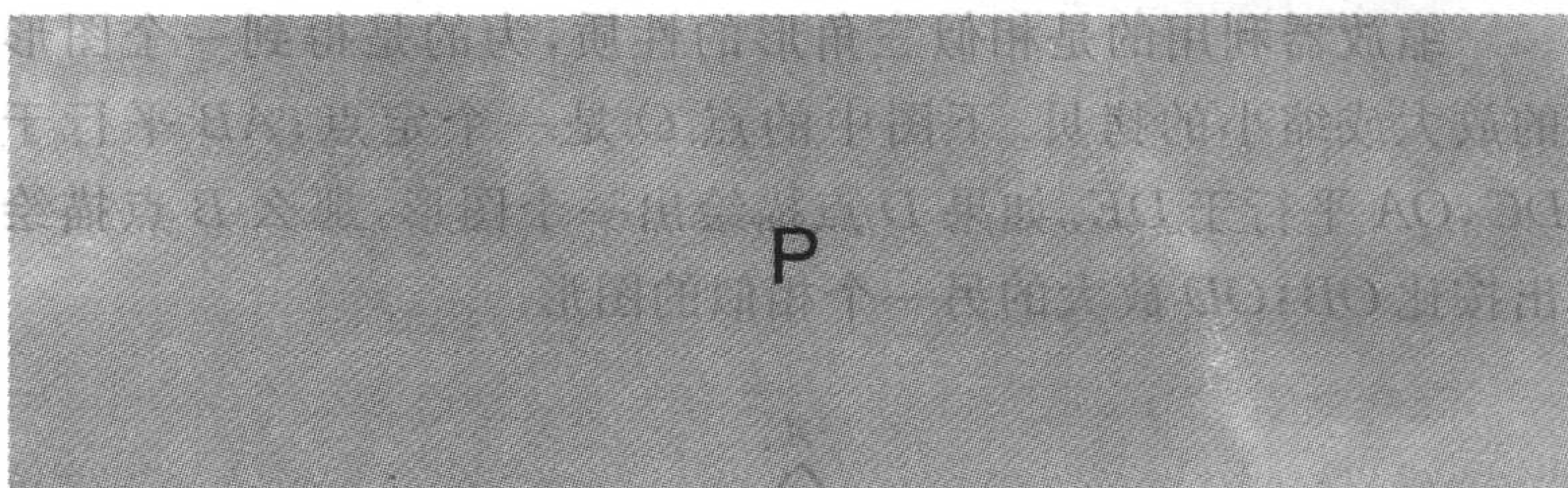
orthogonal surfaces　正交曲面

在二维情况下，两族曲线具有这样的性质：一族中的每一条曲线可以与另一族中的每一条曲线正交. 在三维情况下，三组曲面可以有类似的性质. 不属于同一族的任何一对曲面与另一族的每一个曲面正交于一条曲线.

三族正交曲面的最简单的例子是与正方体的各面平行的三族平面.



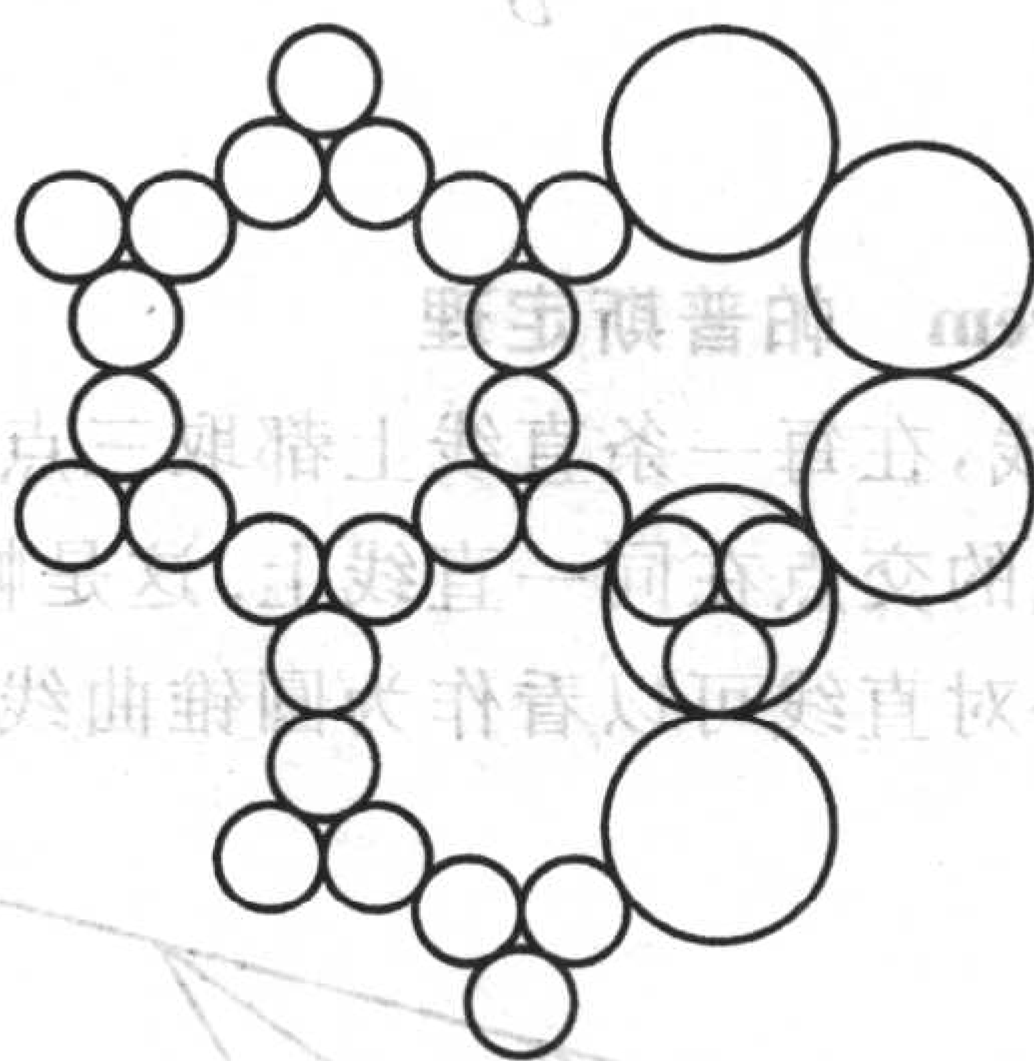
上图是一个三维情况下的较为复杂的例子，它类似于二维中的共焦圆锥曲线族. 它表示椭圆族，单叶双曲面族，双叶双曲面族的每一族的一个曲面. 空间的每一点都有每一个曲面族中的一个曲面经过. 因此空间被分成边界为曲线的盒子，它的各个顶角都是直角，就像普通的长方体，但它的面都不是平的，更谈不上是长方形了.



P

packing circles rigidly　刚性垫圆

把同样的圆拼成一个带有空隙的无穷六角形的镶嵌图，并把每第三个圆移去. 然后用三个两两外切，且与相邻的圆相切的小圆代替每一个留下的圆. 下图表示某些原来的圆，并用三个一组的小圆代替后的结果.

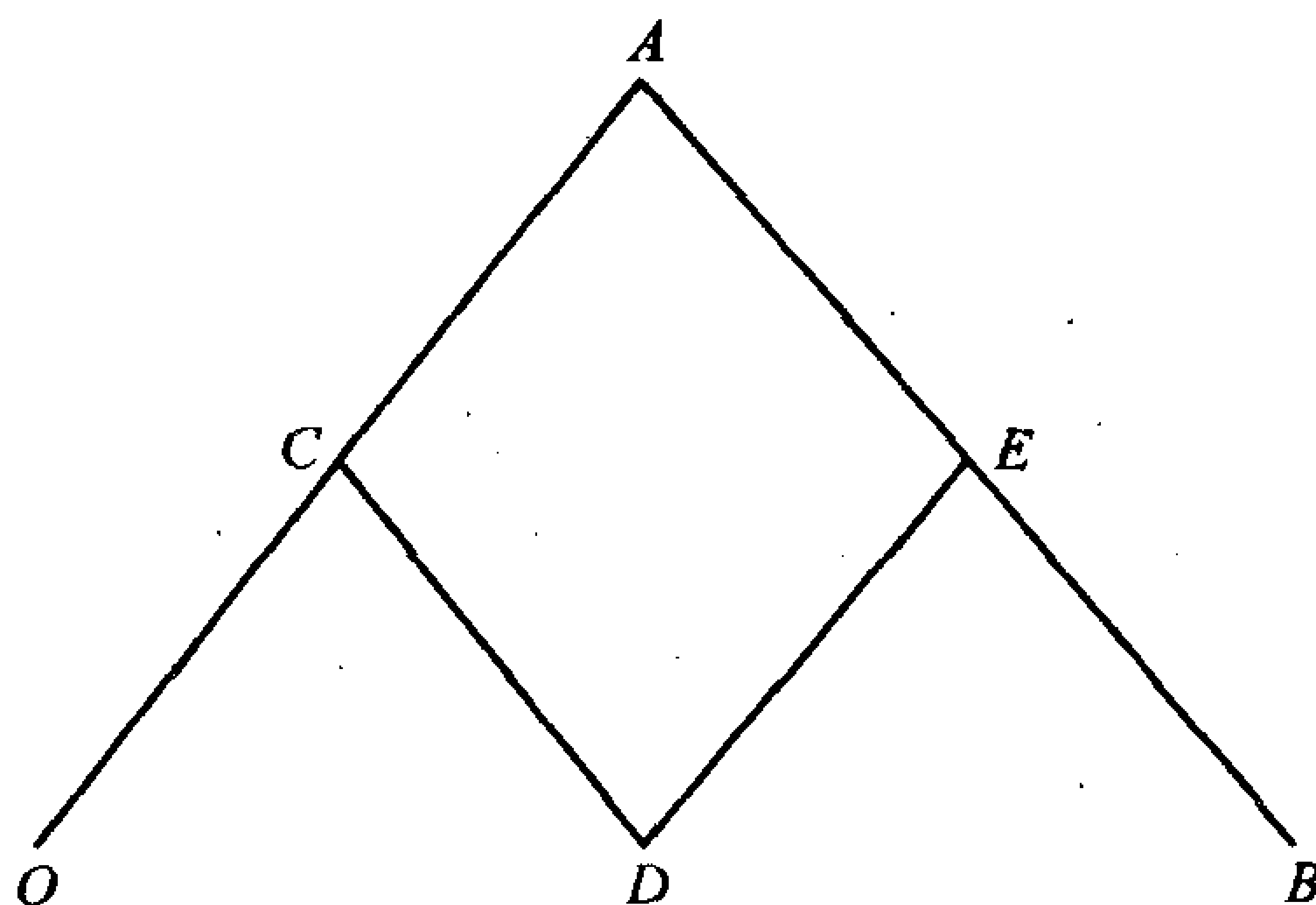


这些圆所形成的图形是刚性的，在这一意义下，每一个圆都被相邻的三个圆稳定地撑住. 由小圆构成的这一复杂的图形只覆盖了整个平面的$(7\sqrt{3}-12)\pi$，约 0.393. 对这样的刚性垫圆来说，也许已是可能的最低密度.

参考书：H. MESCHKOVSKI, *Unsolved and Unsolvable Problems in Geometry*, Oliver & Boyd, London, 1966.

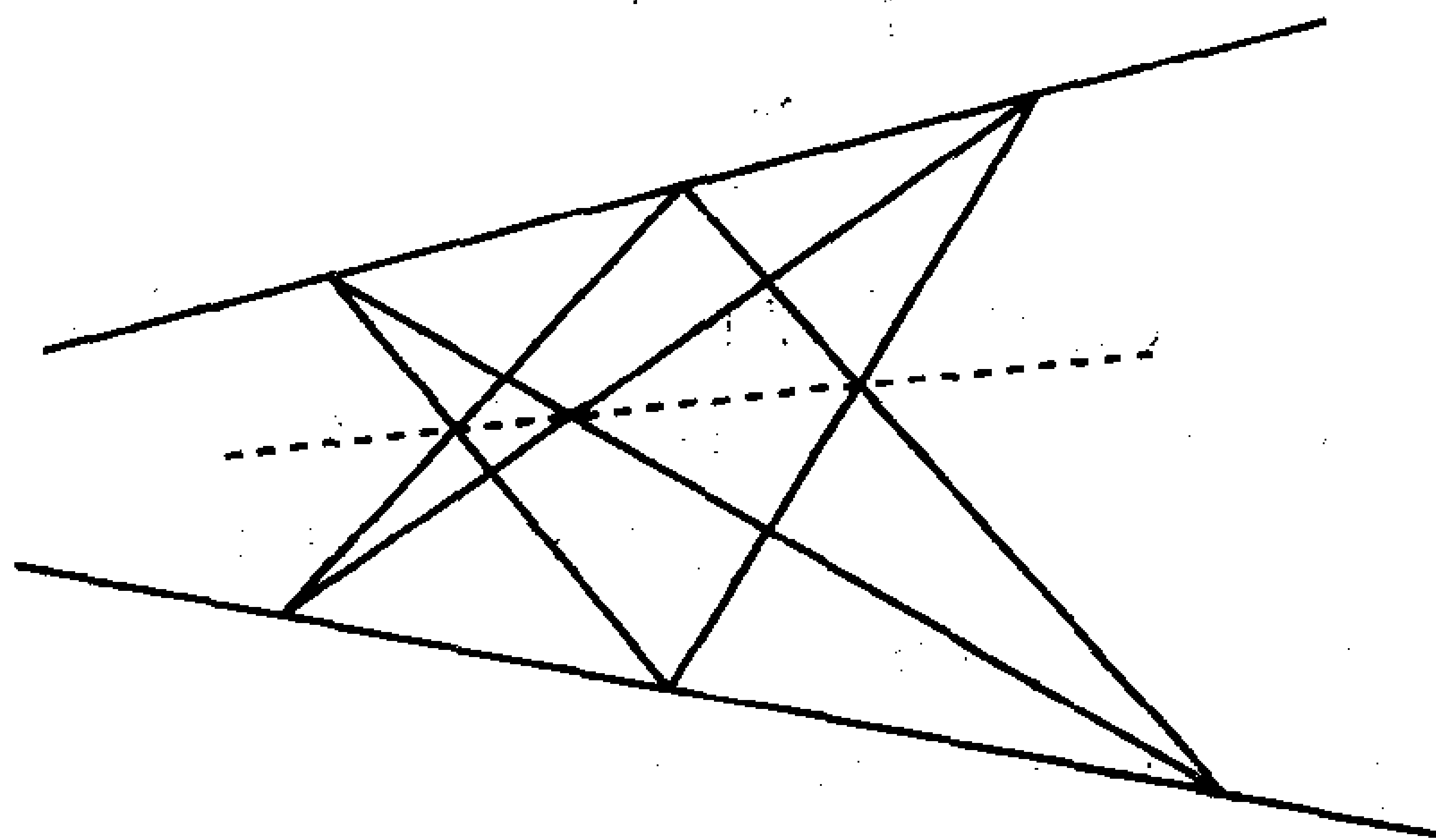
pantograph　缩放器

缩放器利用的是相似三角形的性质，为的是得到一个图形的放大或缩小的拷贝. 下图中的点 O 是一个定点；AB 平行于 DC，OA 平行于 DE. 如果 D 点描绘出一个图形，那么 B 点描绘出按比 $OB:OD$ 放大的另一个相似的图形.



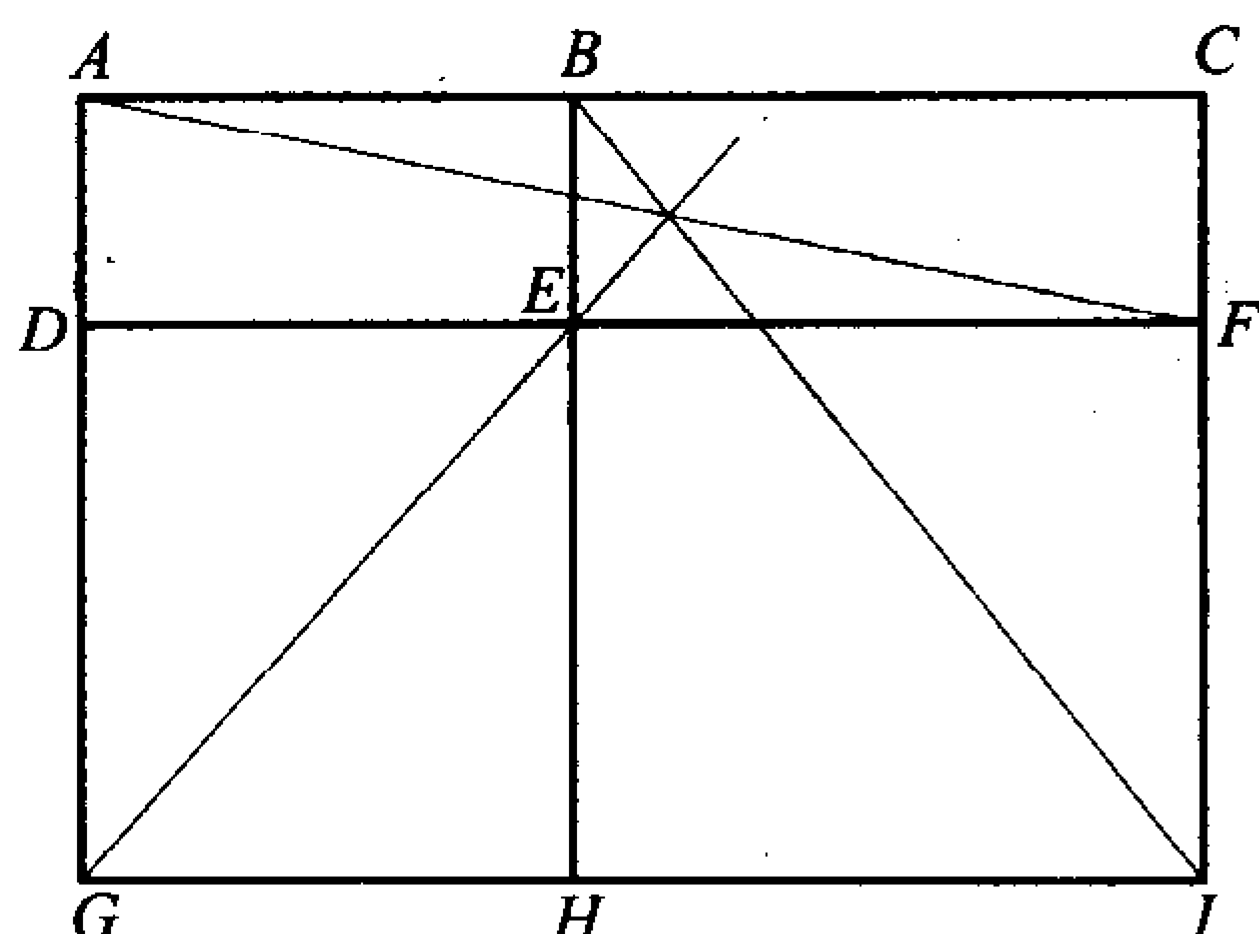
Papus' theorem　帕普斯定理

任取两条直线，在每一条直线上都取三点，按下图交叉连接各点. 这些交叉线的交点在同一直线上. 这是帕斯卡定理的特殊情况，因为原来一对直线可以看作为圆锥曲线的特殊情况.



由于该定理只包含点、直线、交点和连线，所以它有一个

对偶的定理，在这个定理中，点可以换成直线，直线可以换成点．下图是这个对偶定理的一种特殊情况，该定理说，有两族直线，每一族直线由三条平行线组成；每族三条平行线各相交于一个无穷远点，这三条直线经过每一族直线中的两条直线上的各一点．如下图所示，连接这些点得到的三条直线共点．

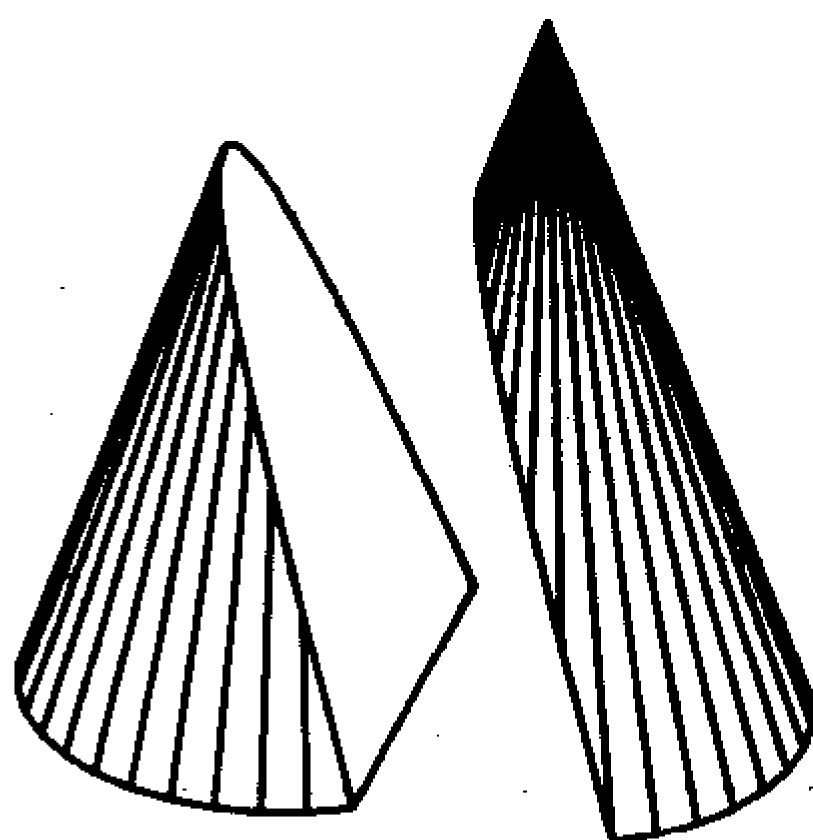


该图中一个矩形被分成四个小矩形．三条细线相交于一点．直线 DB,GC 和 HF 也相交于一点,它表示这样一个事实:即原来的帕普斯图中每一条直线上的各点可看作是以各种不同的顺序排列的．

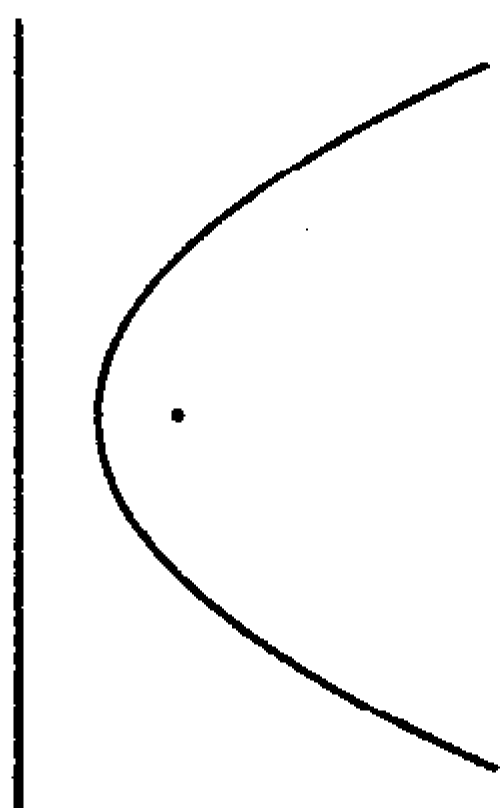
帕普斯定理等价于以下关于三维空间中的点和直线的定理．取三条不相交的空间直线 a，b 和 c．找出无穷多条与这三条直线都相交的其他直线是可能的．取三条这样的直线 p，q 和 r．于是这个等价的定理说，如果 d 是与 p，q 和 r 都相交的第四条直线，s 是与 a，b 和 c 都相交的第四条直线，那么 d 和 s 也相交．

parabola　抛物线

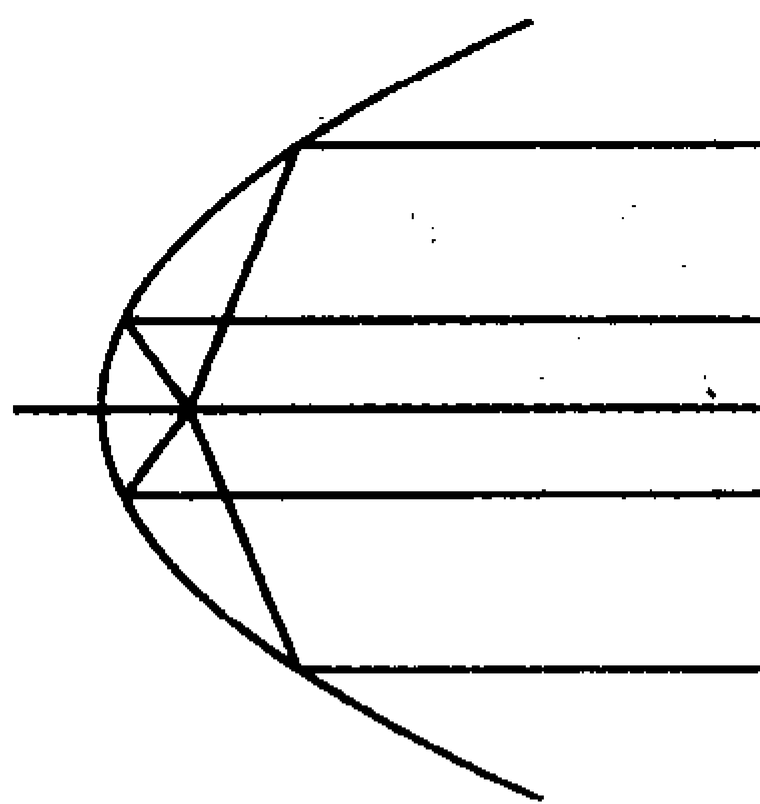
古希腊人认为抛物线是平行于经过直角圆锥的顶点的直线的平面截圆锥所得的截线．事实上，抛物线是平行于经过任何圆锥的顶点的直线的平面截圆锥所得的截线．



抛物线也是到定点的距离等于到定直线的距离的点的轨迹，该定点称为焦点，定直线称为准线.



经过焦点的光线经抛物形镜面反射后平行于对称轴.因此头灯使用近似于抛物形的镜面，光源位于焦点.

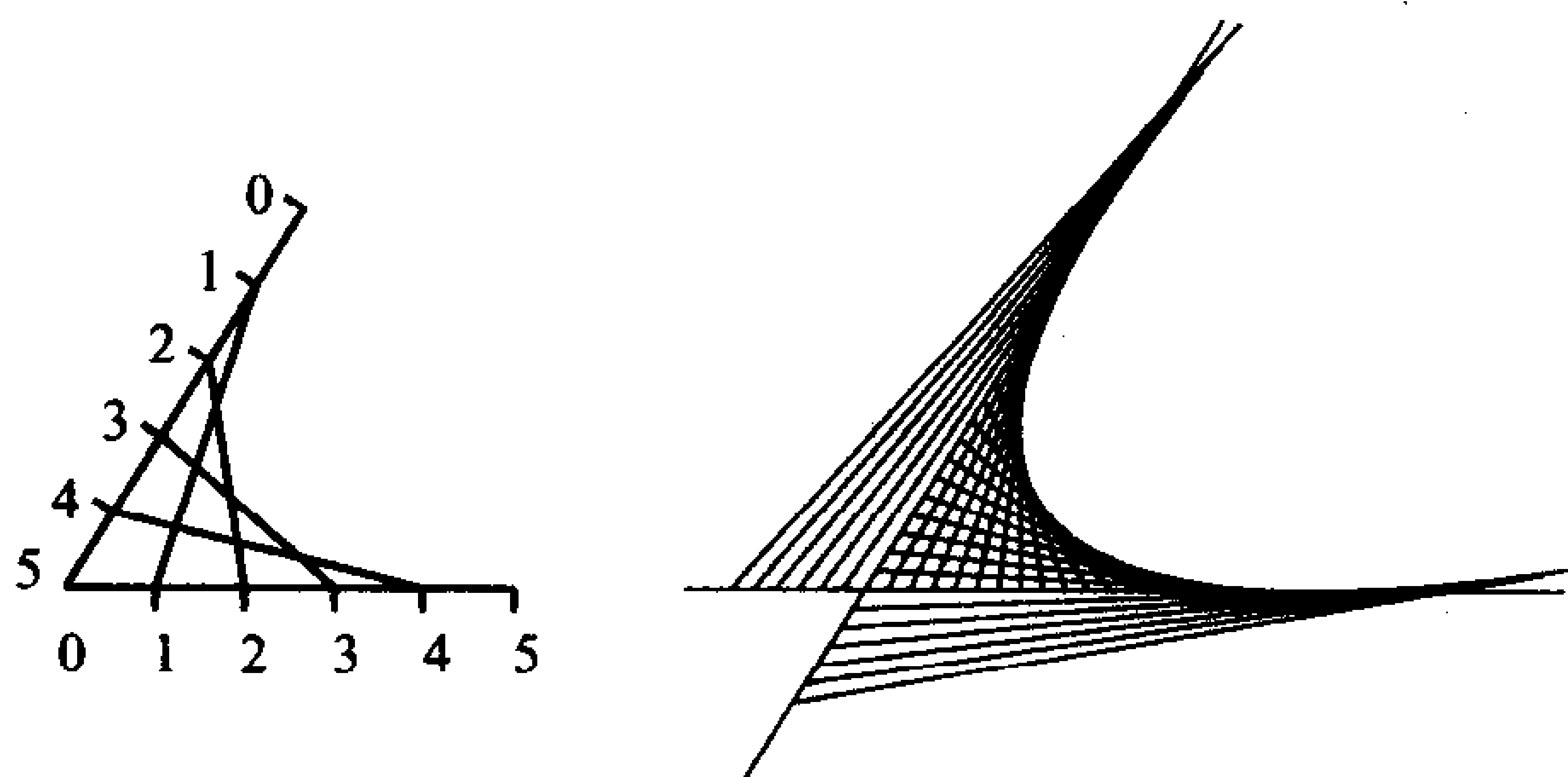


如果我们假定重力的作用是竖直方向的，但不指向地心，且不计空气阻力，那么我们可以认为弹道导弹的轨迹是一条抛物线.如果弹壳从某一点以同一个初始速度在各个方向上点火，那么各弹壳的轨迹的包络是另一抛物线，或者说，如果在三维空间

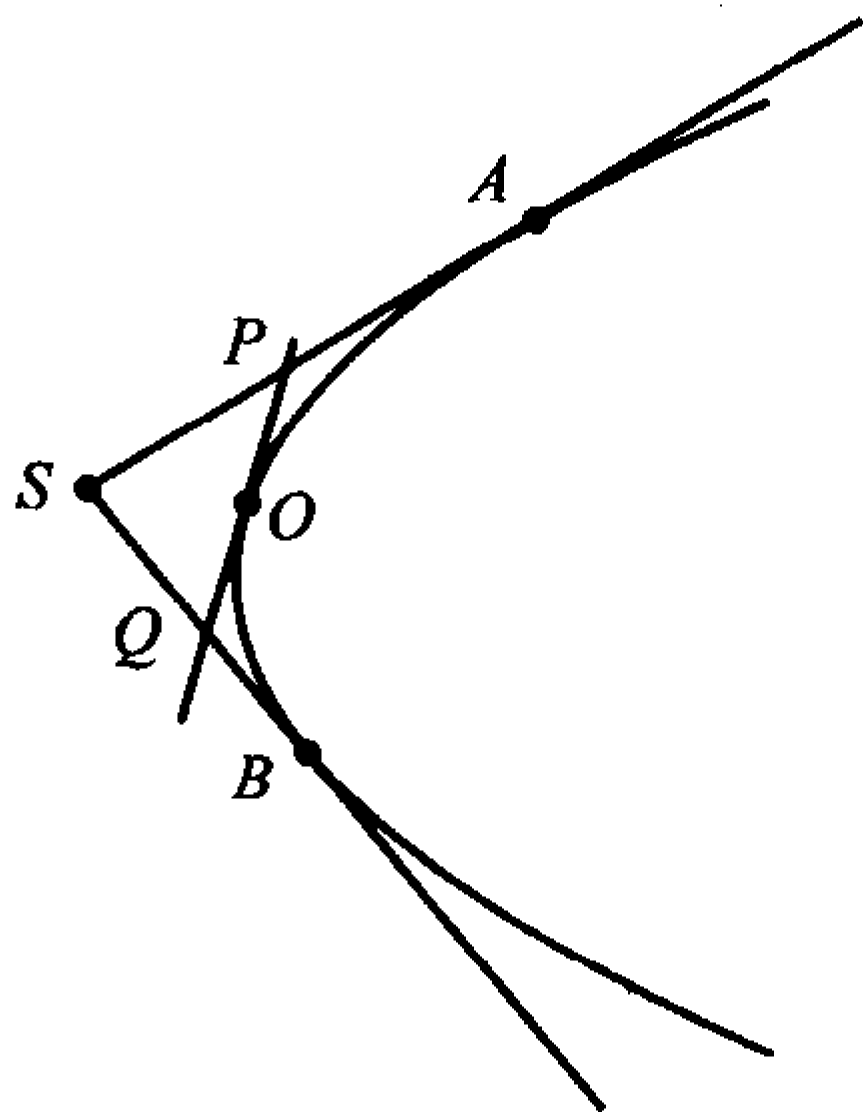
内，则是旋转抛物面.

在圆形碗内缓慢旋转的液体的表面是一个旋转抛物面. 这一曲面的任意一个竖直的截面都是抛物线. 如果钢缆的重量和支撑力不计，那么均匀的载重悬挂桥的主钢缆的形状也是抛物线.

抛物线可以作为包络作出. 例如，画两条直线，从它们的交点起，标出等长的线段，并以相反方向编号，如图所示. 连接编号相同的点将包络成一条抛物线. 为了画得更像抛物线，从原来的两条直线的交点出发标出更多的点，如右图所示.



这一作法之所以有效是抛物线的一个简单而美妙的性质所致. 如下图画三条切线. 于是$\frac{SP}{PA}=\frac{QO}{OP}=\frac{BQ}{QS}$.

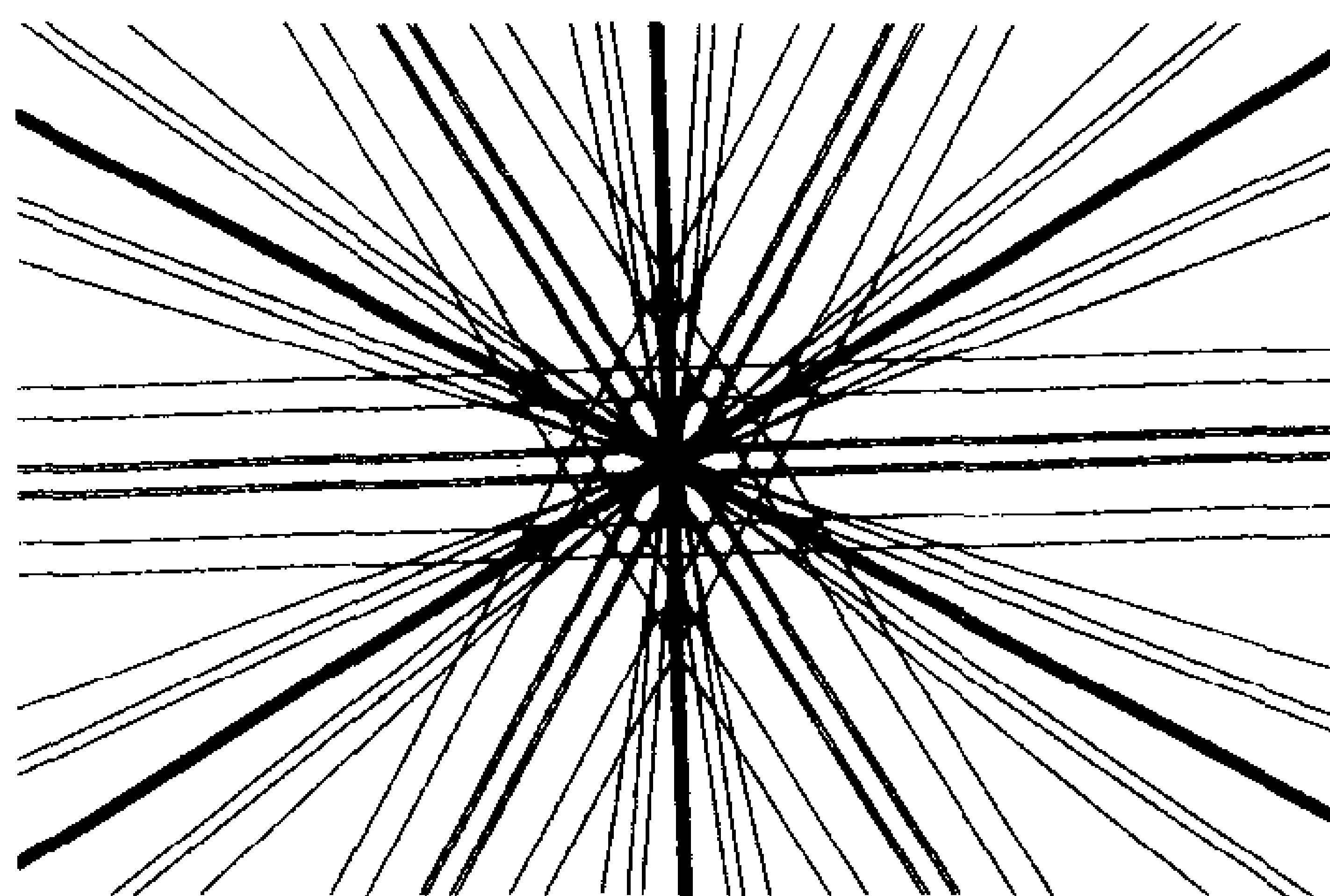


有一种类似的方法用来作过一点的抛物线的切线. 连接 P 点和焦点 F, 以 PF 为直径作圆. 如果过抛物线的顶点的切线与圆相交于 A, B 两点, 那么 PA 和 PB 是两条切线.

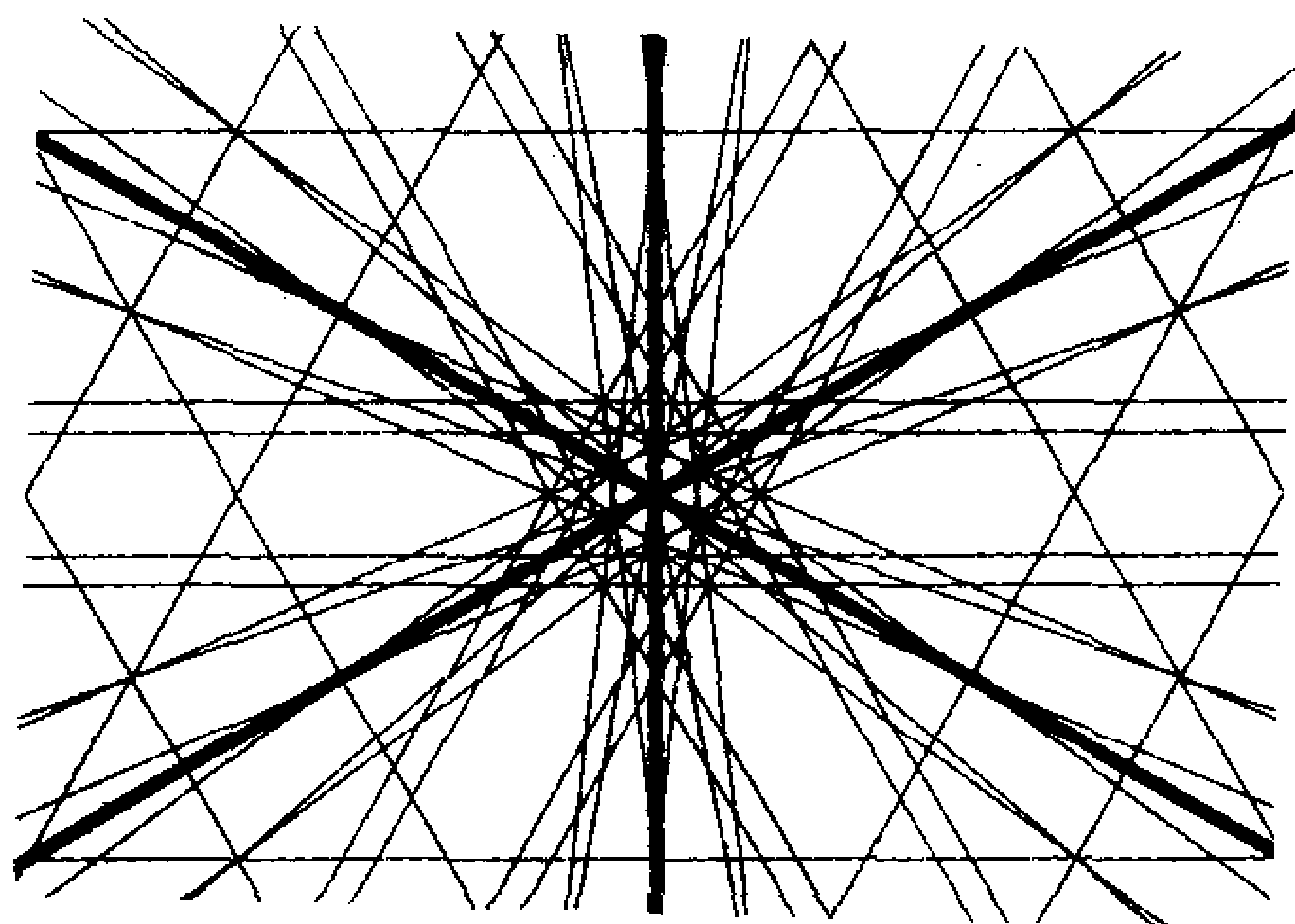
将一把直角三角尺运动, 当斜边经过定点直角顶点位于一条直线上时, 那么就形成抛物线的包络. 该定点就是焦点, 该直线就是准线.

Pascal configuration　帕斯卡构形

在圆锥曲线上的六点顺次作为六边形的顶点有六十种不同的选法. 根据帕斯卡定理, 每一种选择都得到一条帕斯卡直线. 这 60 条直线形成一个复杂的构形. 下图表示圆上一个正六边形的六个顶点的帕斯卡构形, 所以复杂性减少了. 它形成了大量的退化直线. 这三条粗直线中的每一条由四条退化了的帕斯卡直线组成. 还有六条直线是无穷远直线, 所以只能看见 45 条直线.

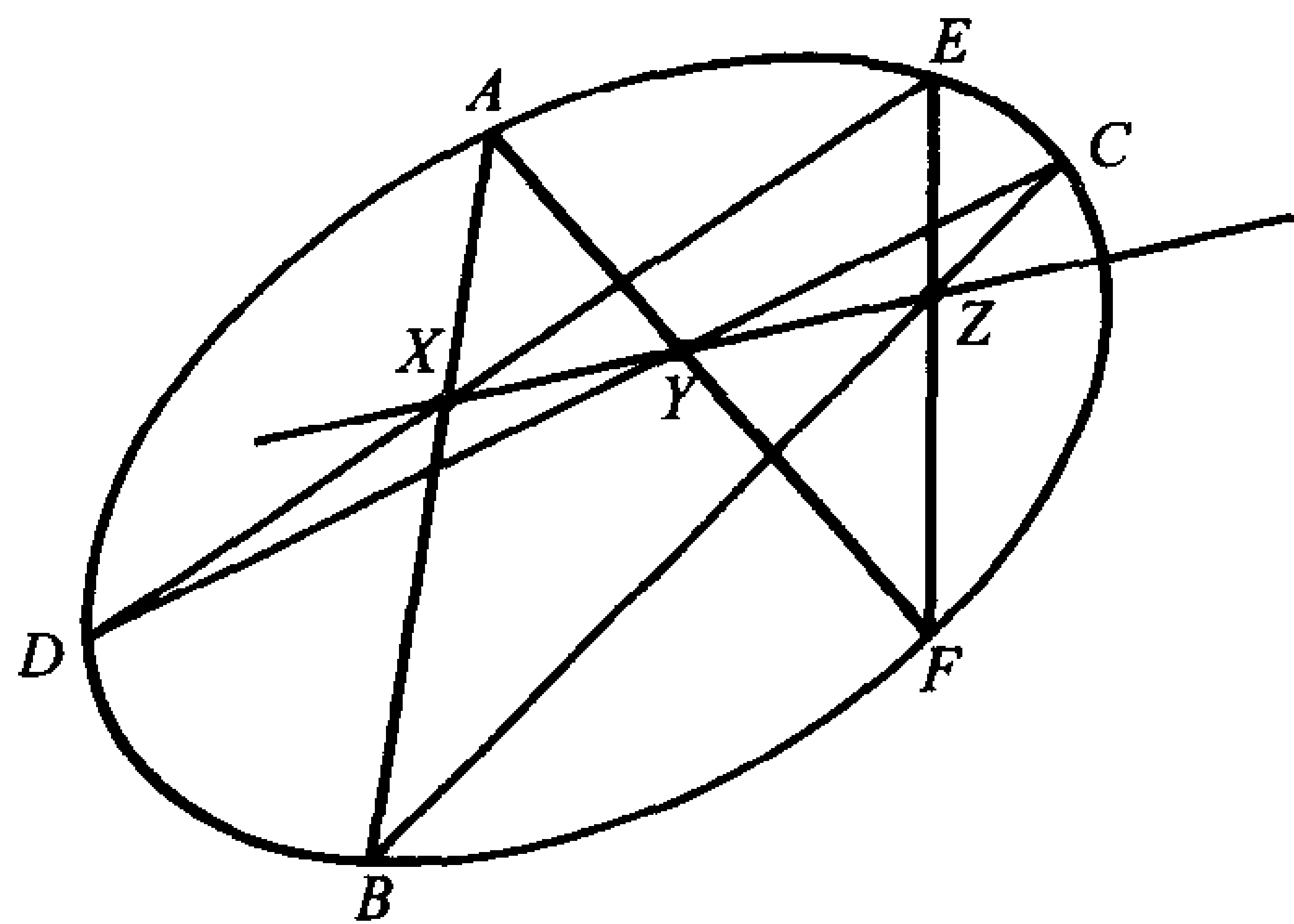


下图表示上图的中心部分放大后的情况, 以显示帕斯卡直线的一些相交的方式. 帕斯卡直线中有三条一次经过 20 个斯坦纳(Steiner)点, 也有三条一次经过 60 个柯克曼(Kirkman)点. 每一个斯坦纳点和三个柯克曼点位于一条凯莱(Cayley)线上, 凯莱线有 20 条. 斯坦纳点中一次有四个位于 15 条普吕克(Plücker)线上, 每次有四条经过 15 个点, 这些点称为舍蒙(Salmon)点.



Pascal's theorem　帕斯卡定理

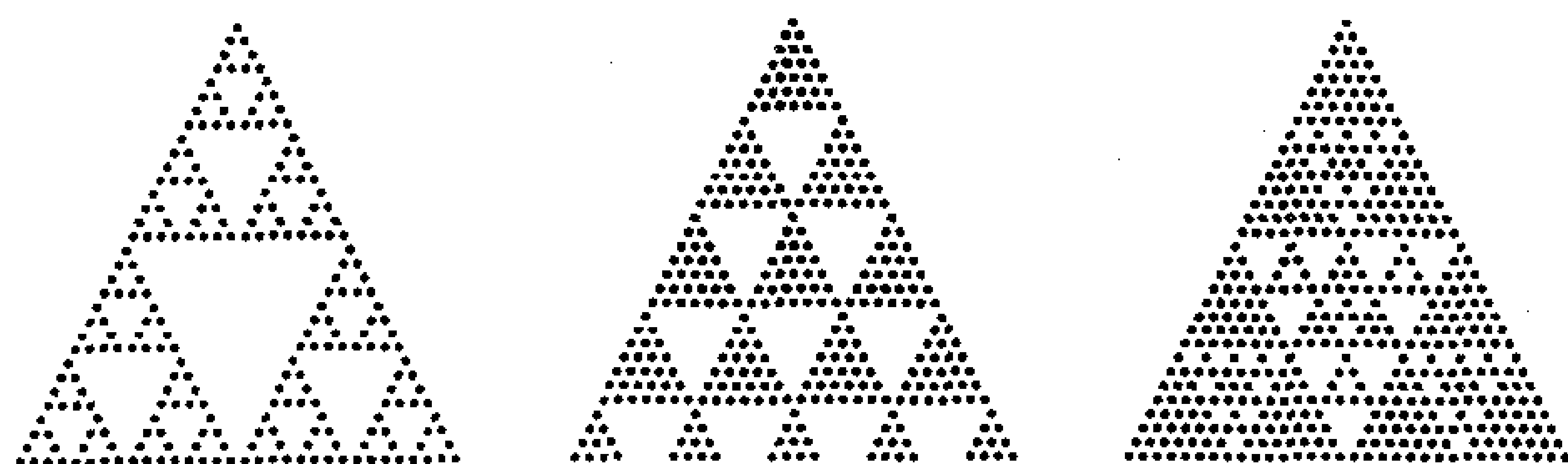
1640年布莱斯·帕斯卡(Blaise Pascal) 16岁时发现了他的著名的定理,这一定理发表在名为《论圆锥曲线》(*essai pour les coniques*)的小册子上.该定理说如果一个六边形内接于一条圆锥曲线,那么每一对对边相交的三个交点位于同一直线上.如果这个六边形的顶点的字母依此为 $ABCDEF$,那么 AB 和 DE 是对边,它相交于 X,等等.此时直线 XYZ 就是帕斯卡线.



对于交点在圆锥曲线内的交叉六边形,图形看上去就像帕普斯定理的图.帕普斯定理的确是帕斯卡定理的特殊情况,此时圆锥曲线已退化为两条相交直线.如果六边形画得正规一点,那么共线的三点就在圆锥曲线外.

Pascal's triangle　帕斯卡三角形

将帕斯卡三角形中的每一数(即二项式系数)都填在一个小六边形中. 再将填有奇数的小六边形打上阴影,就得到左面的图案(它由计算机把点代替六边形而生成).



把不同于 2 的数的倍数遮住,可得到各种不同的图案. 中间的图案遮住的是 7 的倍数,右面的图案遮住的是 8 的倍数.

由奇数和偶数构成的帕斯卡三角形可以看作为一个有空穴的自动监控器(cellular automation). 在一条无限长的空穴带上给出一行许多 0 和许多 1,于是在下面一行的空穴中的数按以下规律填:相邻两数都是 1 或都是 0,那么在这两个相邻的数下面填 0,如果一对相邻的数是 10 或 01,那么在这两个相邻的数下面填 1. 可以从任何形式的 1 和 0 开始.

```
1 0 0 0 1 0 1 0 1 1 0 1 1 0 1 1 1 1
 1 0 0 1 1 1 1 1 0 1 1 0 1 1 0 0 0
  1 0 1 0 0 0 0 1 1 0 1 1 0 1 0 0
   1 1 1 0 0 0 1 0 1 1 0 1 1 1 0
    0 0 1 0 0 1 1 1 0 1 1 0 0 1
     0 1 1 0 1 0 0 1 1 0 1 0 1
      1 0 1 1 1 0 1 0 1 1 1 1
       1 1 0 0 1 1 1 1 0 0 0
        0 1 0 1 0 0 0 1 0 0
         1 1 1 1 0 0 1 1 0
          0 0 0 1 0 1 0 1
           0 0 1 1 1 1 1
            0 1 0 0 0 0
             1 1 0 0 0
              0 1 0 0
               1 1 0
                0 1
                 1
```

改变这一规则是很容易的. 在下面的图案中，三个相邻的数中有奇数个 1，就在中间一数的下面生成一个 1，有偶数个 1，就生成 0.

1 1 1 0 1 0 0 1 1 0 0 1 1 1 1 0 0 0

1 0 0 1 1 1 0 0 1 1 0 1 1 0 1 0

1 1 0 1 0 1 1 0 0 0 0 0 0 1

0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 0 1

1 1 1 0 1 1 1 0 0 1

1 0 0 0 1 0 1 1

1 0 1 1 0 0

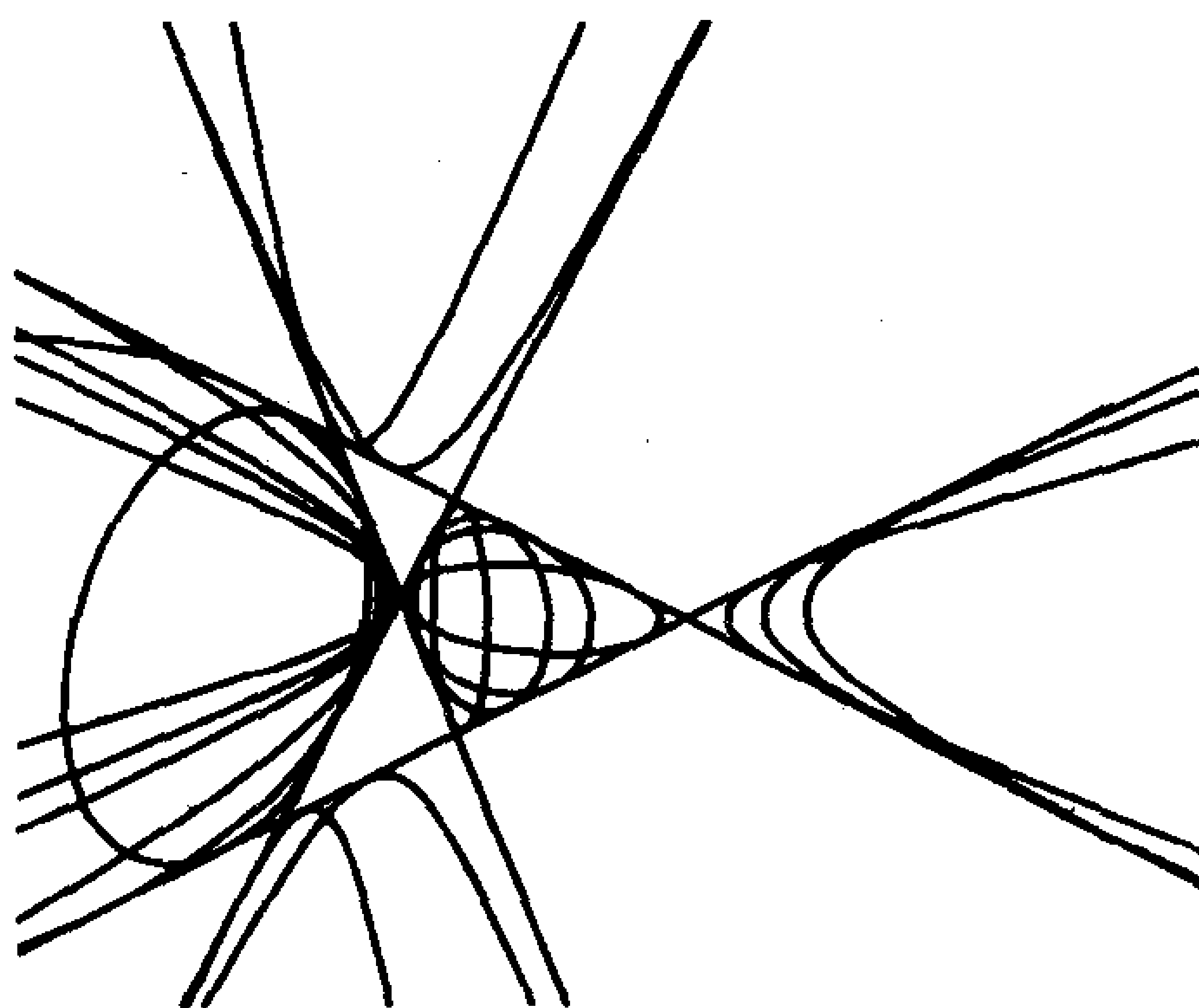
0 0 0 1

0 1

pencils of conics　圆锥曲线族

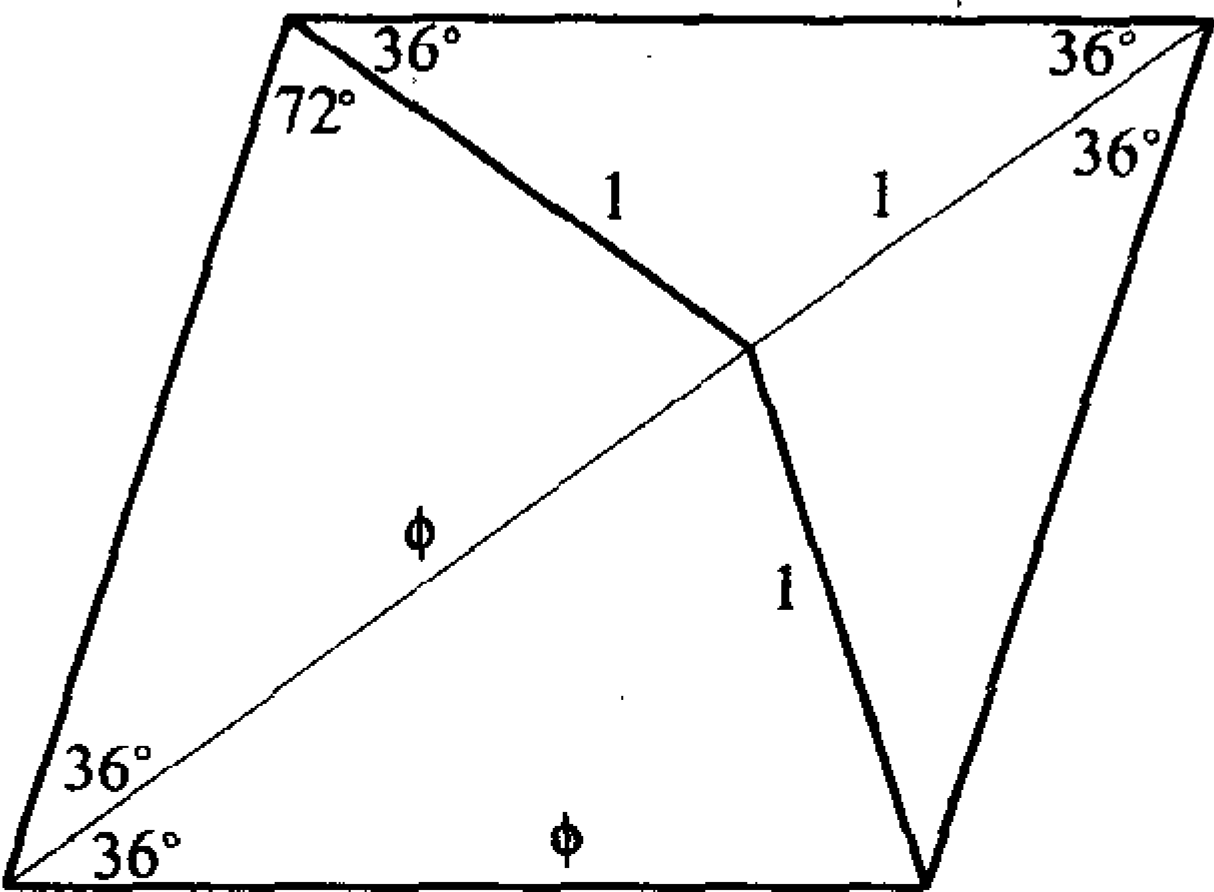
经过五点或与五条直线相切的圆锥曲线是唯一的. 与四条直线相切的圆锥曲线有无限条，它们组成一个圆锥曲线族.

四条直线把平面分成的十一个区域中，只有五个区域包含与四条直线相切的圆锥曲线. 抛物线只出现在左边的一个区域中，它也包括椭圆和一部分双曲线. 在唯一的封闭四边形中只出现椭圆.

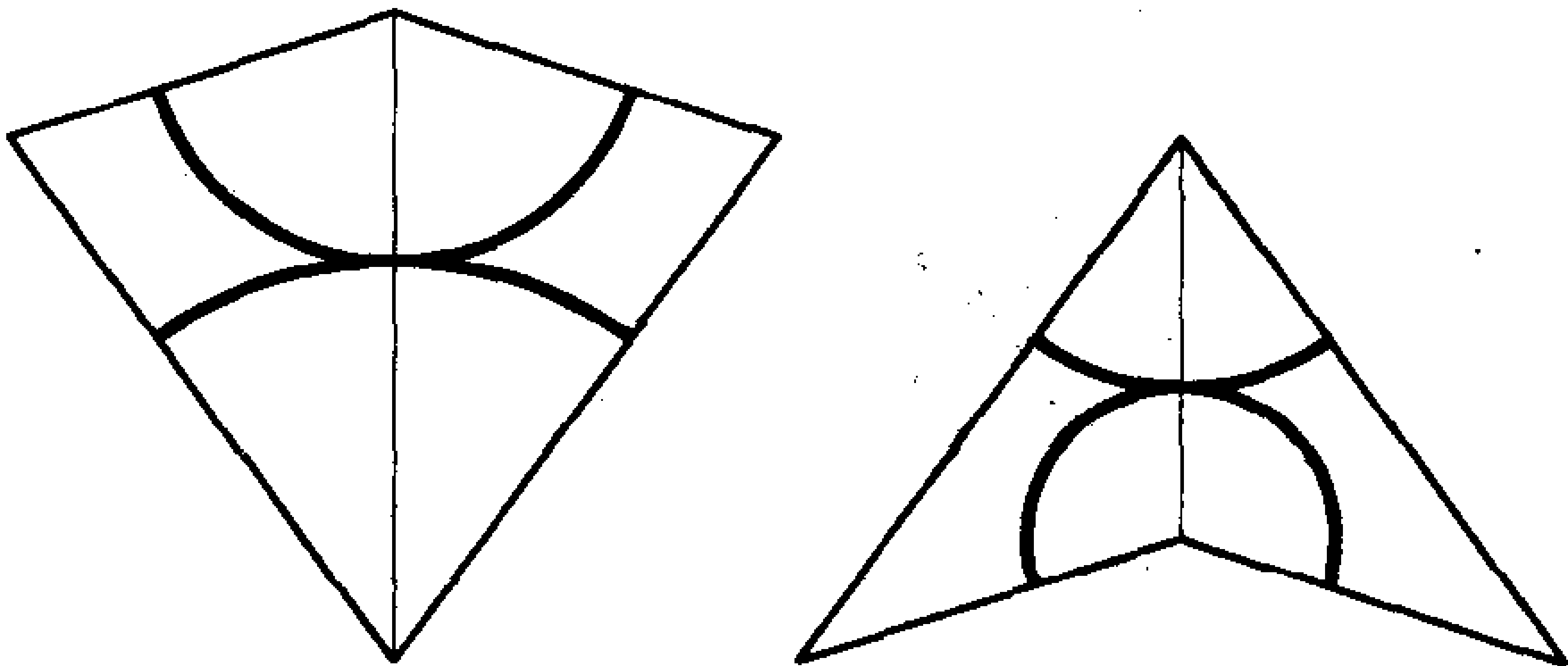


Penrose tilings　彭罗斯拼板

罗杰·彭罗斯(Roger Penrose)是一位闻名于世的相对论和量子论专家,他也是趣味数学的爱好者.他和他的父亲发明了永远是上升的彭罗斯楼梯.彭罗斯发现了以下两种拼板,约翰·康威(John Conway)恰当地把它们命名为"飞镖"和"风筝".



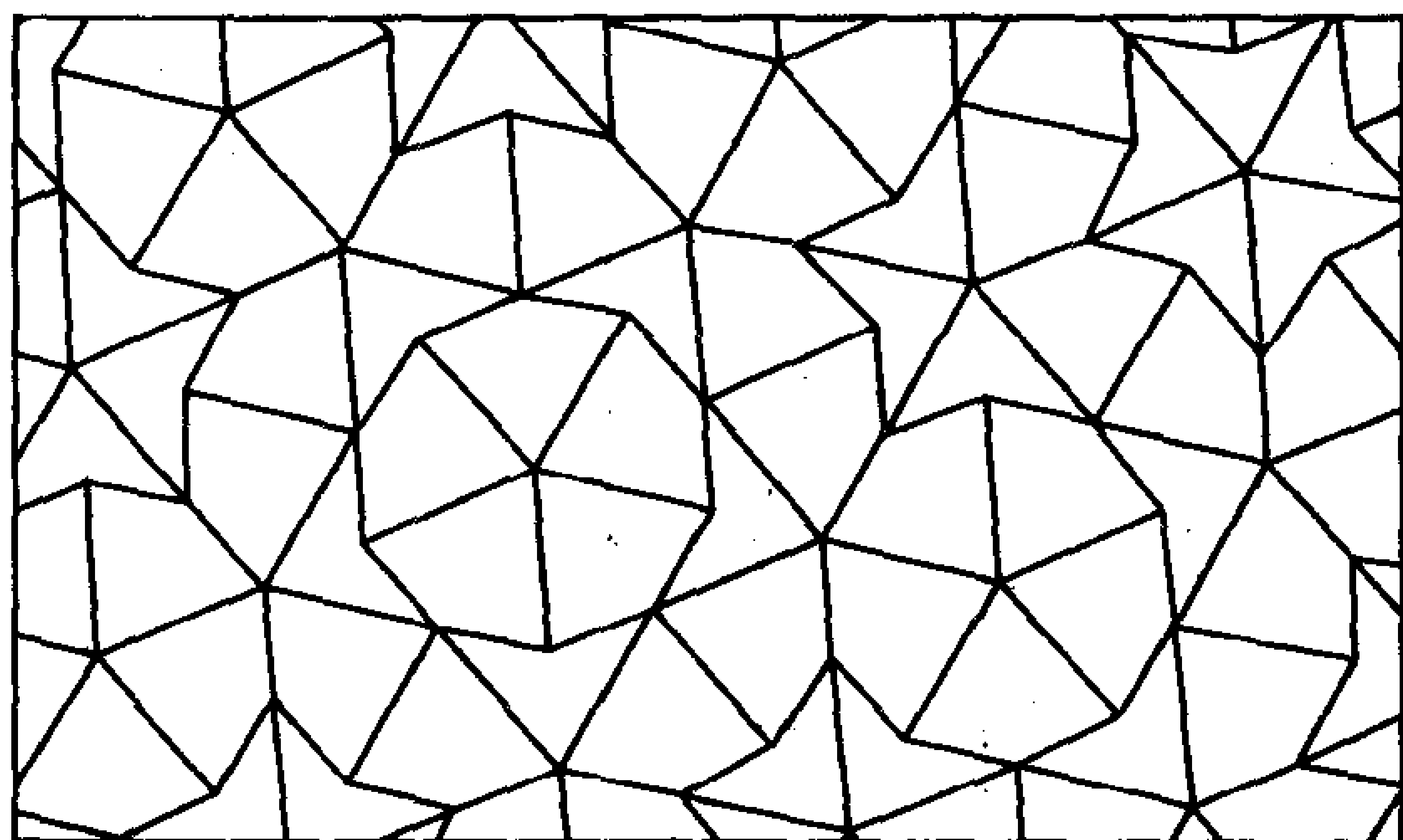
这两种拼板由一个菱形构成.边长 ϕ 是黄金比 $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$,或 1.618….为了作一个彭罗斯拼板,头部的顶点用 H 表示,尾部的顶点用 T 表示.接着就这样拼装:使任何具有同样字母的两个顶点都不相邻.此外,为了确保拼装方法可靠,棱可以有些裂痕(或稍有变形),或者如下图那样在每一拼板上画上曲线,如果这些拼板拼装得正确,那么一块拼板上的曲线与各相邻的拼板上的曲线相连.



这两种形状可以用无穷多种非周期性的方法来铺满整个平面.换句话说,如果你做一块这样的非周期性的镶嵌图案的玻璃,你不

旋转就无法移动这块玻璃,使所有这些直线重新适合这一镶嵌.

有些彭罗斯拼块具有旋转对称性,多数是没有的.它们需要的风筝比飞镖多.大体上是 ϕ:1.在一个无限的铺砌中,这个比才是精确的.



如果在这种拼板上画曲线,而且是封闭的,那么它有一个五边形对称性,并且曲线内部的区域也具有这样的对称性.

一种模式的任何有限区域都只能以一种方法铺砌,所以一个区域的轮廓限定了其内部的铺砌.

在其他的每一个无限的彭罗斯铺砌中,一种铺砌的任何有限区域并不恰好出现一次,而是出现无穷多次.如果你着手于一种彭罗斯铺砌中,并开始探索,那你无法决定你实际上着手的是哪一种彭罗斯铺砌!此外,如果你决定在研究你已熟悉的特定的区域,探索这一新的彭罗斯世界,你必将能在最多是该区域的直径的 2 倍的这一距离内找到它.

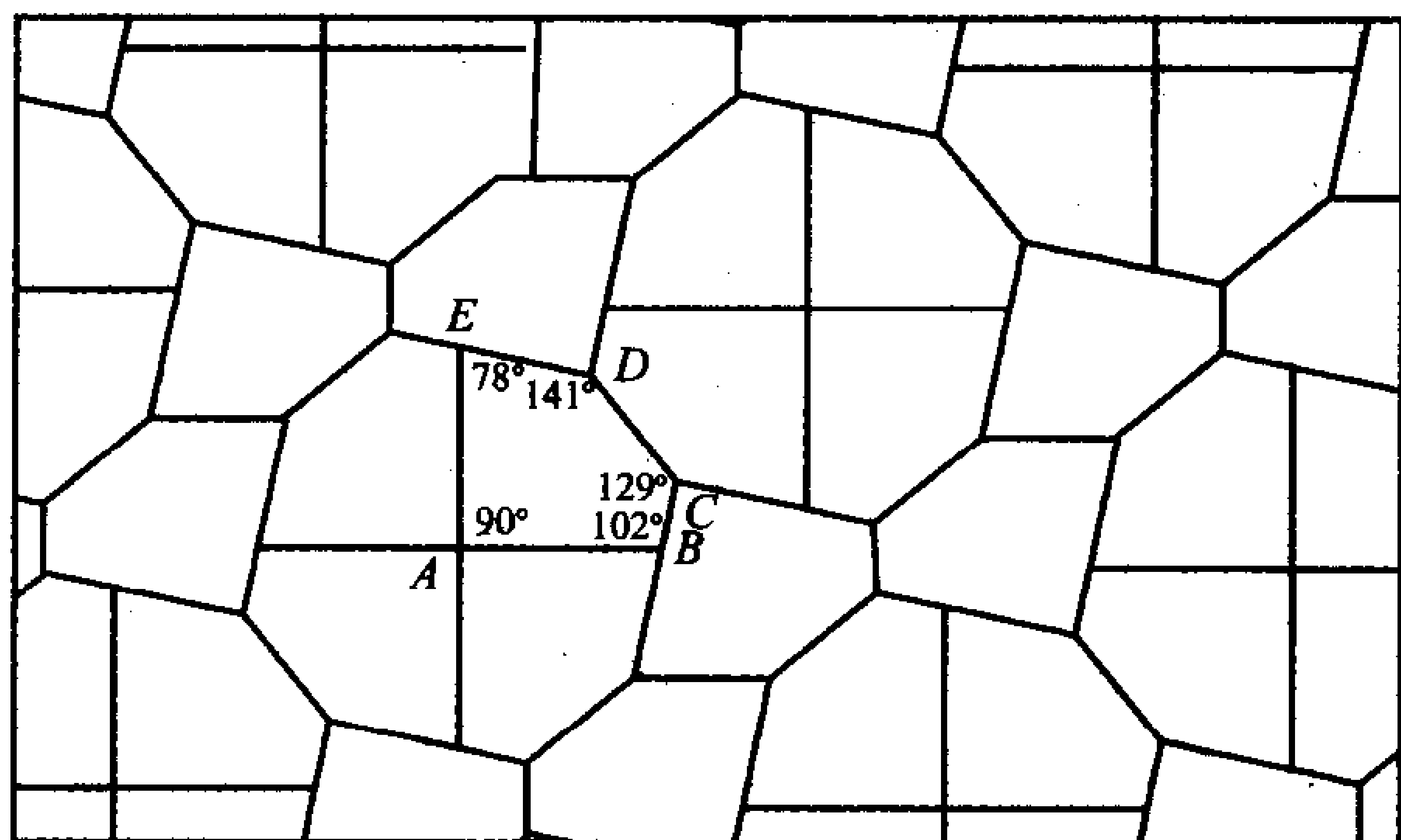
pentagon tessellations　五边形镶嵌

正五边形不能镶嵌.例如在开罗镶嵌中,就很少有正五边形镶嵌.非正的五边形镶嵌有多少种不同的类型呢?

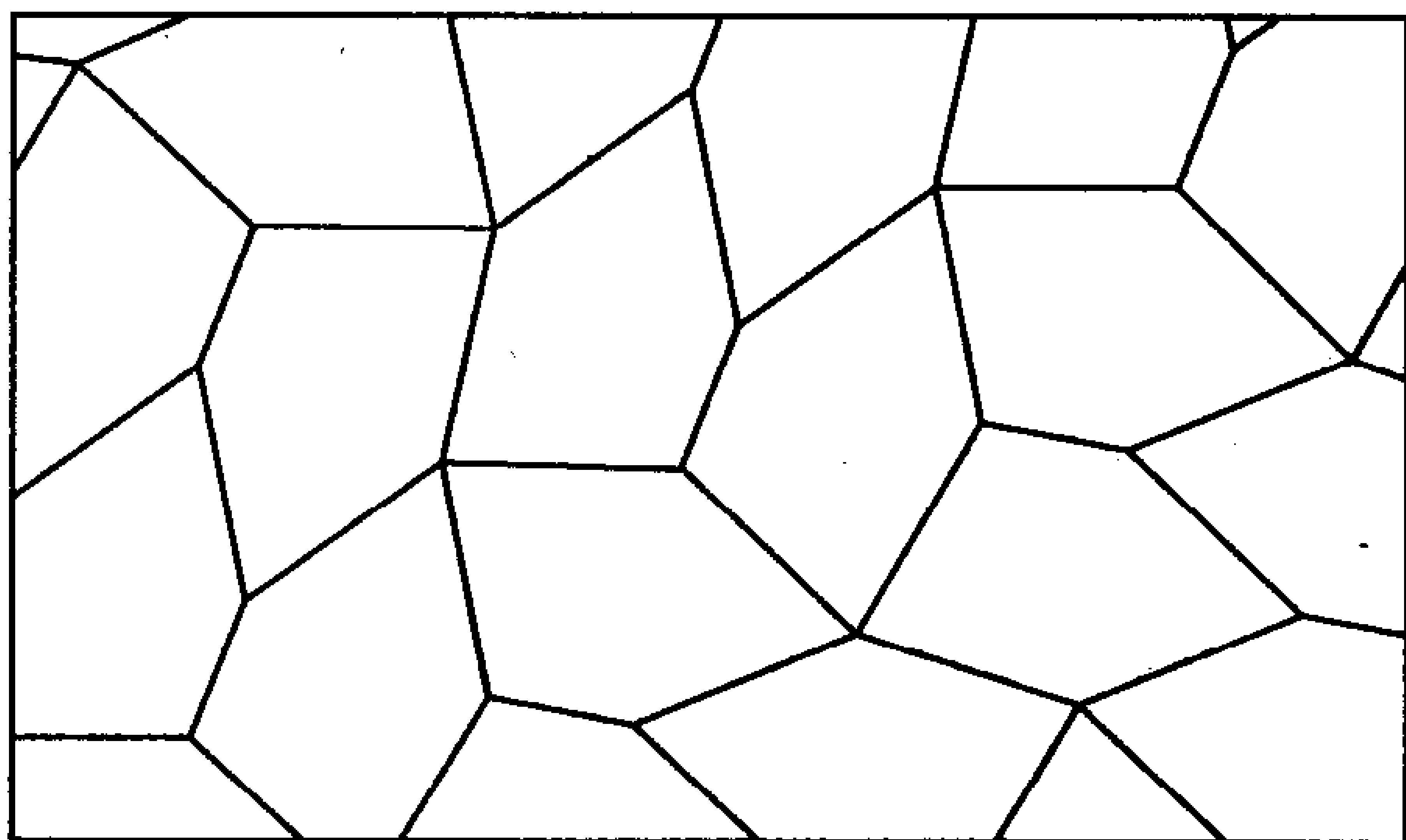
K·莱因哈特(K. Reinhardt)在 1918 年发现了五类不同的镶嵌.理查德·开尔士纳(Richard Kershner)在 1967 年发现了前

面漏掉的三类，并相信他的名单完整了.但是1975年理查德·詹姆斯(Richard E. James)三世发现了这个美丽的新的镶嵌，如下图.

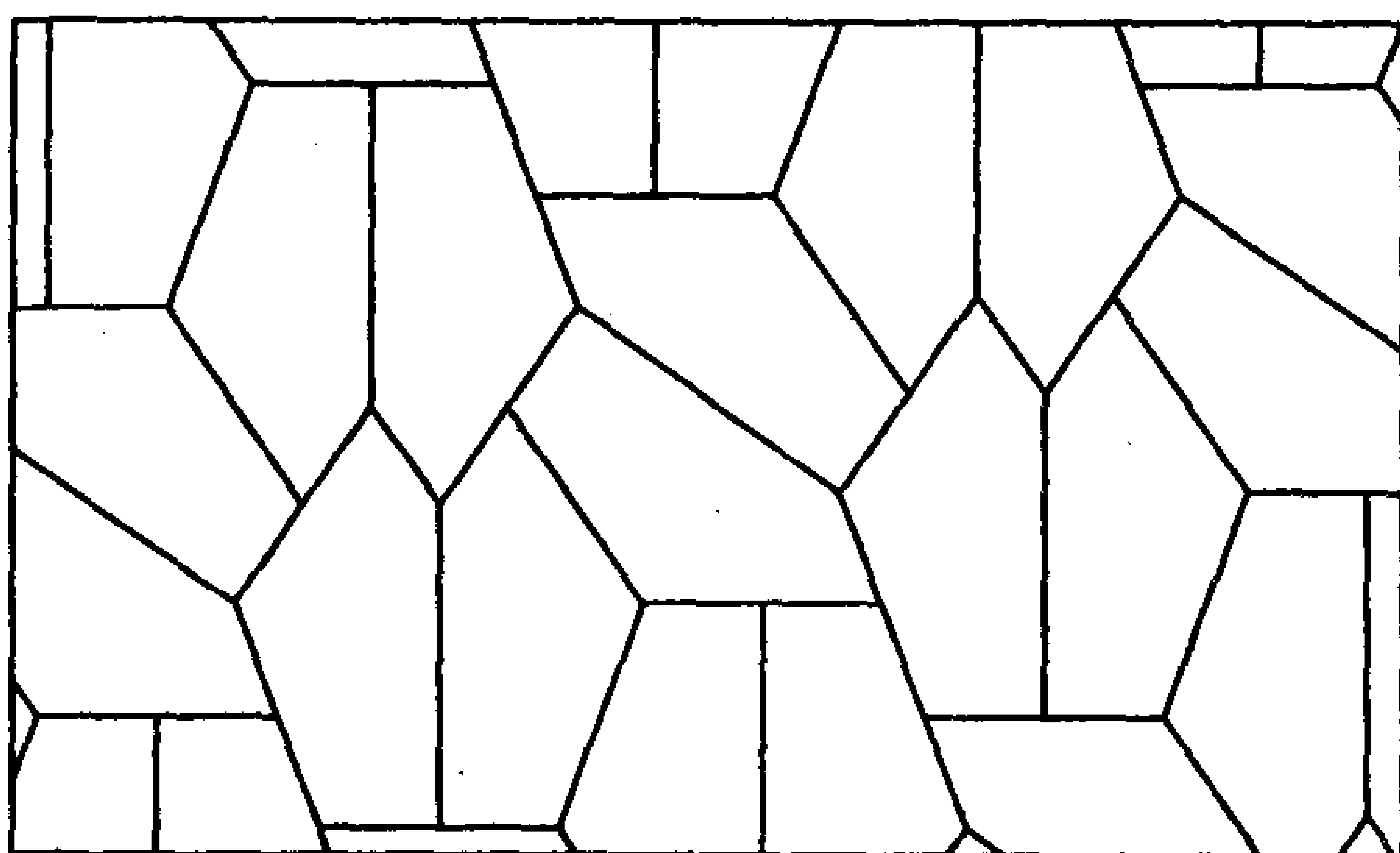
在这一镶嵌中，$A=90^\circ$，$C+D=270^\circ$，$2D+E=2C+B=360^\circ$，$AE=AB=BC+DE$.



后来，玛乔利·赖斯(Marjorie Rice)根据马丁·加德纳的《圣递哥的一位没有受过高中所需的起码的数学训练的家庭主妇》一文，于1976年发现了第十类型镶嵌如下图所示，随后又很快发现了三类.

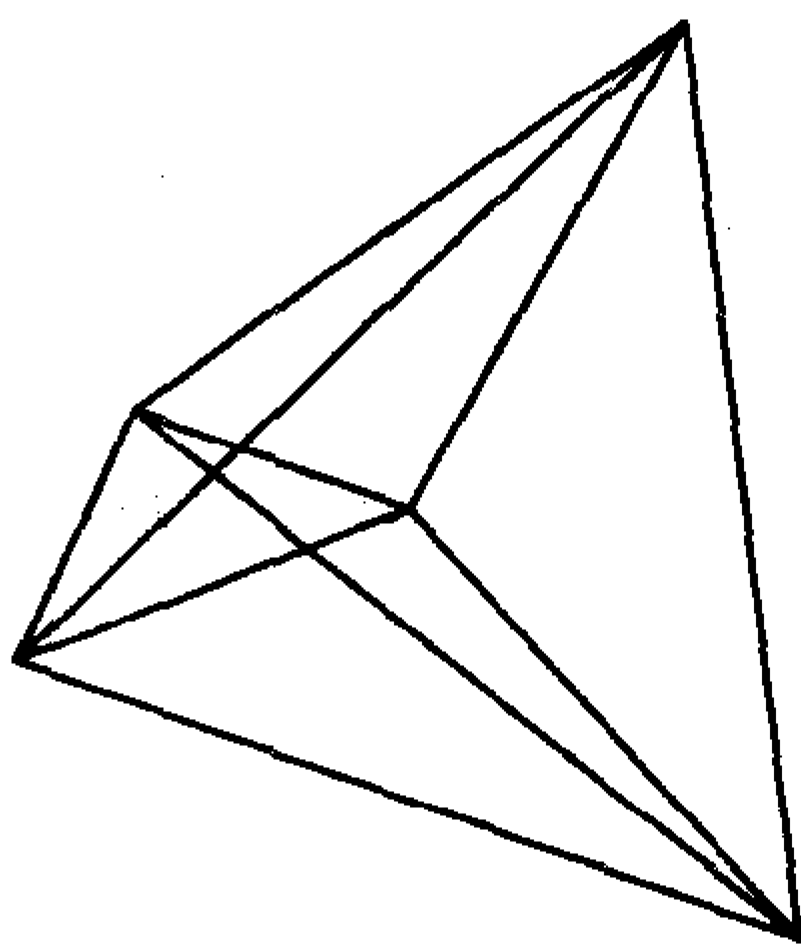


1985年洛尔夫·斯泰因(Rolf Stein)找到了第十四类.还不知道这一名单是否完整.



pentatope *or* simplex　正五单形

下图是一个四维空间的图形，它相当于三维空间的正四面体和二维空间的等边三角形.



它有五个三维面或空腔，其中每个都是正四面体的形状，10个平面，10条棱和五个顶点，它与本身对偶.

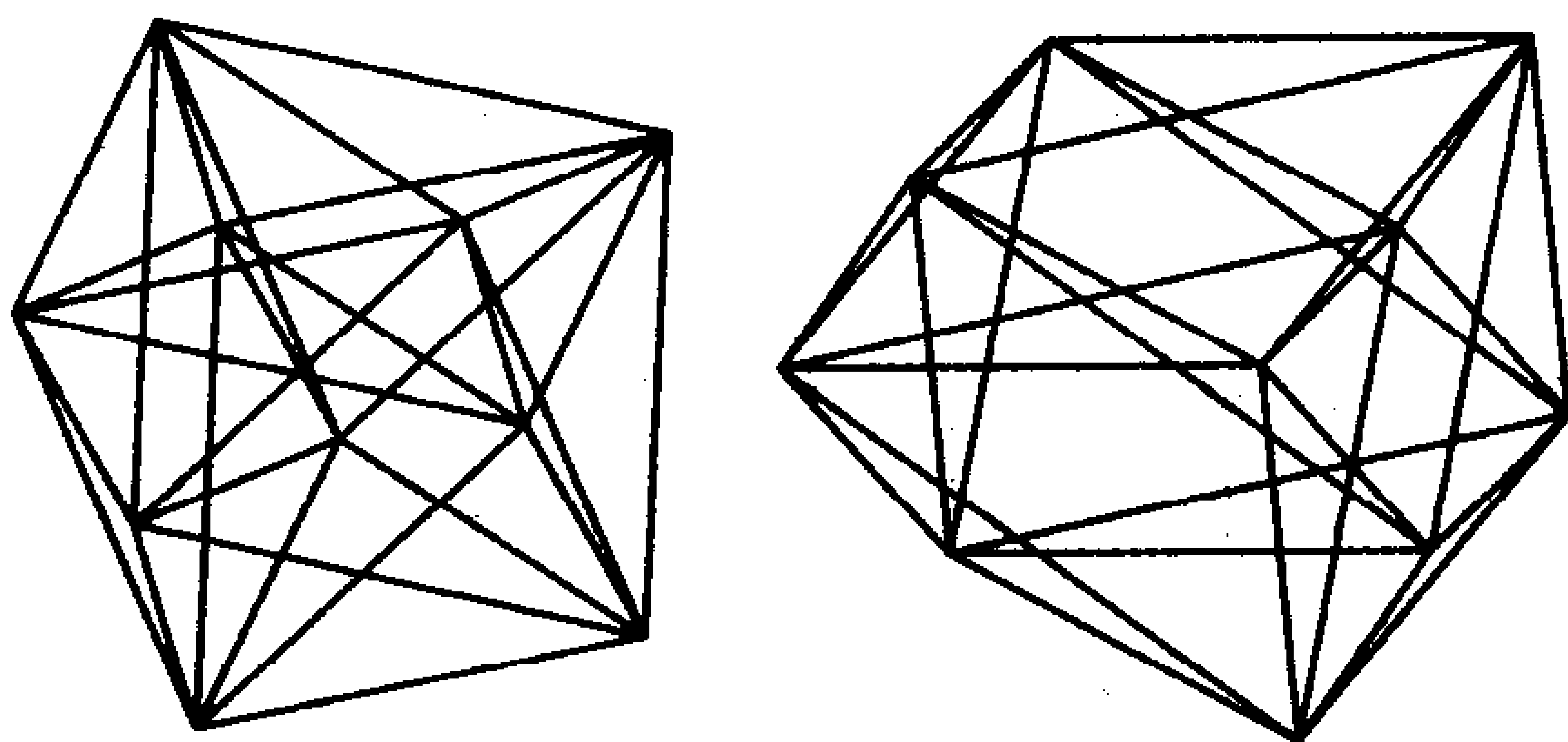
可以预料，与一个正四面体的平面网类似，它在三维空间的网是每一个面上都有一个正四面体的正四面体堆.

如果把它看作是连接每个都由五个平面面组成的两个圈形成的结果，那么五个平面面的每一个圈都形成一条莫比乌斯带.

对称地把一个正四面体的每一个顶点截掉后，在每一个顶

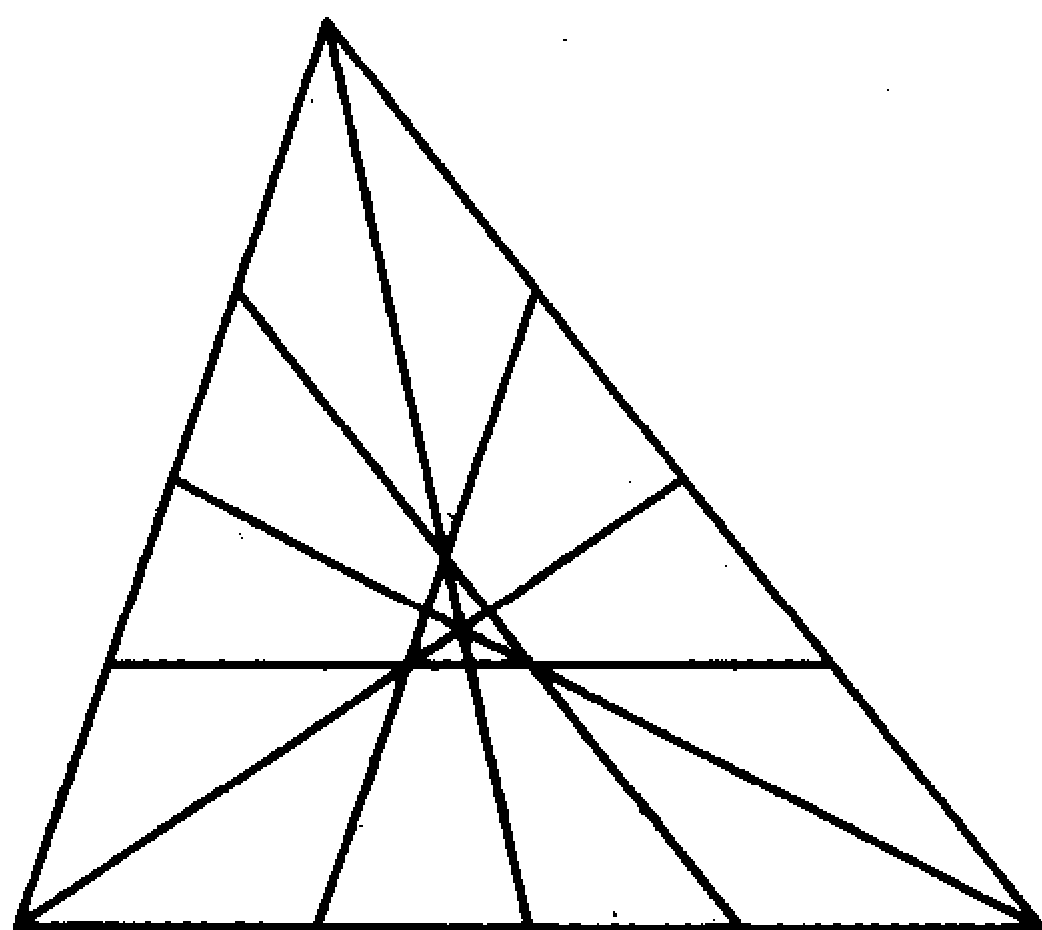
点处就形成一个新的等边三角形，每一个面就变成一个六边形. 如果截面都通过棱的中点，那么原来的各个面也变成等边三角形，被截掉后的正四面体就是正八面体.

把一个单形体在原来每一个顶点截掉，在每一个顶点处就形成一个新的正四面体，每一个三维面从四面体变为截头四面体. 下面的两张图表示过棱的中点所截得的单形体. 它由 5 个正四面体和 5 个正八面体组成.



perimeter bisectors　平分周长的直线

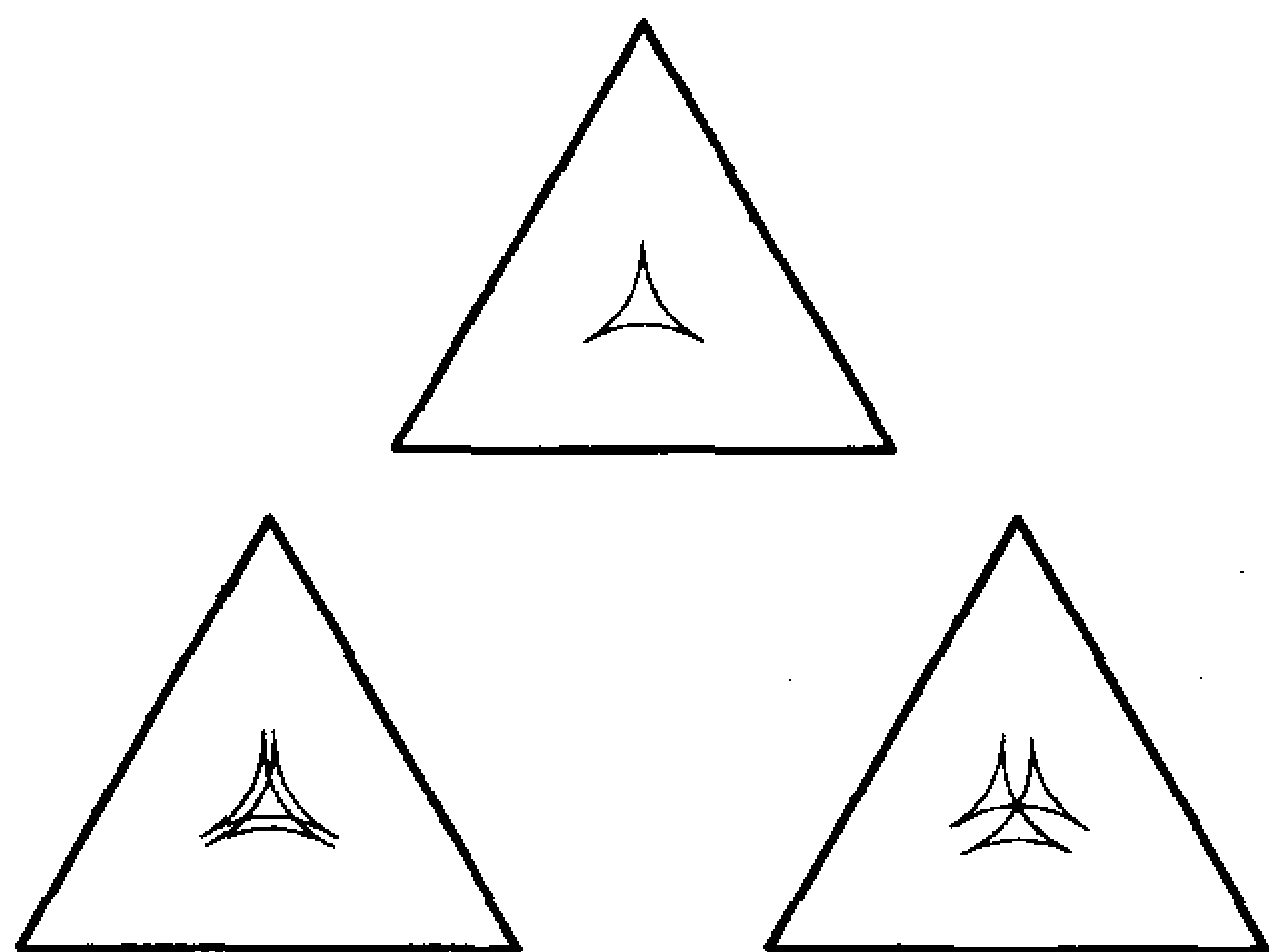
三角形的中线平分其面积，平行于一边并把另两边分成比为 $(\sqrt{2}+1):1$ 的直线也平分其面积. 这六条直线中有三个三线共点.



所有这些直线平分三角形的面积，在这种情况下一个等边三角形包络三条双曲线弧.

对于把三角形分成两个面积不相等的直线，包络就更为复



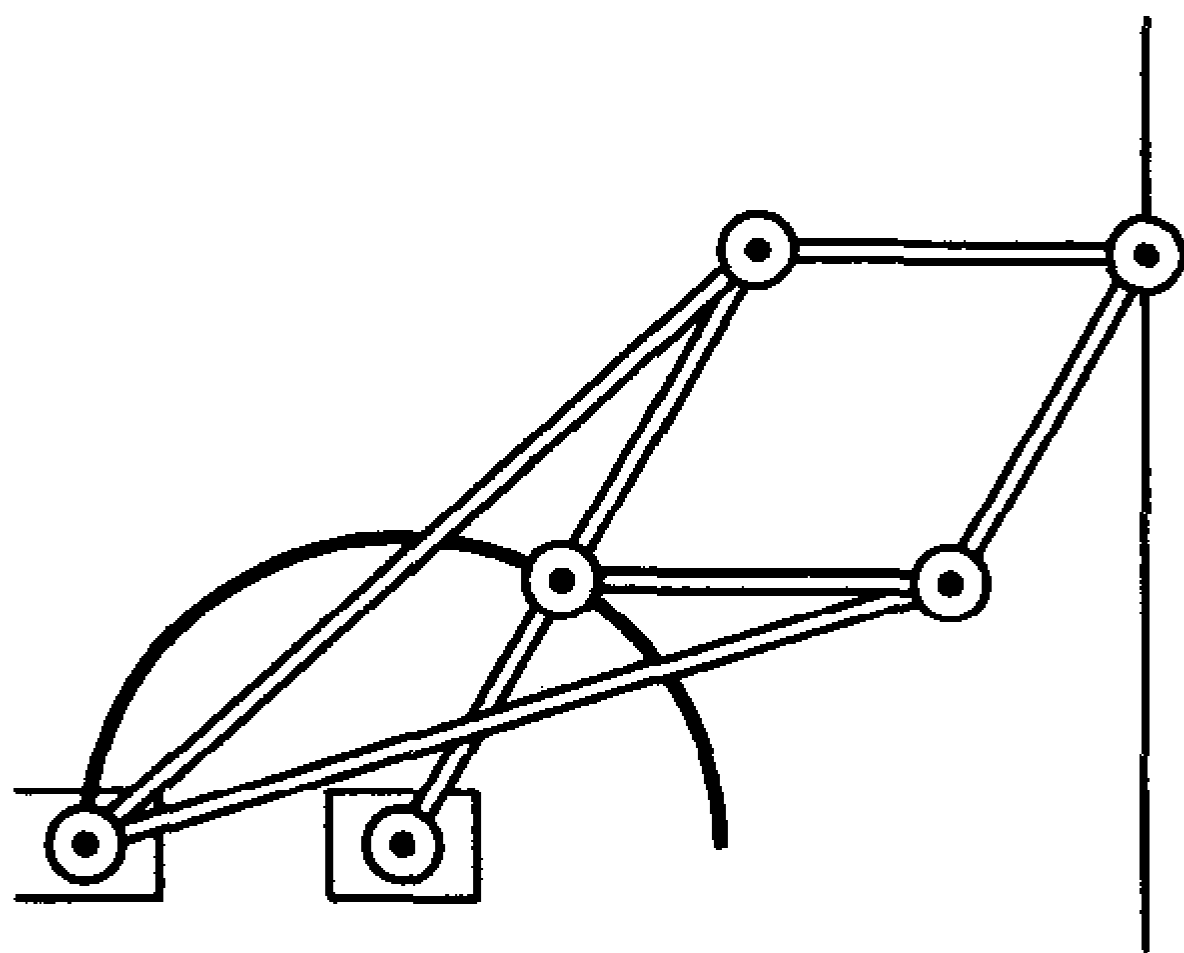


杂.当比从 1:1(上面一个图)变化时,它首先分割为左下图,然后当比到达 5:4时,三条弧就共点.于是出现一个增大的中心区域,最后就变成三角形本身.

参考书:J. A. DUNN and J. E. PETTY. ‘Halving a triangle’,*Mathematical Gazzette*,No. 396, 1972; DEREK. BALL, ‘Halving envelopes’,Mathencatical Gazzette,No. 429,1980.

Peaucellier's cell　布色里尔构件

布色里尔(Peaucellier)是一位法国军官,他首先解决了如何不用直尺而用联合器画一条直线的问题.



大 V 字形顶点上的插销是一个定点.布色里尔将军的联合器由一个 V 字形和一个菱形组成.如果菱形的一个顶点描出一个圆(它经过定点),那么相对的顶点描出它的反演,即一条直线.

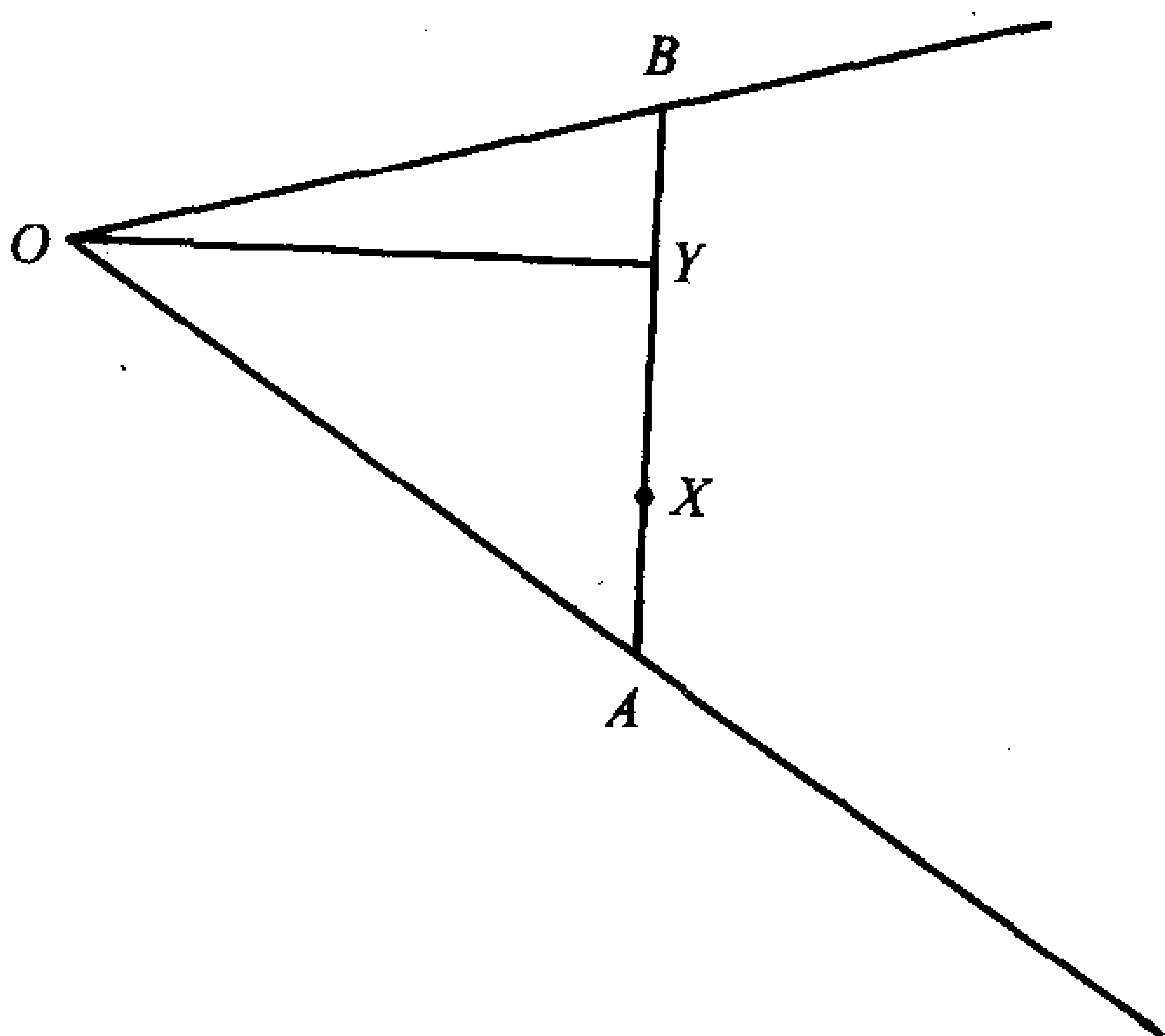
附加一根杆，并把它的一端固定在圆心就完成了（如图所示）.

如果菱形的这一个顶点描出的不是一个圆，而是某一条其他曲线，那么相对的顶点仍描出它的反演曲线. 因此，布色里尔可以用来反演任何曲线.

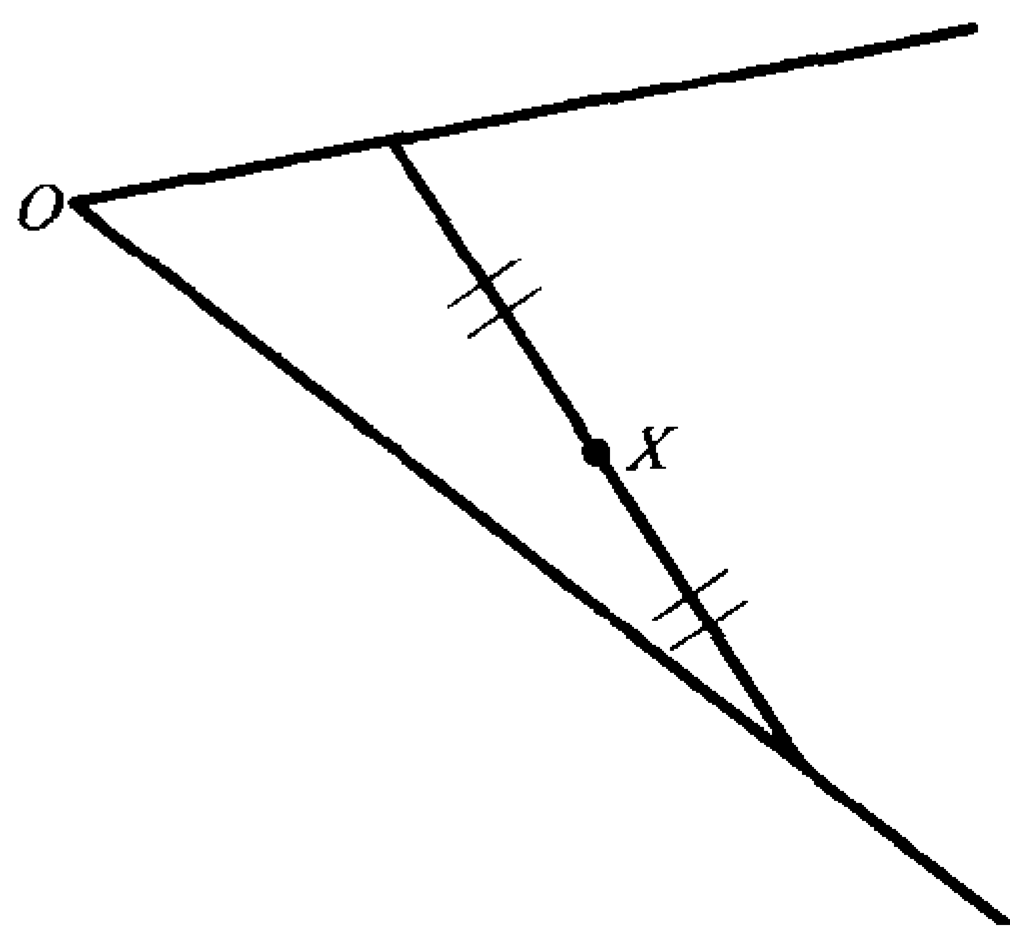
布色里尔的发明最初发表于 1867 年，是力学中把圆周运动变为直线运动的广泛的需要而促使他发明的. 詹姆斯 · 瓦特(James Watt)早先就发现了一个近似的解，即瓦特平行运动. A. B. 坎普(A. B. Kempe)是"如何画直线：关于联合器的报告"(1877)一文的作者，他本人也是几种联合器的发明者，他描绘了总工程师 M. 普力姆(M. Prim)先生如何改进布色里尔构件，以适应于作为新的议会大厦通风设备的通风发动机的使用，并建议访问读者.

Philo's line　斐洛线

给出两条直线形成一个角，在这个角的内部有一定点 X，经过点 X 的最短的线段 AB 称为斐洛(Philo)线. 拜占庭的斐洛之后有一位力学和水力学方面的专家冒出了这样的想法，试图把立方体加个倍. 如果 OY 是从 O 点向 AB 所作的垂线，那么 $AX=YB$.



一个简单得多的问题是寻求过 X 点的直线，使它和原来两条直线所围成的面积最小.

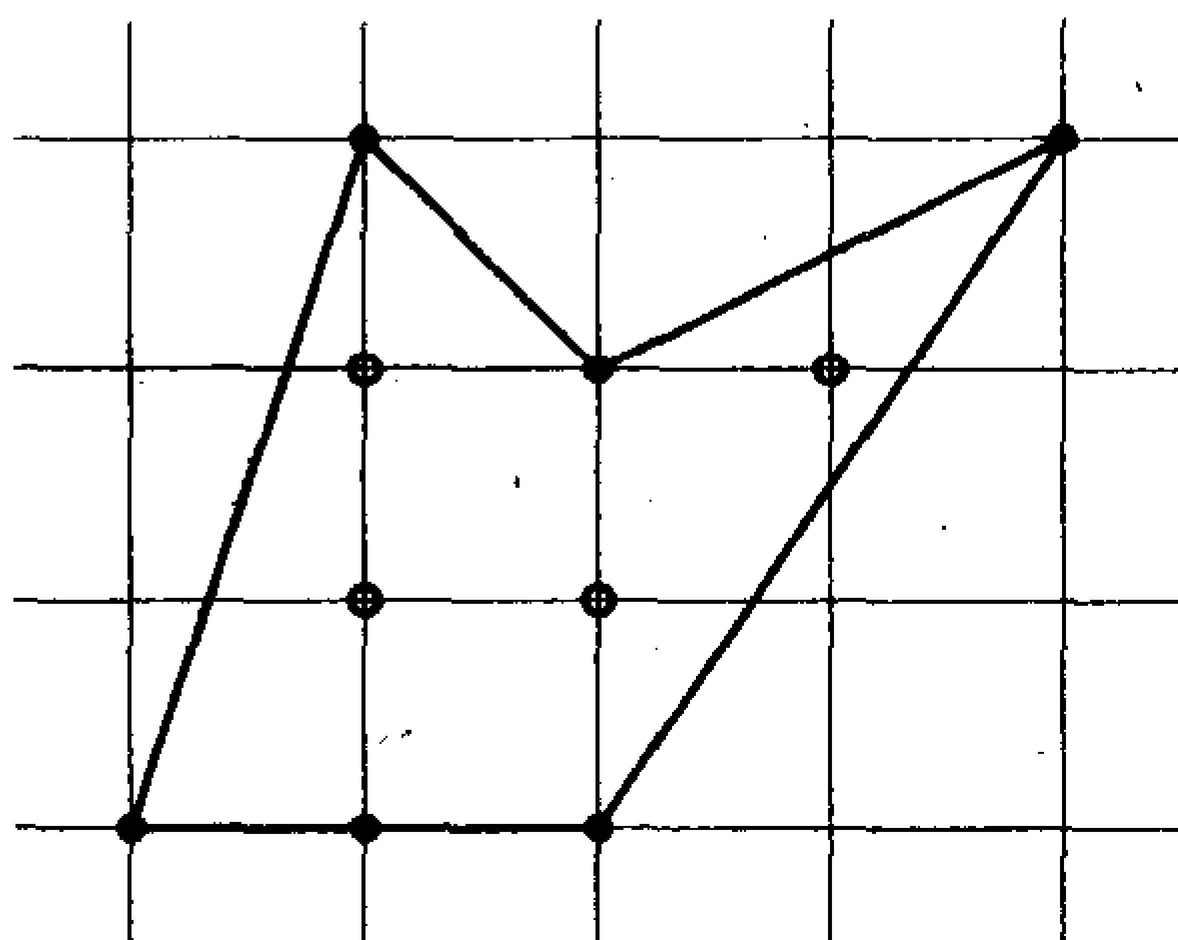


Pick's theorem　皮克定理

1899 年 G・皮克(G. Pick)发现了一个求顶点都在平面上的正方形的格点上的多边形的面积简单方法. 如果 N 是该多边形的内部的格点数, B 是边界上的包括顶点在内的格点数, 那么

$$面积 = N + \frac{1}{2}B - 1.$$

在下面的例子中, $N=4$, $B=6$, 所以面积是 $4+\frac{1}{2}\times 6-1=6$.



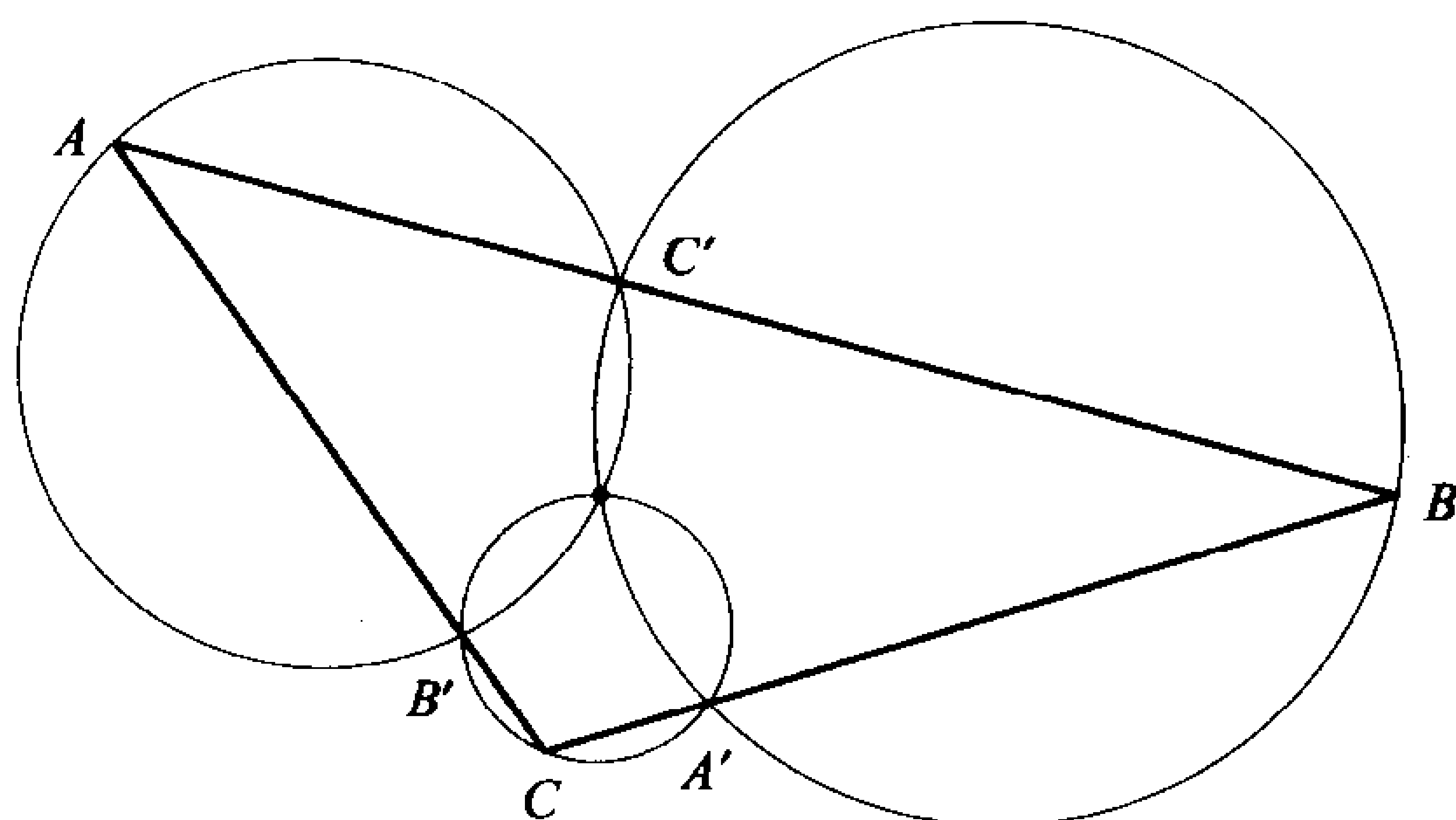
皮克定理对于平面地图等价于对多面体的欧拉关系:

$$顶点数 + 面数 = 棱数 + 2.$$

Pivot theorem　支点定理

在三角形 ABC 的三边上任给三点 A', B', C'. 那么圆

$AB'C'$，$BA'C'$，$CA'B'$共点.

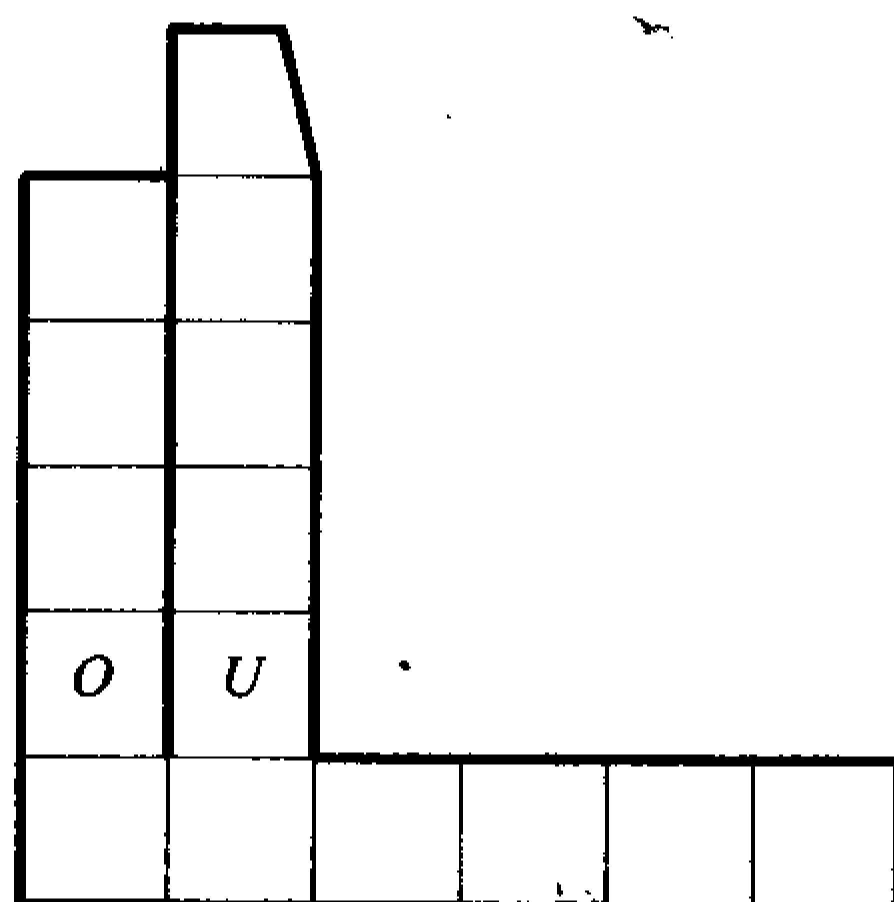


这导致了一个新的结论.过一点任作三个圆.于是存在无穷多个三角形，这些三角形的顶点分别在这三个圆上，每一边都经过该边所在的两个圆的另一个交点.

支点定理在三维中有类似的情况.在一个四面体的六条棱上各取一点.过该四面体的一个顶点和过该点的棱上的其他三点都可作一个球，这样的四个球共点.

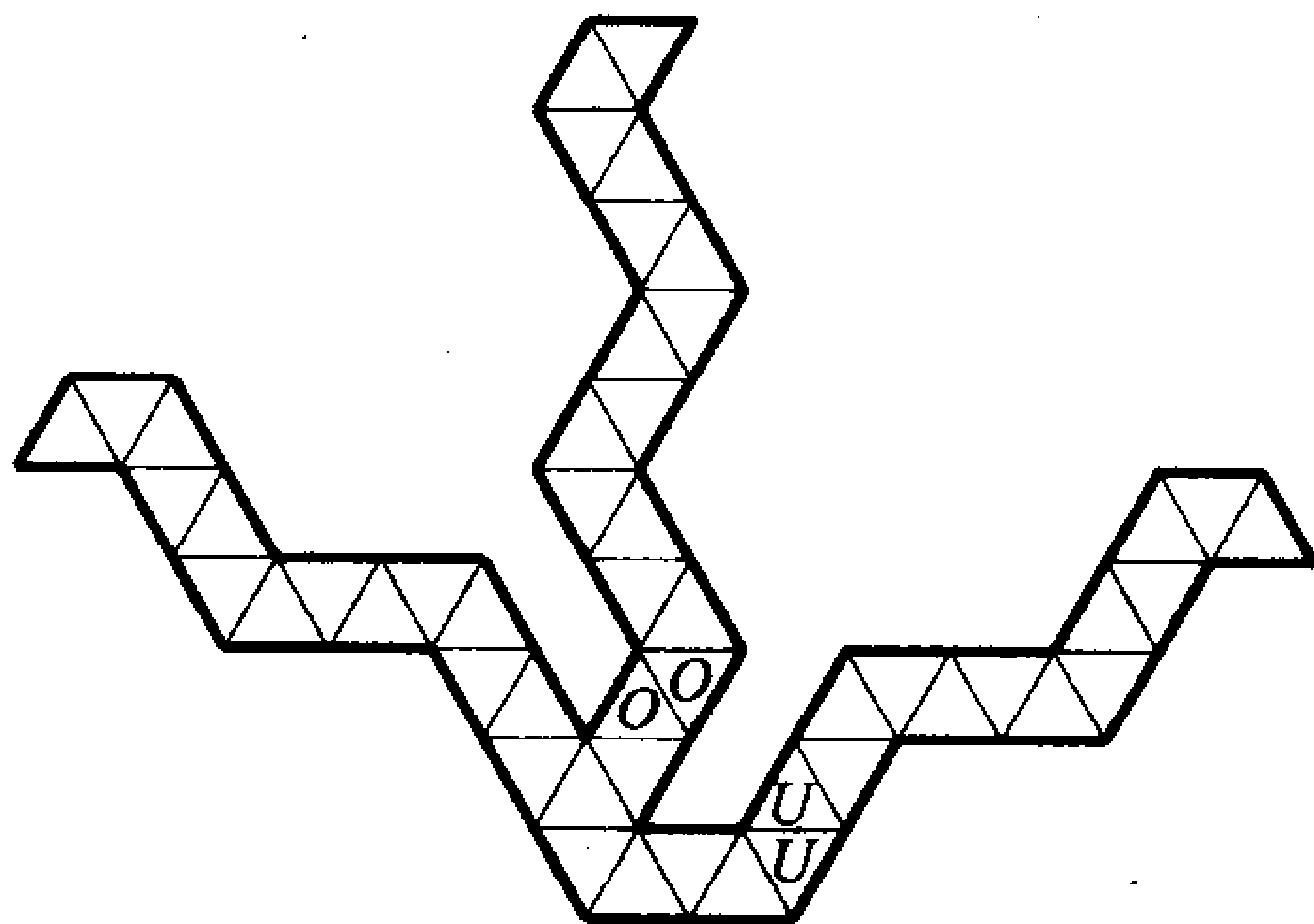
plaited polyhedra　辫成的多面体

A·P·帕杰特(A. R. Pargeter)受约翰·哥尔汉(John Gorham)在1888年所写的《辫成晶体模型》(*plaited crystal model*)一书的鼓舞，发展了辫成更多的，包括正多面体在内的多面体的模型的方法."辫"在字面上是用作辫长发的过程的意思.





粗线表示要剪开.如果正方体的外表保持向上,并且第一步是把正方形 O 放在正方形 U 的上面,那么第一张图就可辫成一个正方体.为了辫得不松开,最后一个正方形要插进去,所以要稍微剪一个斜口.



第二张图是做成一个正二十面体.两头都要插进去,每一头都是一对三角形.

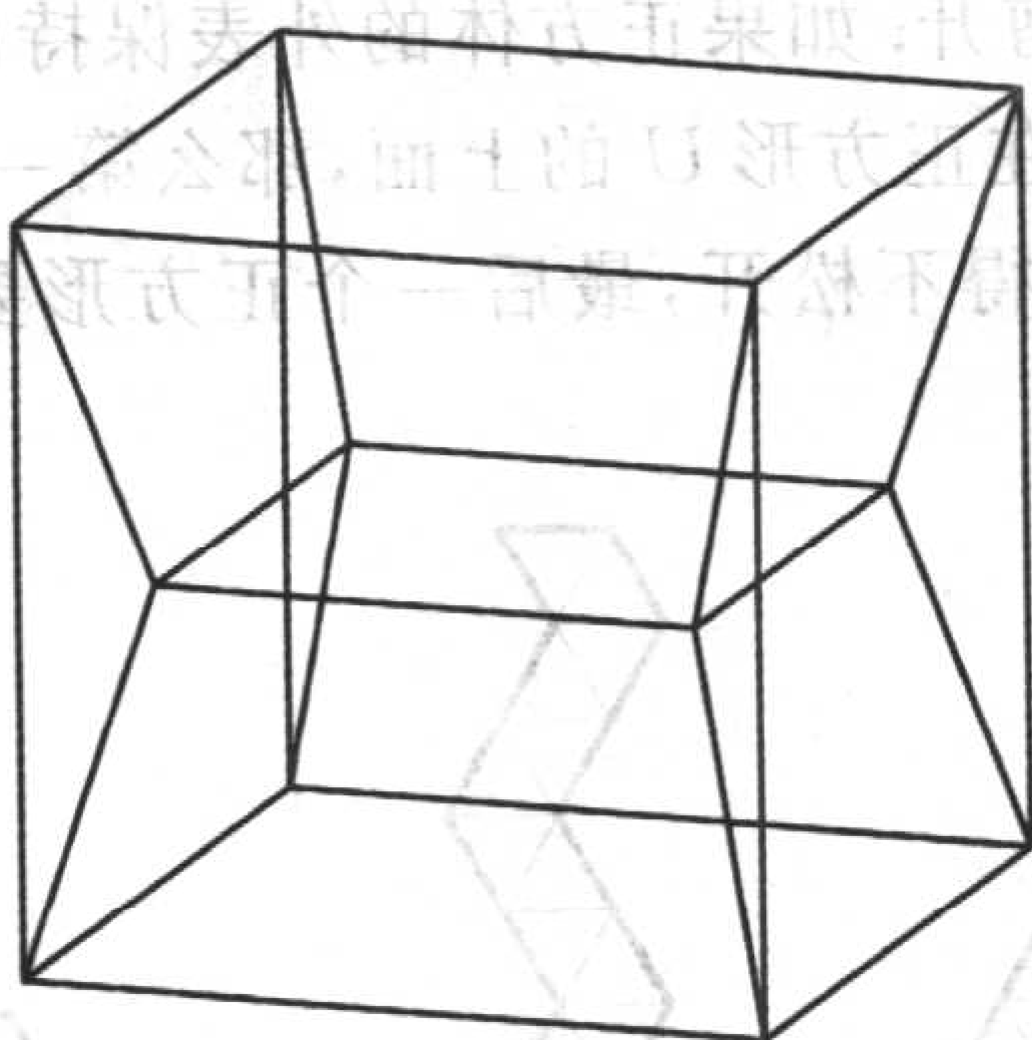
参考书:A. R. PARGETER,'Plaited polyhera' *Mathematical Gazette*, No. 344, 1959.

Plateau's problem 普拉托问题

拉格朗日(Lagrange)提出了以下问题:给定一个封闭的边界,且在其边界内的曲面上无奇点,确定其最小的表面积.

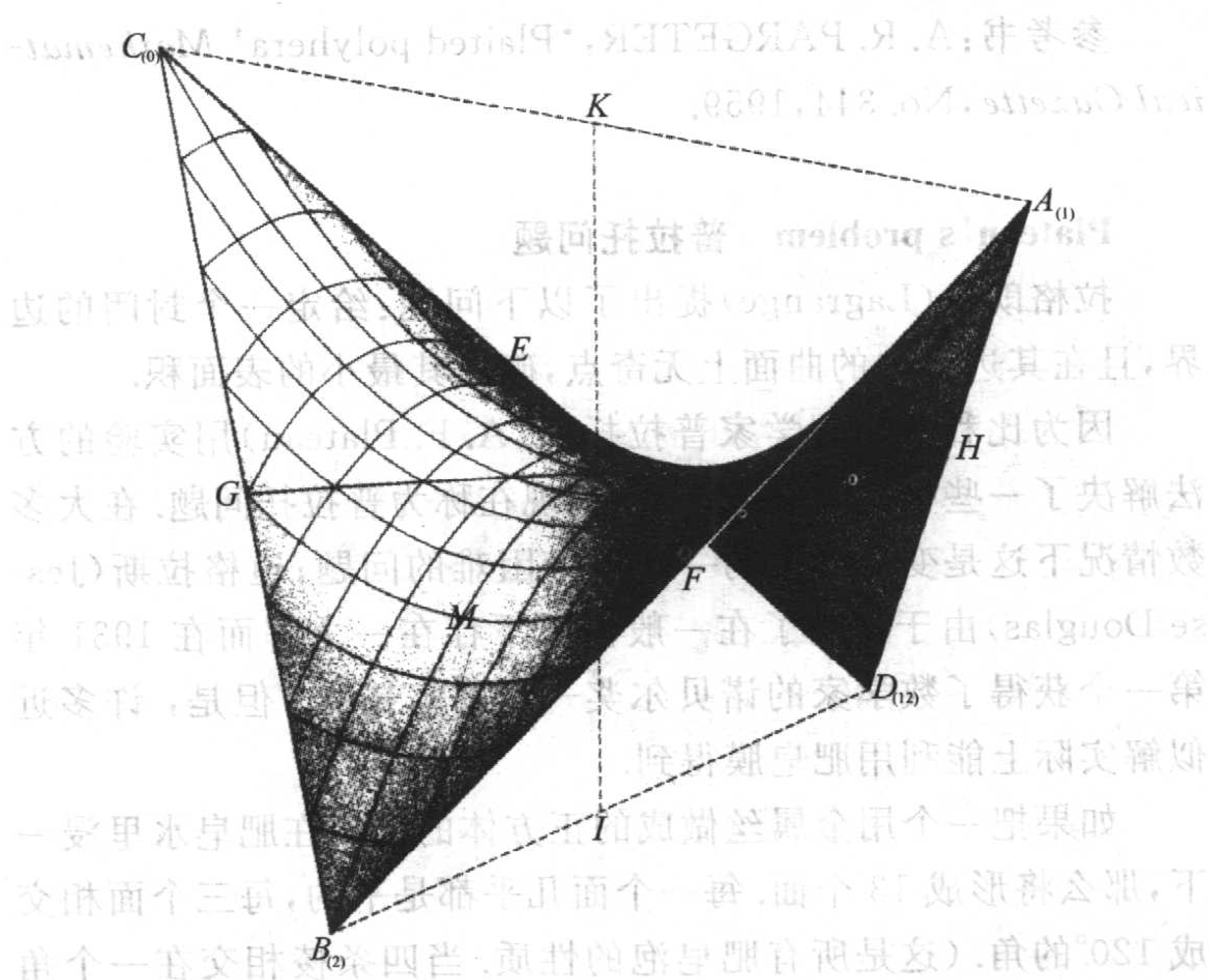
因为比利时物理学家普拉托(J. A. F. Plateau)用实验的方法解决了一些情况,所以这一问题现在称为普拉托问题.在大多数情况下这是变分法中的一个极为困难的问题;道格拉斯(Jesse Douglas)由于证明了在一般情况下存在一个解而在 1931 年第一个获得了数学家的诺贝尔奖——费尔兹奖.但是,许多近似解实际上能利用肥皂膜得到.

如果把一个用金属丝做成的正方体的框架在肥皂水里浸一下,那么将形成 13 个面.每一个面几乎都是平的,每三个面相交成 120°的角.(这是所有肥皂泡的性质.当四条棱相交在一个角



上时也正确，它们相交成等角，近似于 109°28′16″，这个角与正四面体有关.）

1865 年施瓦兹（H. A. Schwarz）对于空间四边形证明了普拉托问题，他以三个模型说明了他的解，这三个模型用细金属丝构成，并涂上肥皂膜.

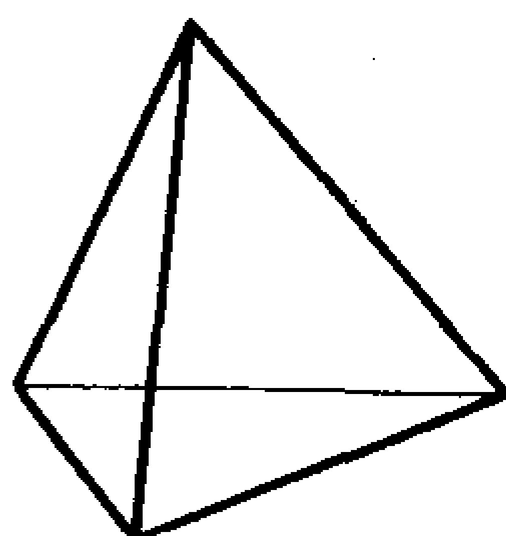


Platonic solids　正多面体

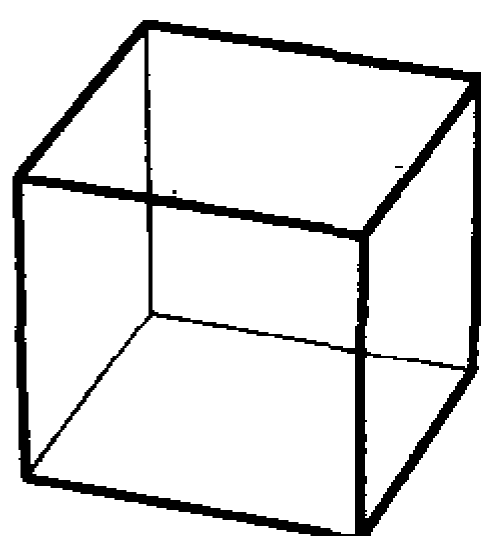
如果一个多面体是正多面体,那么它的各个面都是同一类正多边形,所有各个顶点都全等.正多面体只有五种:正方体,正四面体,正八面体,正十二面体和正二十面体.

按传统的说法,正多面体称为柏拉图体(Platonic solids),虽然欧几里得在其《几何原本》的最后一卷中是这样说的:"在本书的第十三章中,作出了五种称为柏拉图体的正多面体,但并不属于柏拉图.这五种图形中的三种:正方体,正四面体和正十二面体是属于毕达哥拉斯学派的,而正八面体和正二十面体是属于特埃特图斯(Theætetus)的".

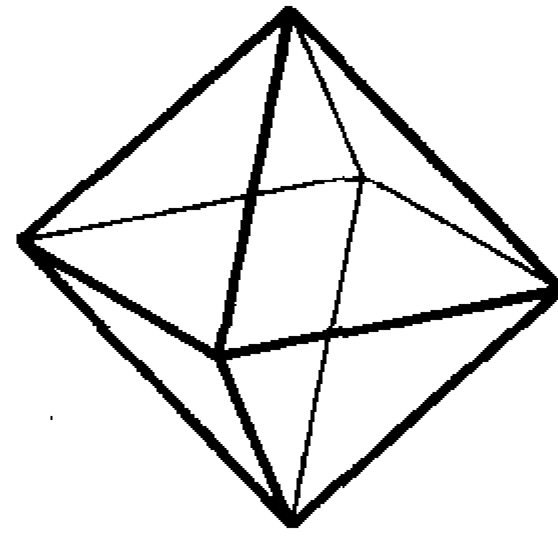
正十二面体发现得较早是并不奇怪的,因为黄铁矿的晶体几乎呈正十二面体形,在意大利的南部发现了很好的样本.人工制造的正十二面体早在公元前500年以前在意大利就被发现.



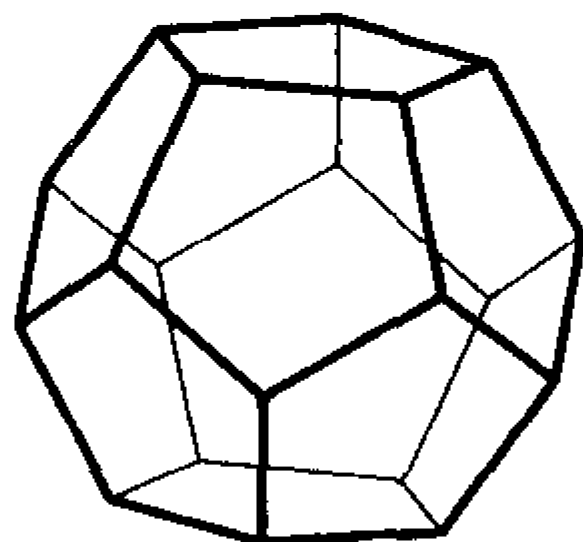
正四面体



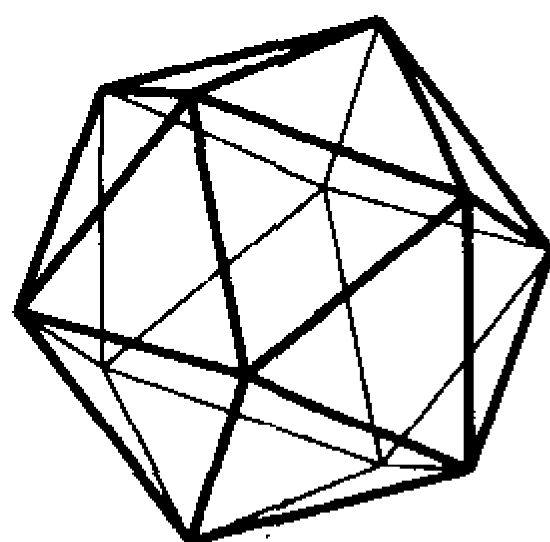
正方体



正八面体



正十二面体



正二十面体

从下表可以看出,正多面体都满足欧拉关系:

顶点数+面数=棱数+2.

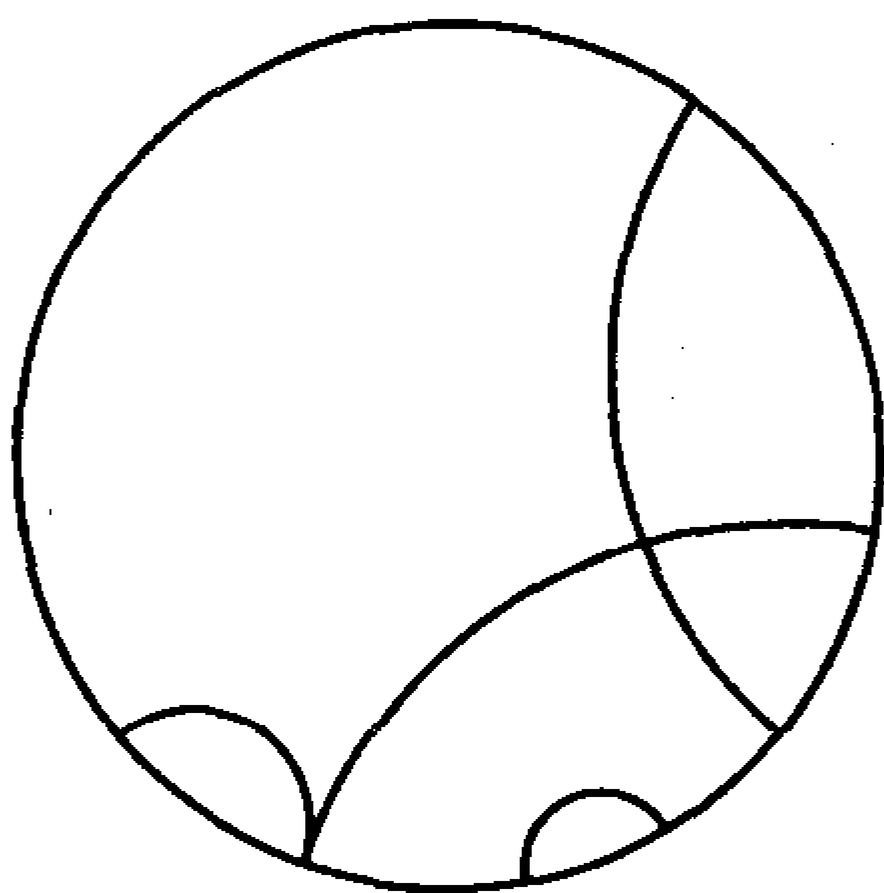
正多面体	顶点数	棱数	面数
正方体	4	6	4
正四面体	8	12	6
正八面体	6	12	8
正十二面体	20	30	12
正二十面体	12	30	20

Poincaré's model of hyperbolic geometry　庞加莱的双曲几何模型

庞加莱(Poincaré)发现,一个定圆的内部为双曲几何提供了一个模型.在这个模型中,双曲几何中的一条直线是在这个定圆的内部的一条圆弧，这条弧的两端垂直于定圆，包括定圆的直径.

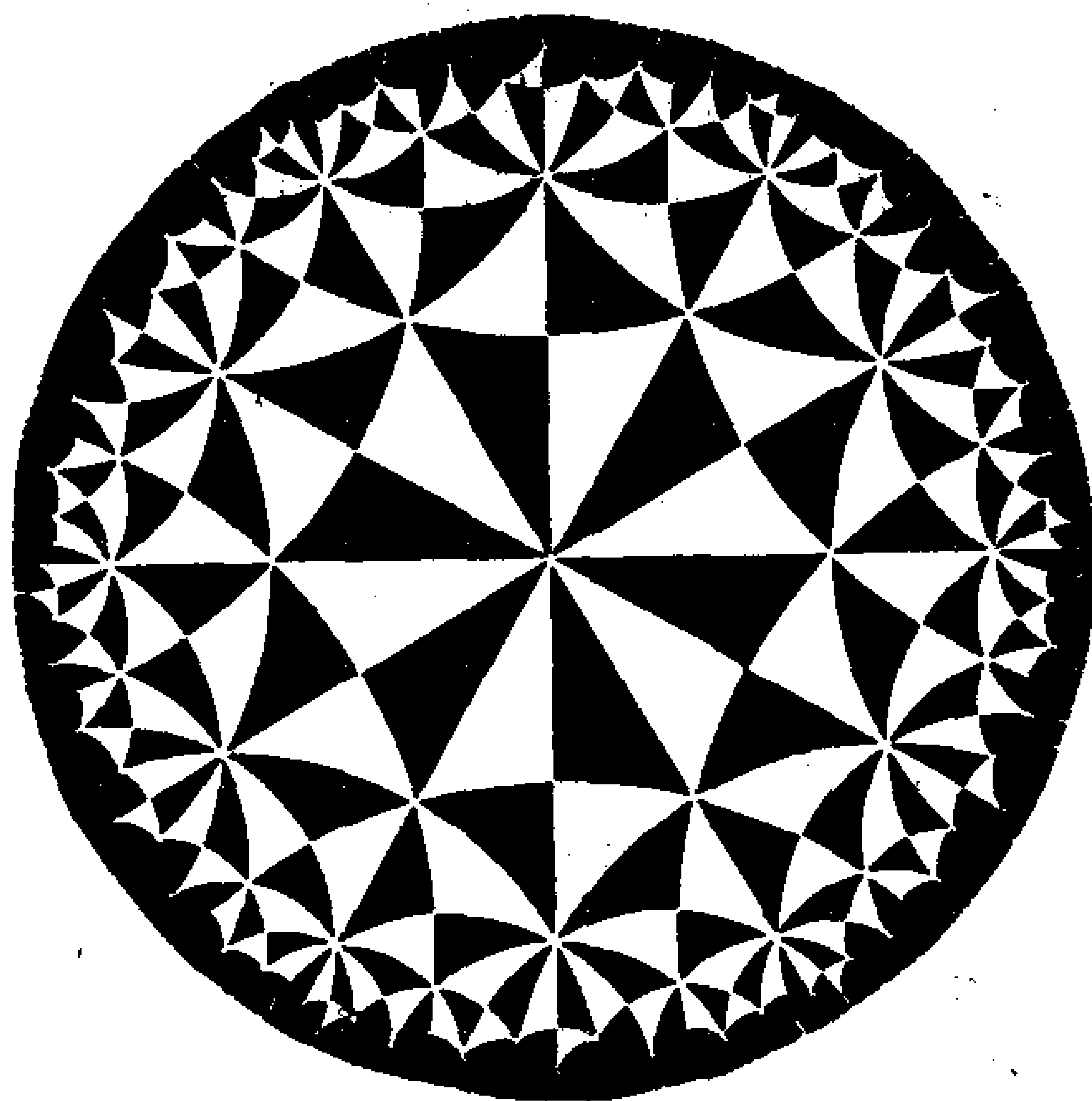
不相交的两条弧对应于两条平行的直线.如果它们相交在定圆上,那么它们就是一对有限的射线.庞加莱的模型是保角的,所以角可以直接从图上量出.在内部正交的弧对应于垂直的直线.

但是长度是变化的.越接近边界,相等的长度用越来越短的圆弧表示.如果达到边界,那么离圆心的距离就变得无穷远.



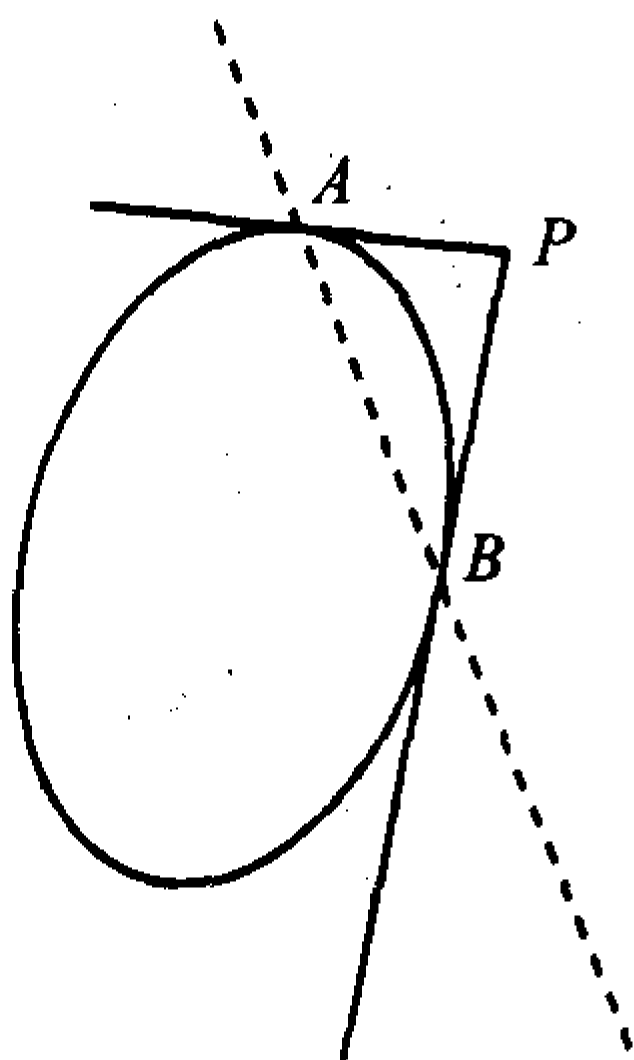
下图表示双曲平面分成无穷多个全等的三角形.换句话说，

所有这些三角形,包括接近于圆盘边缘的无穷多个更小的三角形在内,形状和大小都相同.



pole *and* polar　极和极线

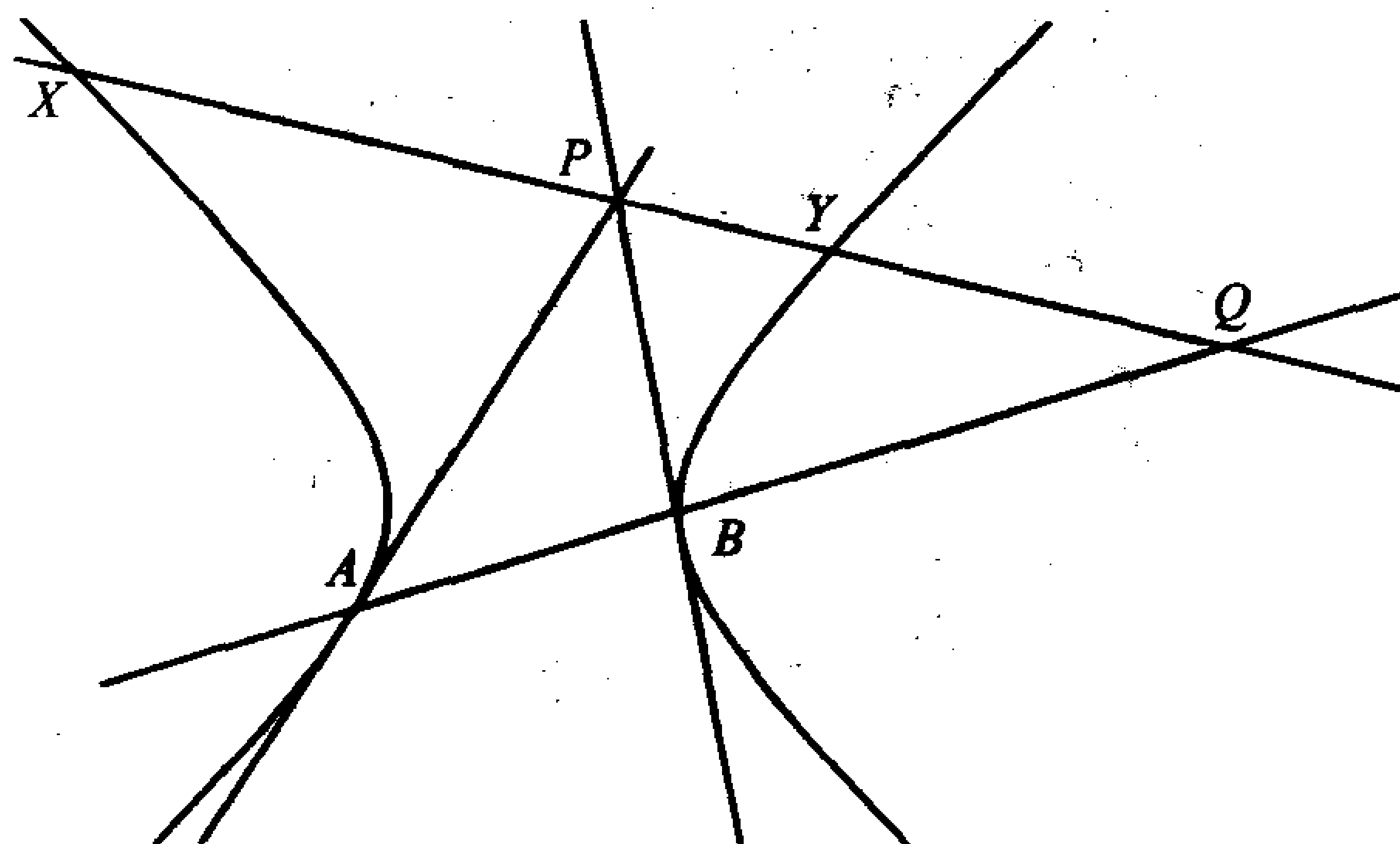
如果圆锥曲线的切于 A、B 的切线相交于 P 点,那么 P 点称为直线 AB 关于该圆锥曲线的极点,直线 AB 称为 P 点的极线.



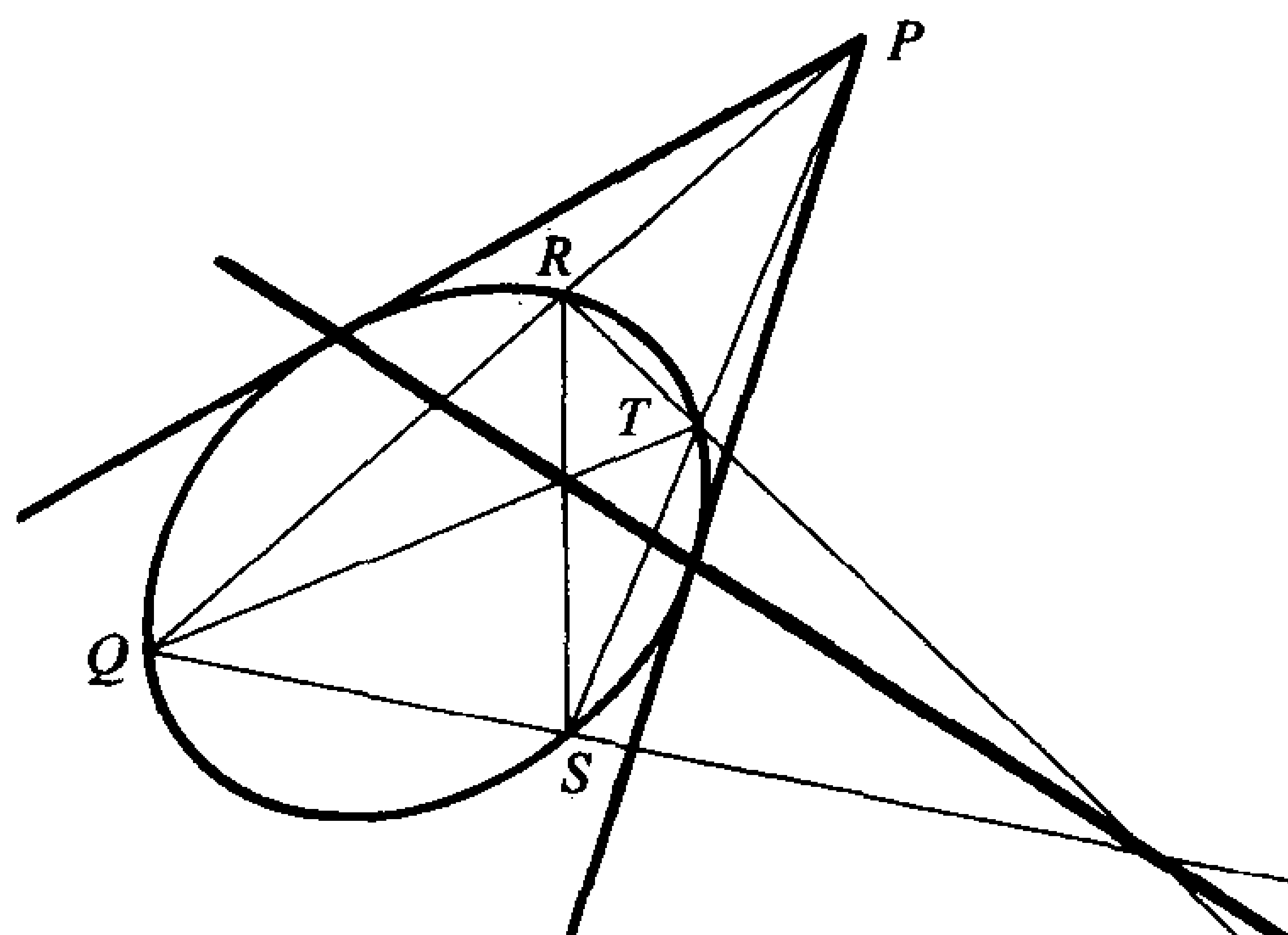
极和极线的思想是曲线上点和过该点的切线的思想的一般化.任何一点关于一般的代数曲线都有一条极线,每一条直线都

有一个极点. 如果点在这条曲线上，那么极线就是过该点的切线.

以下是极和极线的许多性质中的三个. 一条经过 P 点的直线交圆锥曲线于 X 和 Y 点，交极线 AB 于 Q 点. 于是 P 和 Q，X 和 Y 成调和共轭：也就是说，X 和 Y 内分和外分线段 PQ 的比相同. P 和 Q 内分和外分线段 XY 的比也相同.



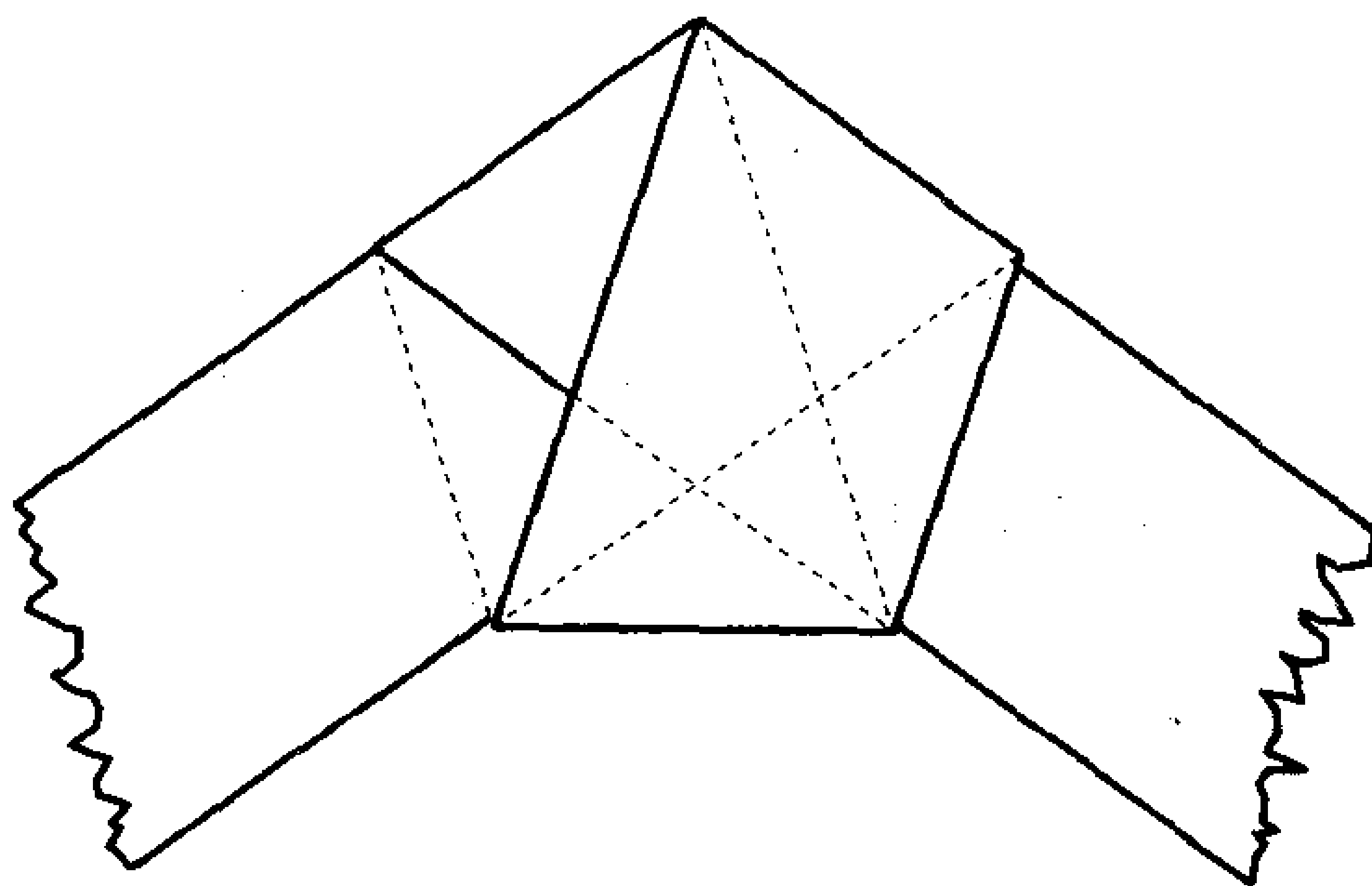
经过极点 P 的两条直线分别与圆锥曲线相交于 Q 和 R，S 和 T，那么直线 QT 和 SR 相交于极线，直线 QS 和 RT 也相交于极线.



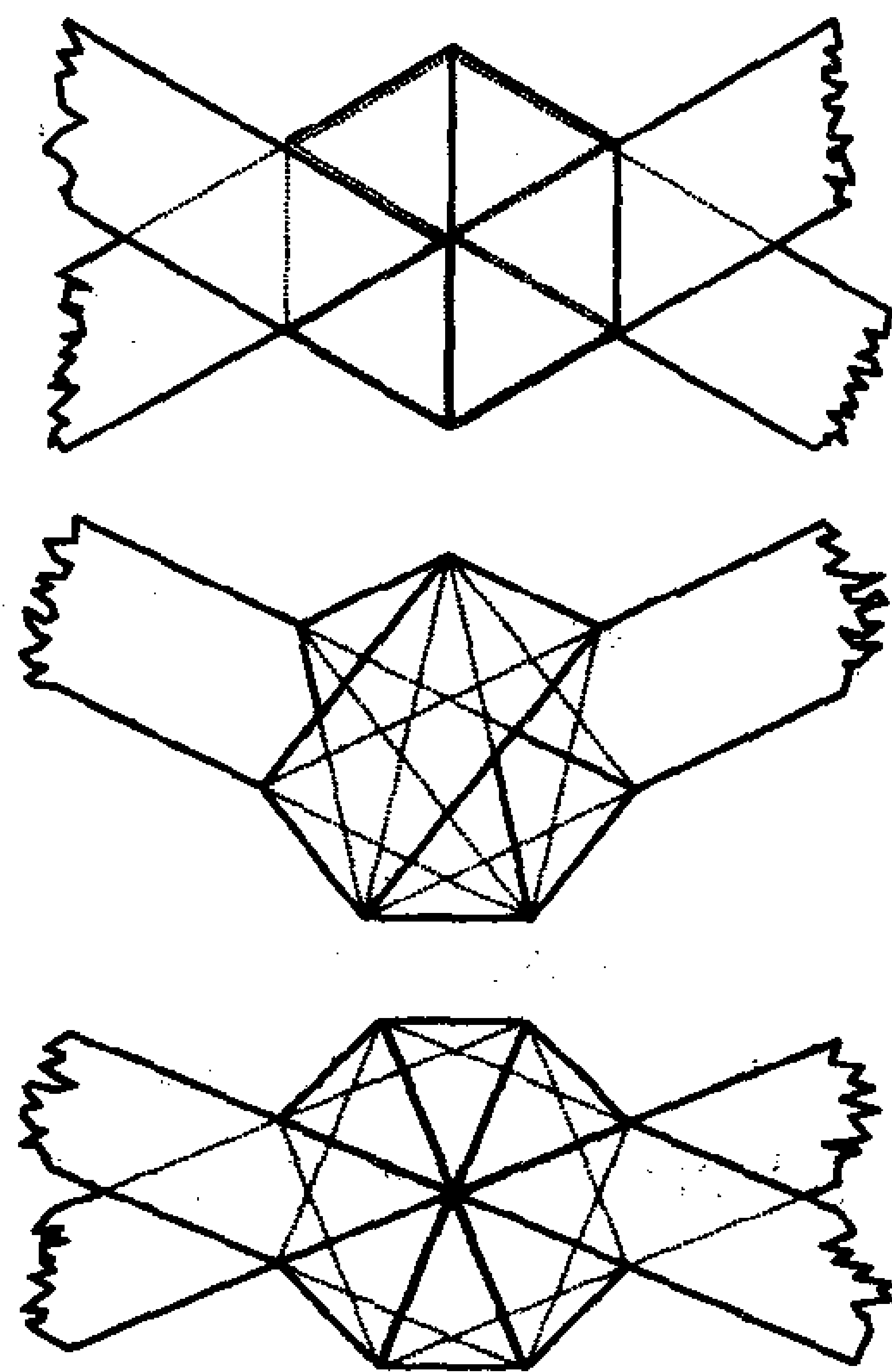
如果 X 的极线经过 Y，那么 Y 的极线也经过 X. 这就提供了作出圆锥曲线内部的点的极线的方法.

polygonal knots　多边形结

将一张纸条打一个普通的结，压平时小心地拉紧，就出现一个正五边形：



六边形、七边形和边数更多的多边形也能由打结形成，考虑到正多边形的对角线就能看出这一点：

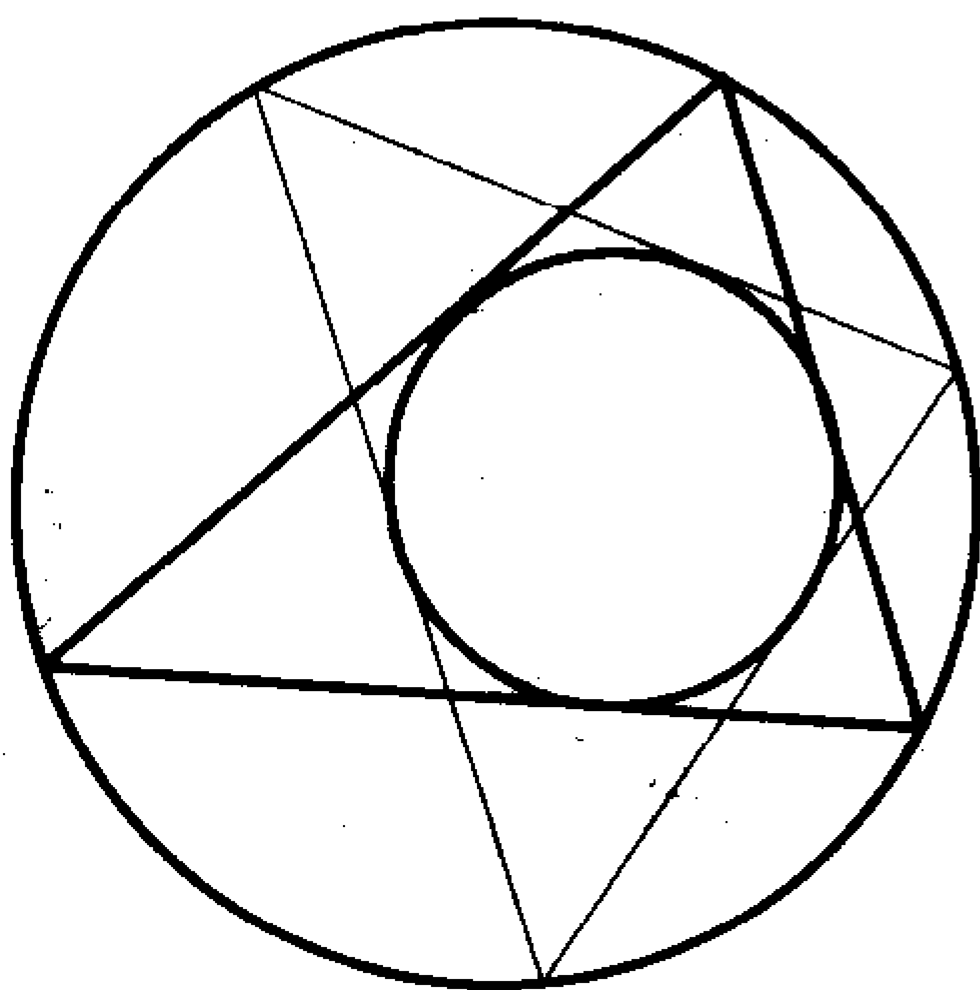


参考书：H. M. CUNDY and A. P. ROLLETT, *Mathematical Models*, Oxford Univesity Press, Oxford, 1961.

Poncelet's porism　彭色列封闭定理

给定两条圆锥曲线，例如两个圆(如下图)，如果能够画出一个三角形既内接于一个圆又外切于另一个圆，那么就能够画出无穷多个这样的三角形.

对于两个圆来说，这一条件是 $R^2-2Rr=d^2$ 成立，这里 R 和 r 分别是大小两圆的半径，d 是两圆圆心之间的距离. 这只是任何三角形的外接圆的半径和内切圆的半径与内外心之间的一个关系.(彭色列封闭定理表示，如果两个圆分别是一个三角形的外接圆和内切圆，那么有无穷多个其他的三角形，这两个圆也是它们的外接圆和内切圆.)

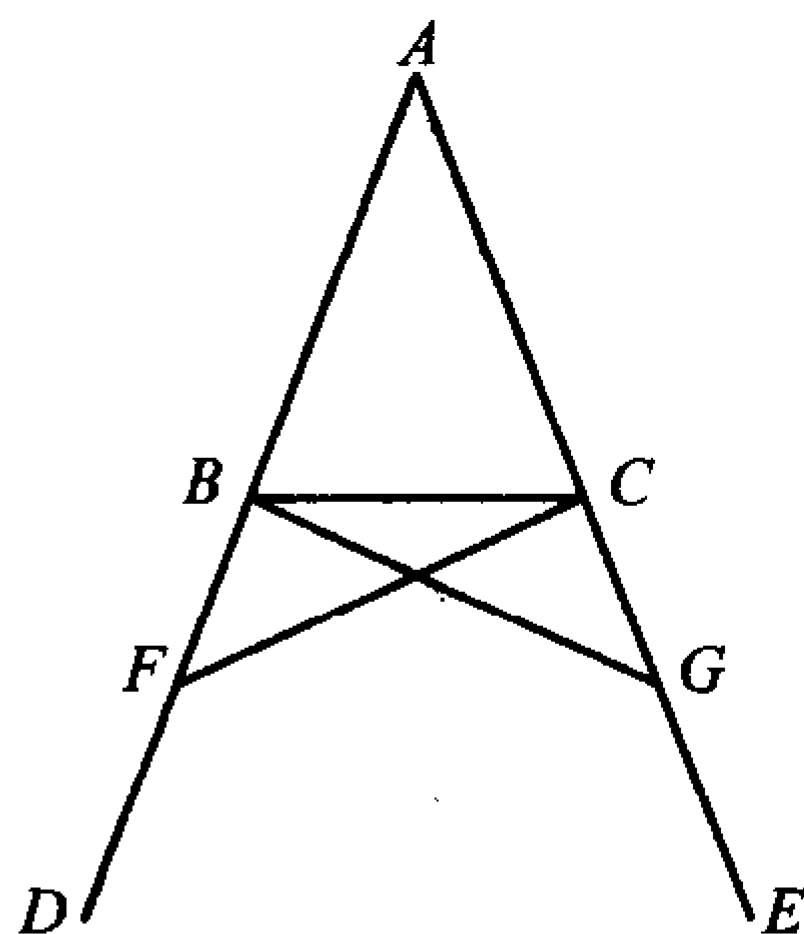


类似地，如果一个四边形(或者 n 边形)有一个内切圆和一个外接圆，那么就有无穷多个这样的四边形(或者 n 边形).

Pons asinorum　笨人难过的桥

等腰三角形的底角相等，如果延长两腰，那么底角的外角也相等. 下面就是欧几里得画的图，他所用的这两条直线是证明中的辅助线.

这就是《几何原本》第一卷的第五公设. 据说是泰勒斯(Thales)首先证明了它. 实际上帕普斯(Pappus)证明了这一结论，他取了一个三角形，并把它翻过来，然后放在自身上面. 这就是前一些

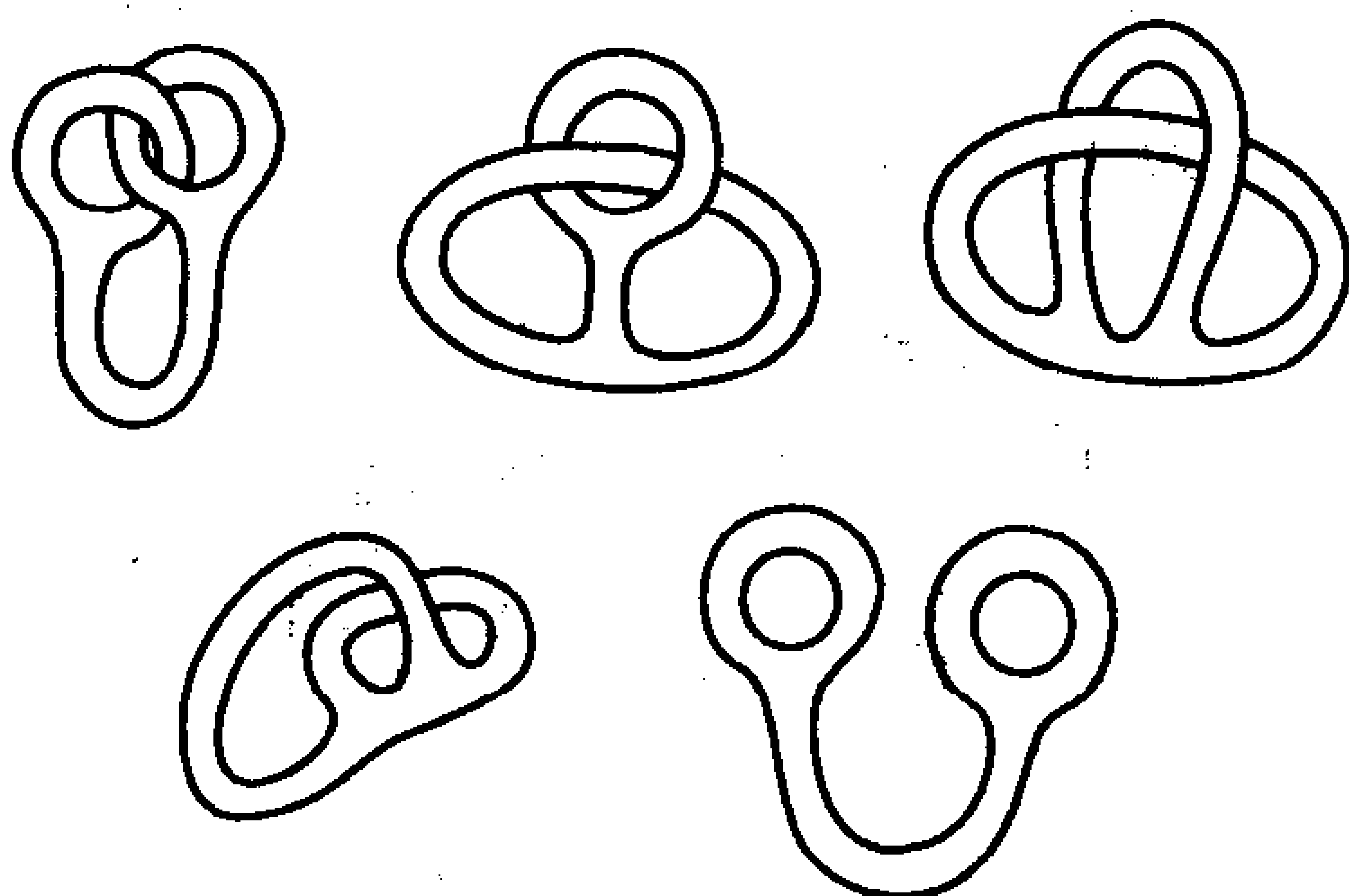


年重新发现的利用计算程序证明定理的方法.

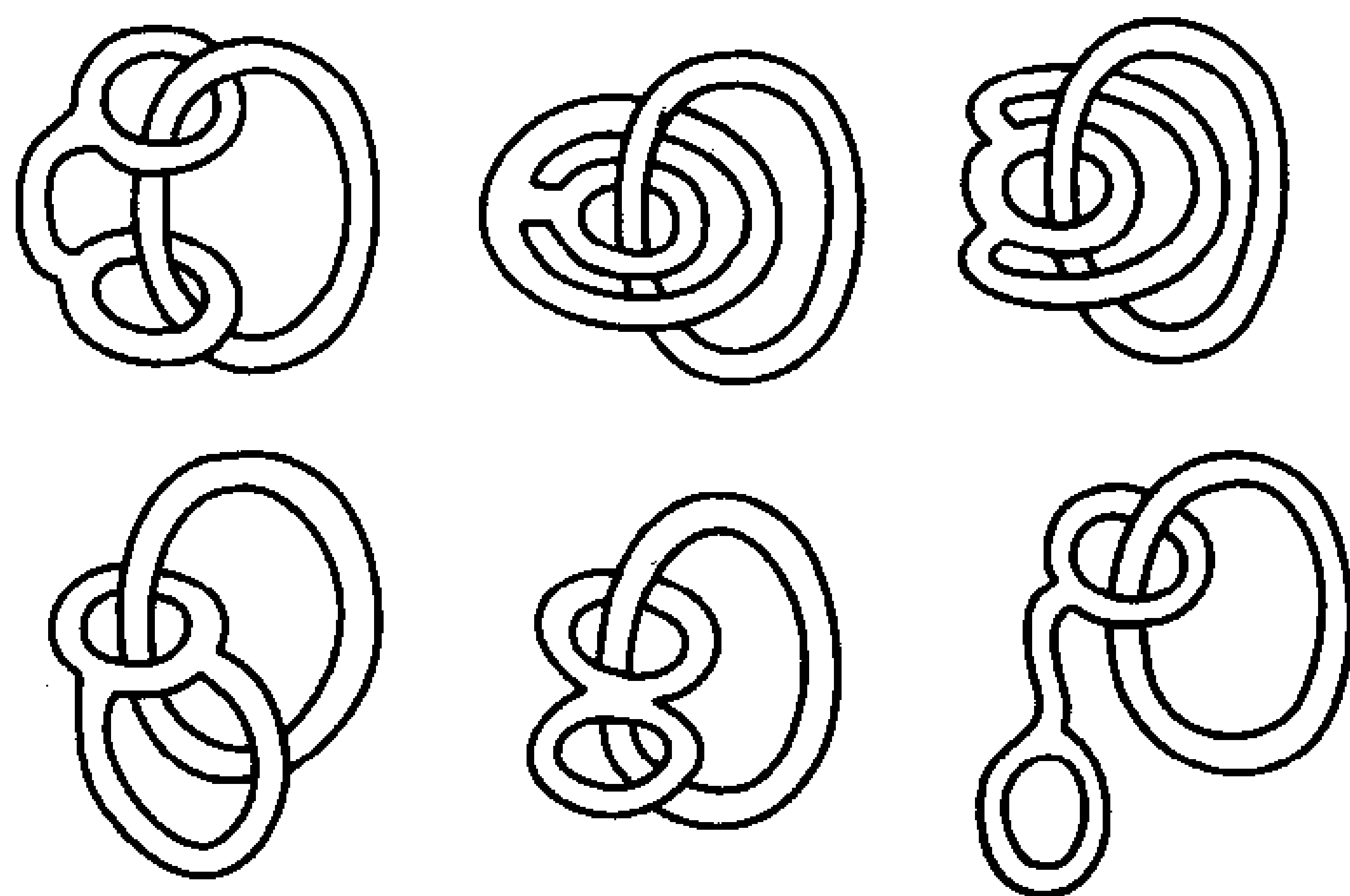
这一名字的意思是“傻瓜桥”,也许是涉及到类似于一座构架的桥,也涉及到这样一个事实,即在数学研究上无能为力,不能突破这一点.

pretzel transformations　麻花变换

假定下图中左上角的一个物体是由具有弹性极好的物质制成,可以被任意拉长和挤压而不会撕破或断裂.第一个物体通过这样的变换变成最后一个物体,如果不打破一个圈从另一个圈里拉出,似乎是不可能的,但并不要这样做,具体的过程如下图所示.



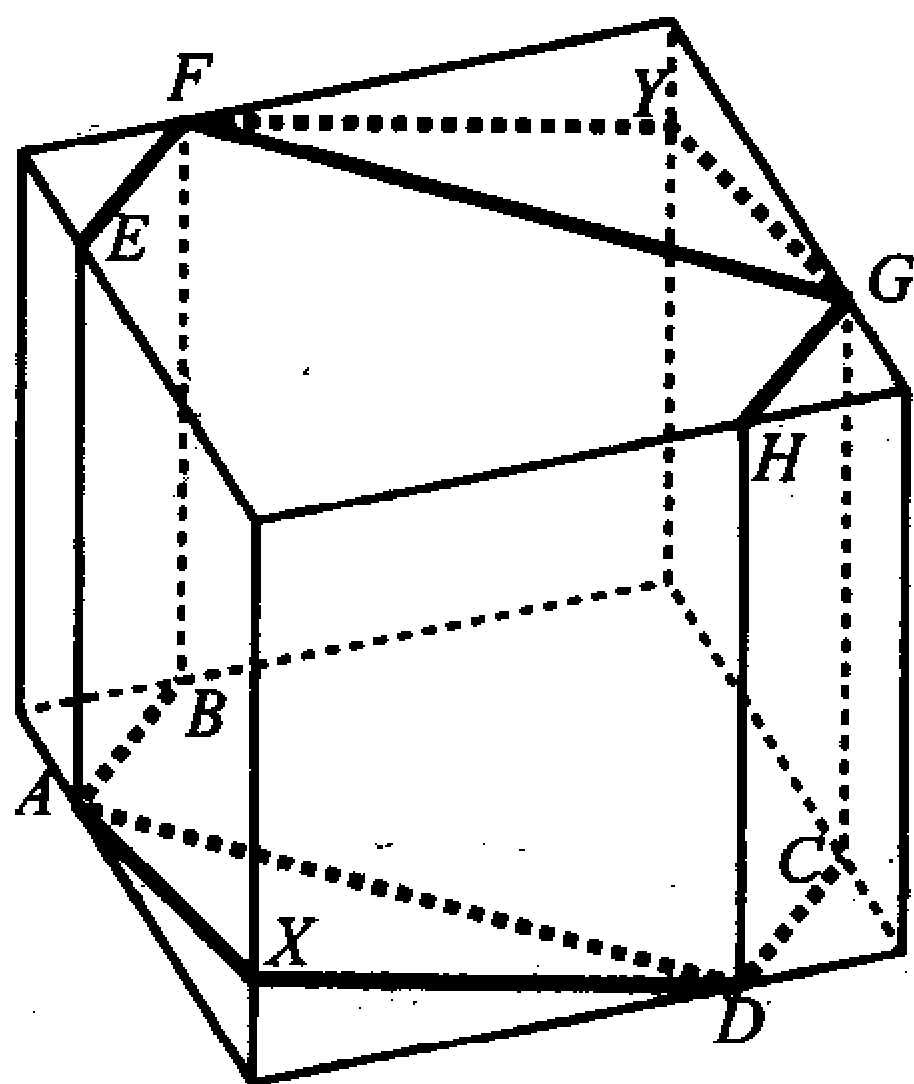
只要看一看上面神奇的变换,就容易接受下面的第二种变换了,在这一变换中左边的两个圈中有一个从大的圈中解脱出来.



Prince Rupert's cube　罗伯特王子的立方体

把一个正方体打一个截面是正方形的洞，这个正方形洞可以有多大？这一问题是以查理一世(Charles I)的侄子罗伯特王子命名的，他是英国内战时期的皇家部队的司令官．他曾当选为新成立的皇家学会的成员；他发明了一种称为王子金属的合金，并研究了快速冷却的状态下玻璃滴珠的性质．他去世时是一位温莎堡的行政长官，在那里他曾拥有自己的铸造工场和实验室．

上述问题与能够穿过一个立方体的最大立方体的这一问题是同样的．奇怪的是这一问题的解要比原正方体大，尽管只大了一点点．如果原正方体的棱长是1，那么能穿过的最大正方体的棱长是$\frac{3}{4}\sqrt{2}$，约为1.060660．



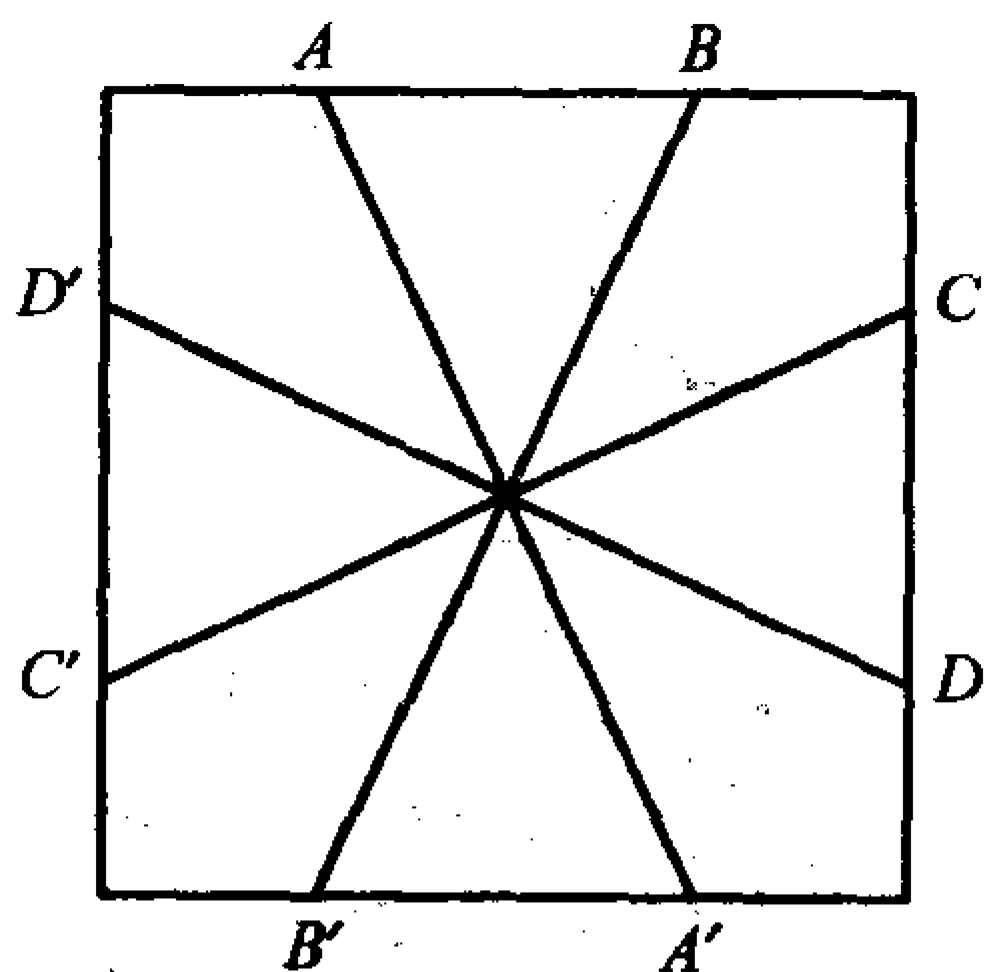
上图中的洞在正方体的上底面的截线为 $EFGH$，在下底面上的截线为 $ABCD$，在另两条竖直的棱截得 X 和 Y，图中用粗线表示.

projective plane　射影平面

在射影几何中，直线包括一个"无穷远点"，直线的两端相交于这一点. 换句话说，可把直线看作为一条封闭曲线，它出现后消失在所画的平面的两个相反的方向，因为只能画有限的部分. 此外，所有的平行直线具有同一个无穷远点.

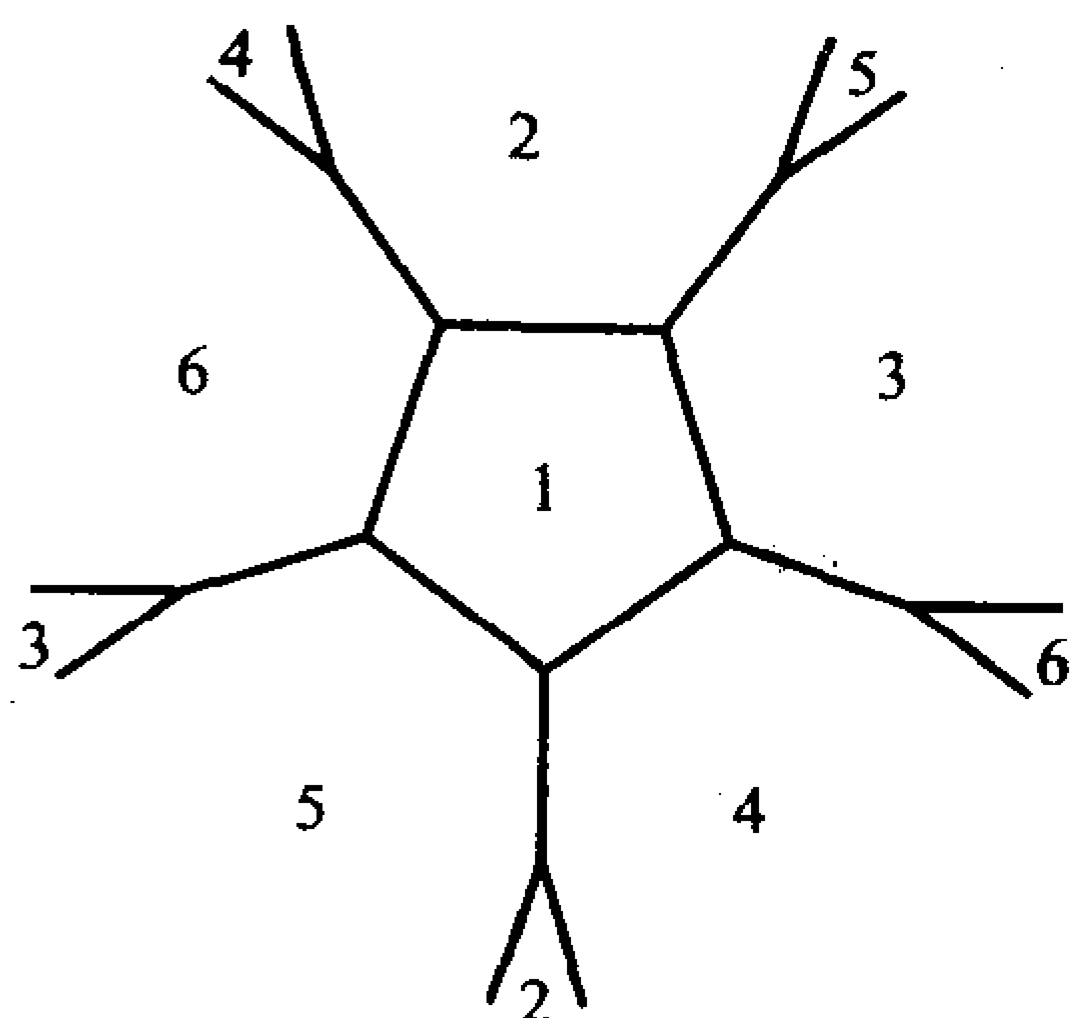
这一思想的一个推论是一条延伸到无穷远的直线把欧氏几何的平面分成两部分，但不分割射影平面，它仍然是一块.

射影平面可以用一个区域表示，在这个区域中相对的边界点是同样的. 例如用下面的正方形表示射影平面，图中的点 A 和 A' 是同一点，同样 B 和 B'，C 和 C'，D 和 D' 等等也都是同一点.

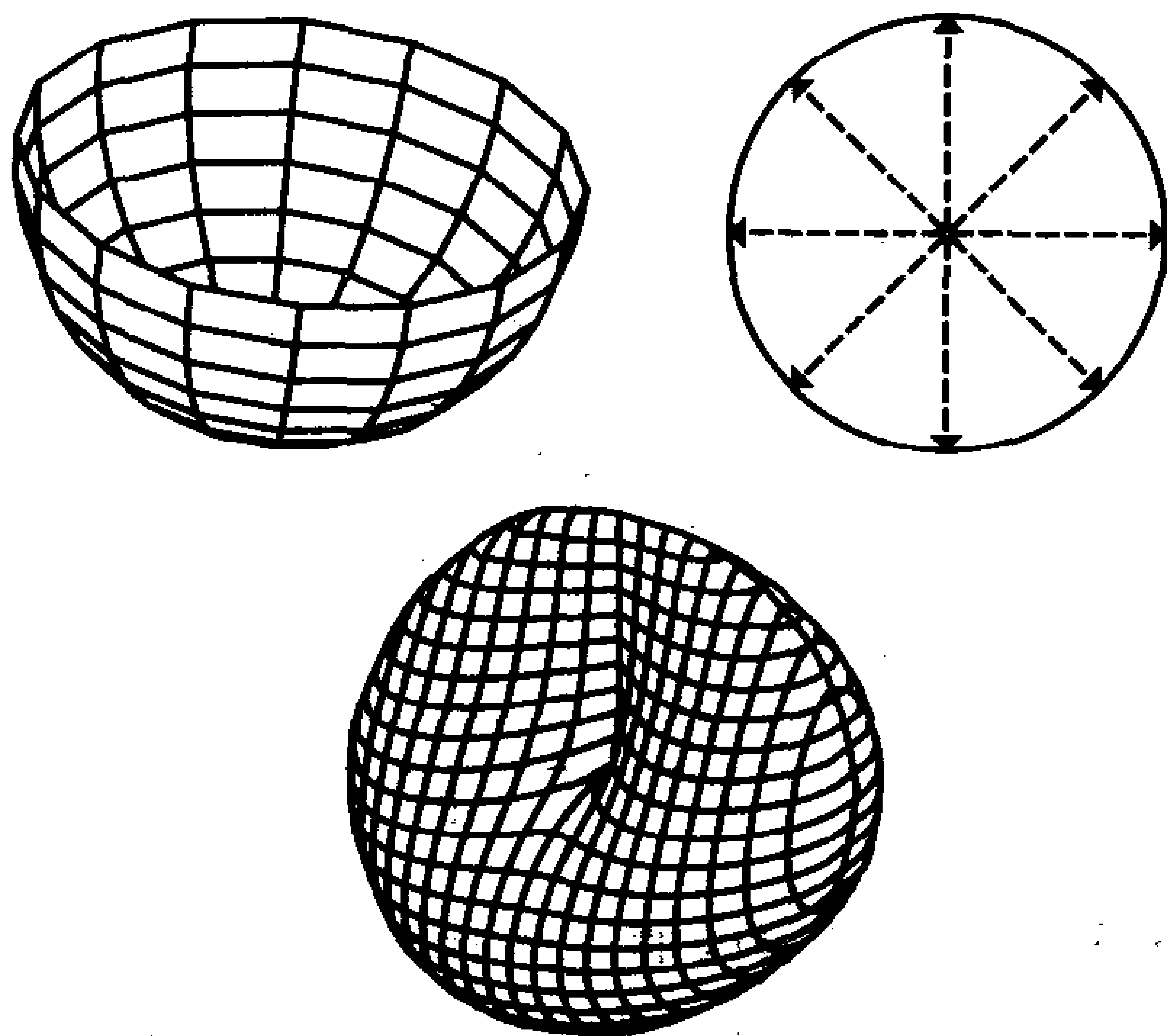


下图表示在射影平面内的一张地图，如果任何两个具有共同边界的区域涂不同的颜色，那么可以需要六种颜色之多. 六个区域中的每一个都和其他五个区域相邻.

把上面的正方形的两组对边转半圈后连接可以作出一个作为封闭曲面的射影平面的模型.（对照一下只有一组对边转一圈



的莫比乌斯带.）首先把这个正方形伸展成一个半球面，然后连接各直径的相对的两个端点. 在下面的第二个图中相应于连接正方形的点 A 和 A' 等等. 在三维空间中不生成自交的曲面，要做到这一点是不可能的. 其结果看上去就像一个上面有一个"折叠帽"的下半个球面.



这是一个单侧曲面，对于这个曲面，欧拉关系变为

$$顶点数+面数=棱数+1.$$

可以对上面的地图验证这一点. 图中有 6 个区域(或面)，10

个顶点和 15 条棱，满足这一公式.

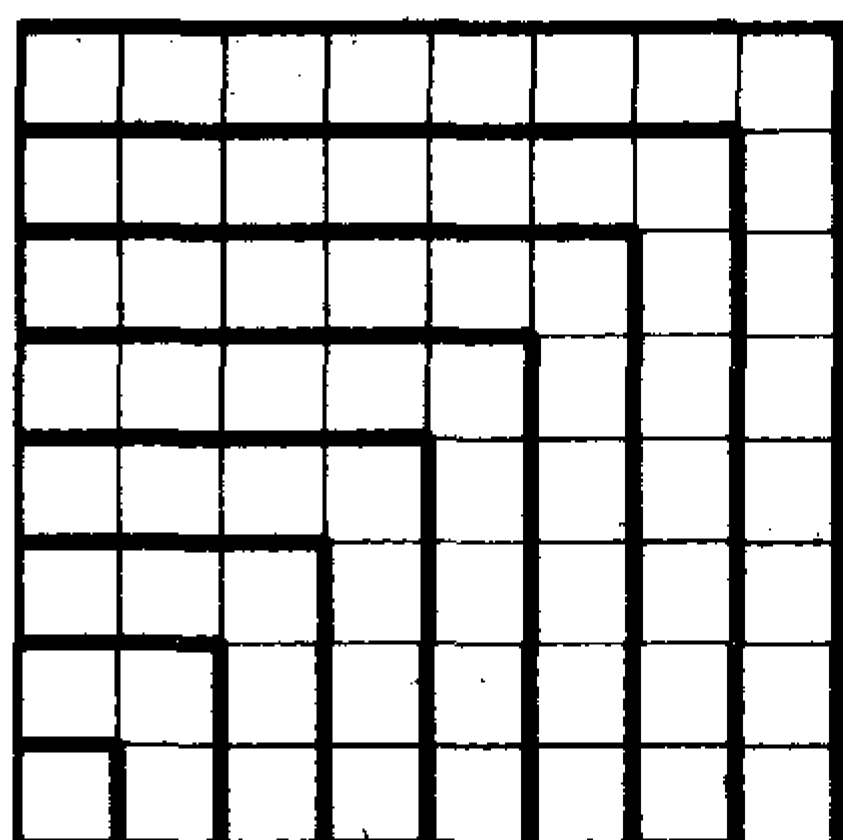
还有一个同样形式的代数曲面.它的方程是

$$(px^2+qy^2)(x^2+y^2+z^2)=2z(px^2+qy^2),$$

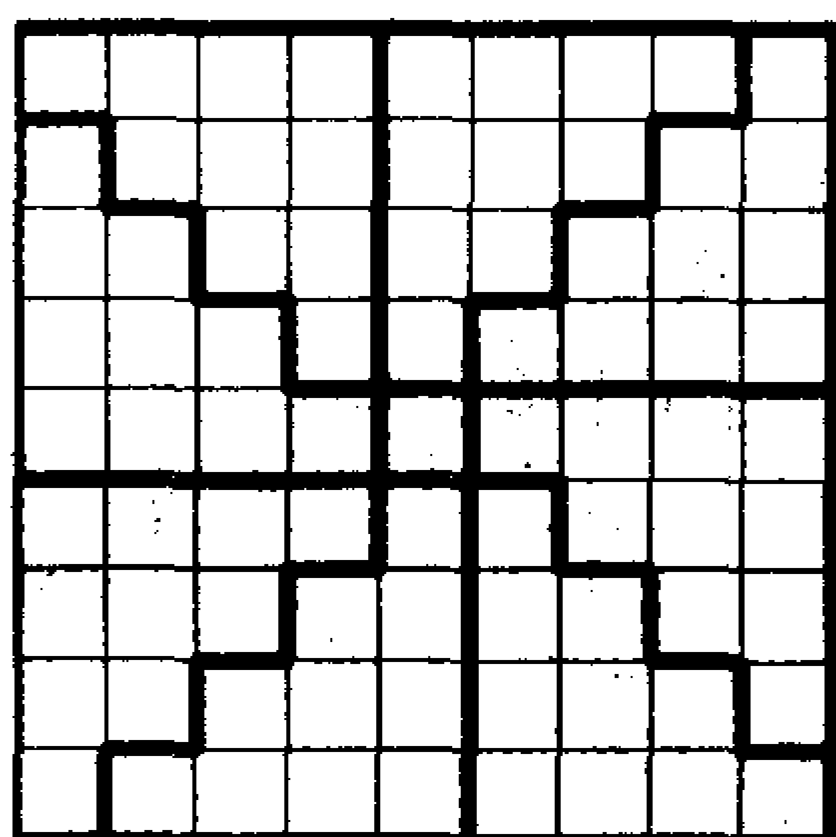
这里 p 和 q 是适当的常数.

proof by looking　直观证明

许多简单的数学事实可以配上一个适当的图用观察证明.



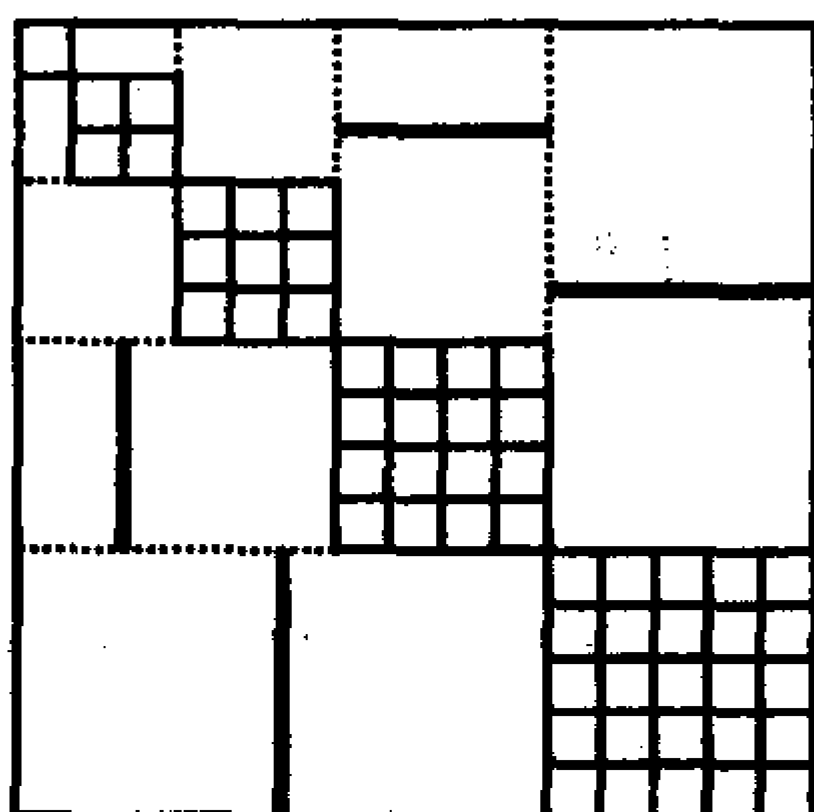
前 n 个奇数的和是 n^2.每一个奇数都可用一些正方形组成的 L 形表示.



如果第 n 个三角形数是 T_n(数列 1，3，6，10，15，21，28，36，…中的第 n 个数)，那么 $8T_n+1=(2n+1)$.每一个三角形数都可用阶梯状的数表示，因为第 n 个三角形数是 $1+2+3+4+\cdots+n$.

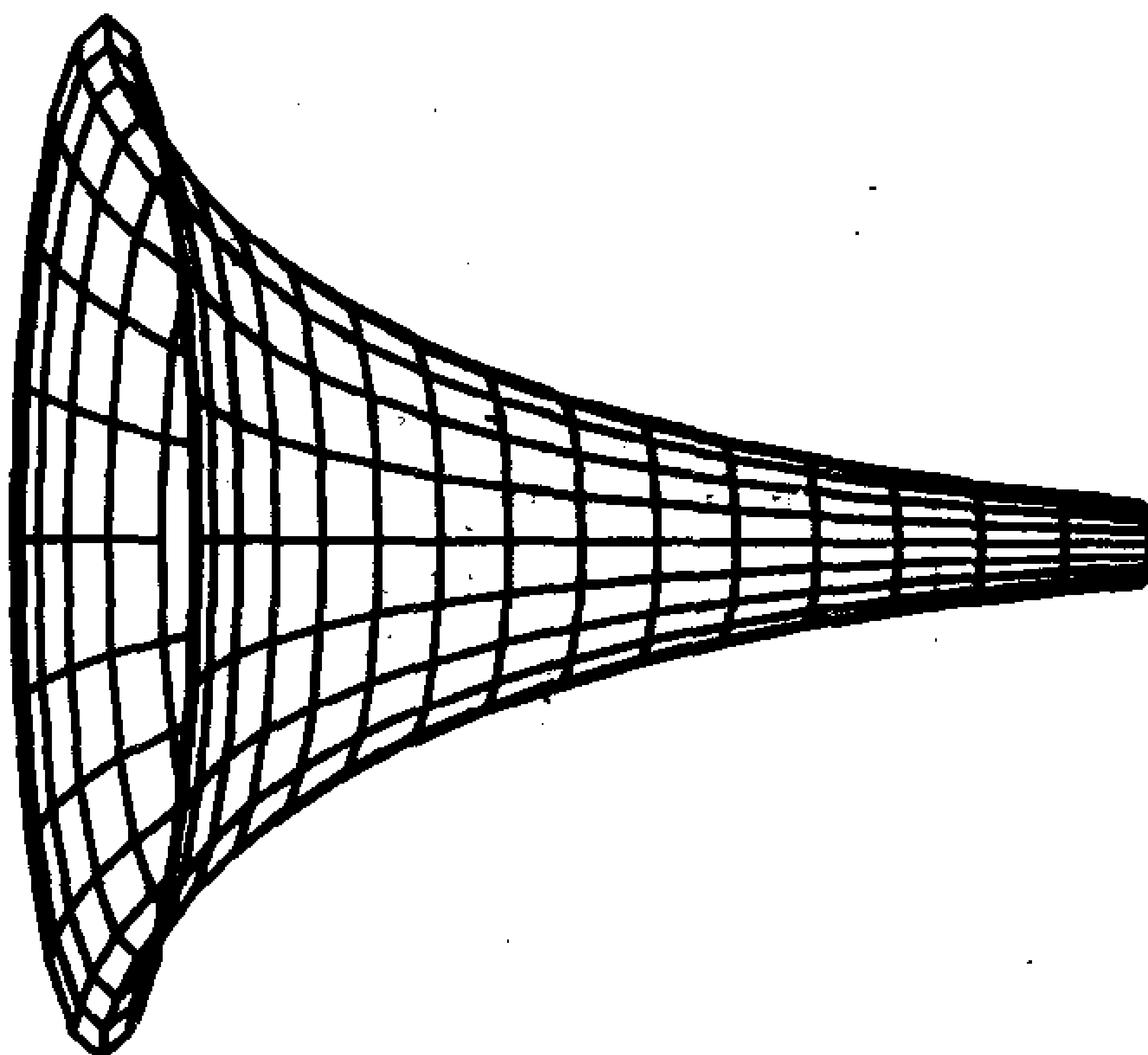
下面的图表示两个 2×2 的正方形，三个 3×3 的正方形，等等，整齐地平铺在一个平面上，得到整数的立方和

$$1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+\cdots+n^3=(1+2+3+4+5+\cdots+n)^2.$$



pseudosphere　伪球面

意大利几何学家欧琴尼奥·贝特拉米(Eugenio Beltrami)在 1868 年认识到称为伪球面的曲面，这一曲面提供了仅是双曲型非欧空间中的部分模型.(作为整个双曲空间的模型的任何曲面都有奇点.)

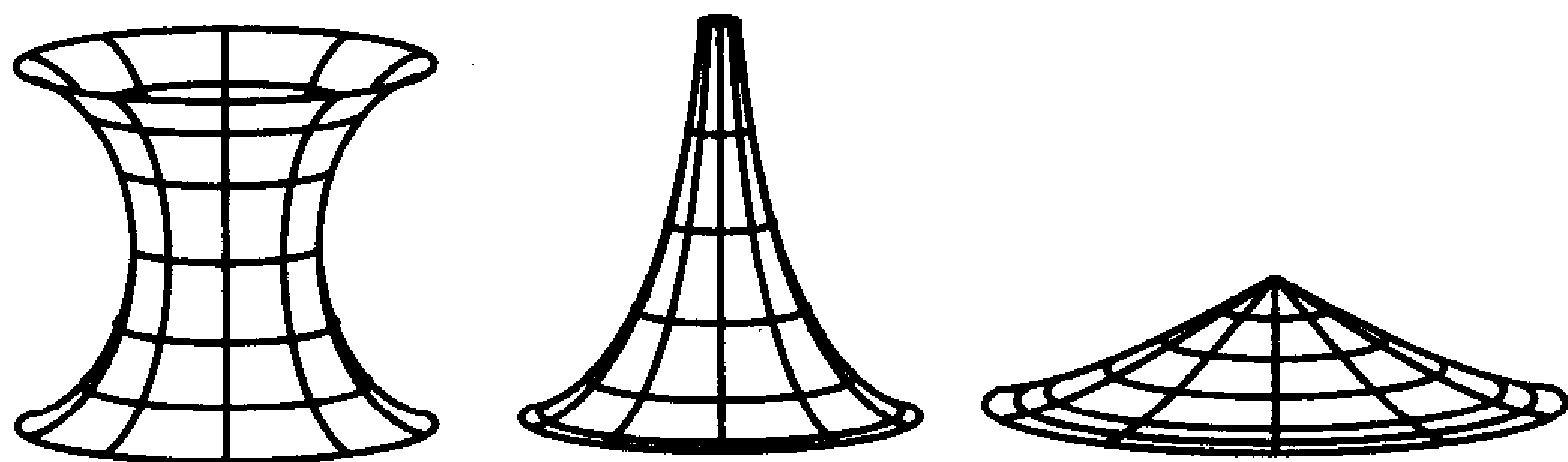


伪球面由一条曳物线绕其轴旋转一周而成. 双曲空间中的直线就相当于伪球面中的一条最短线. 两点之间的距离就是沿

最短线量出的距离.

角度和长度分别相等的全等图形在伪球面上移动后可以重叠.从我们的这一观点来看,图形出现弯曲,但并不是扭曲.

伪球面是一个曲率为负的常数的曲面.任何其他这样的曲面都可作为双曲几何的模型.左下图表示的曲面的曲率是负的常数,其上下截面都是圆.中间一个是伪球面,它可以向上无限延伸,右面是一个曲面,其下截面是一个圆,上面是一点.

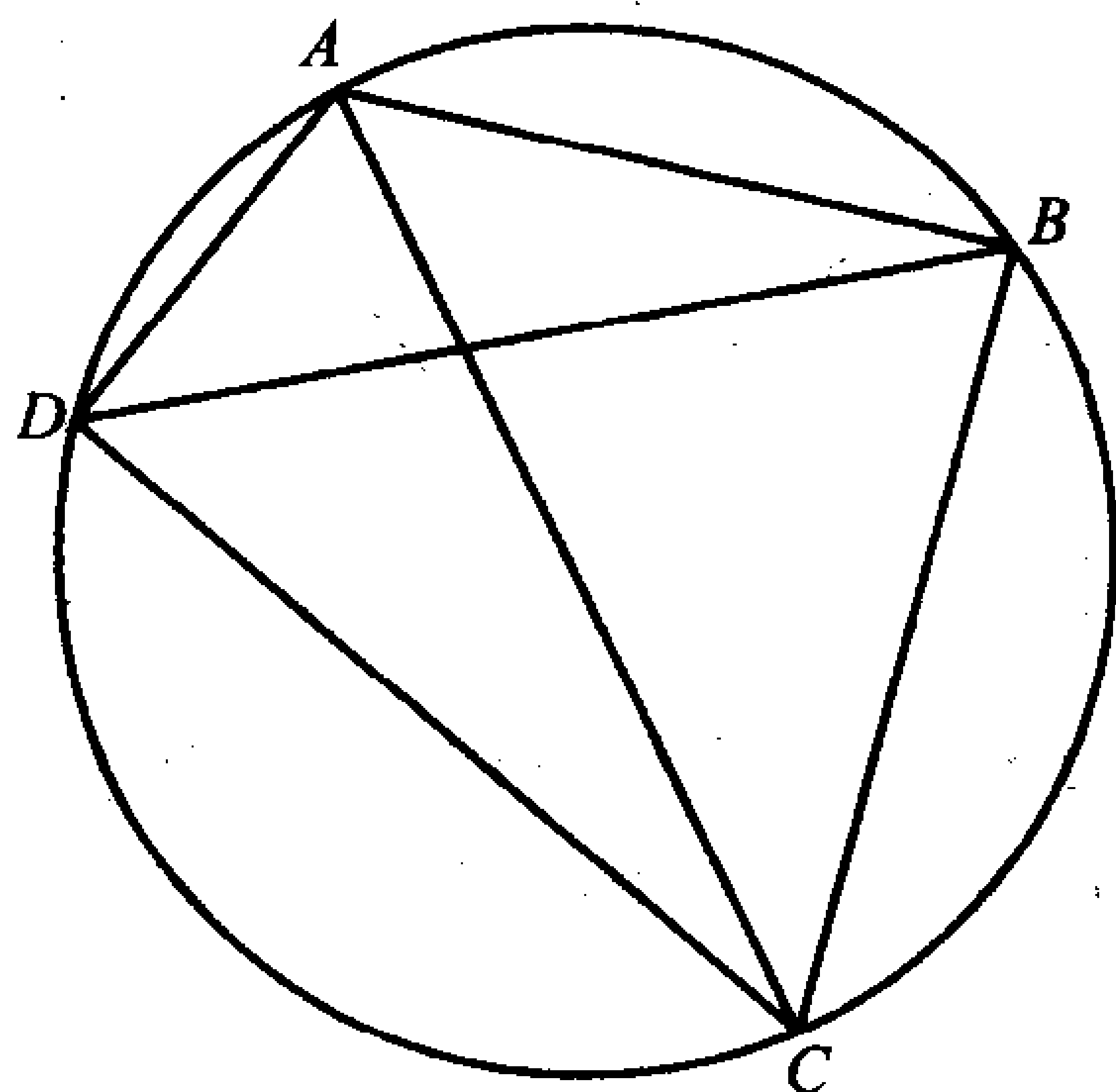


曲率为负常数的曲面的三角与曲率为正常数的曲面即球面三角之间存在着一个简单但是明显的关系:球面三角中的公式中的角保持不变,把边长乘以-1的平方根i.

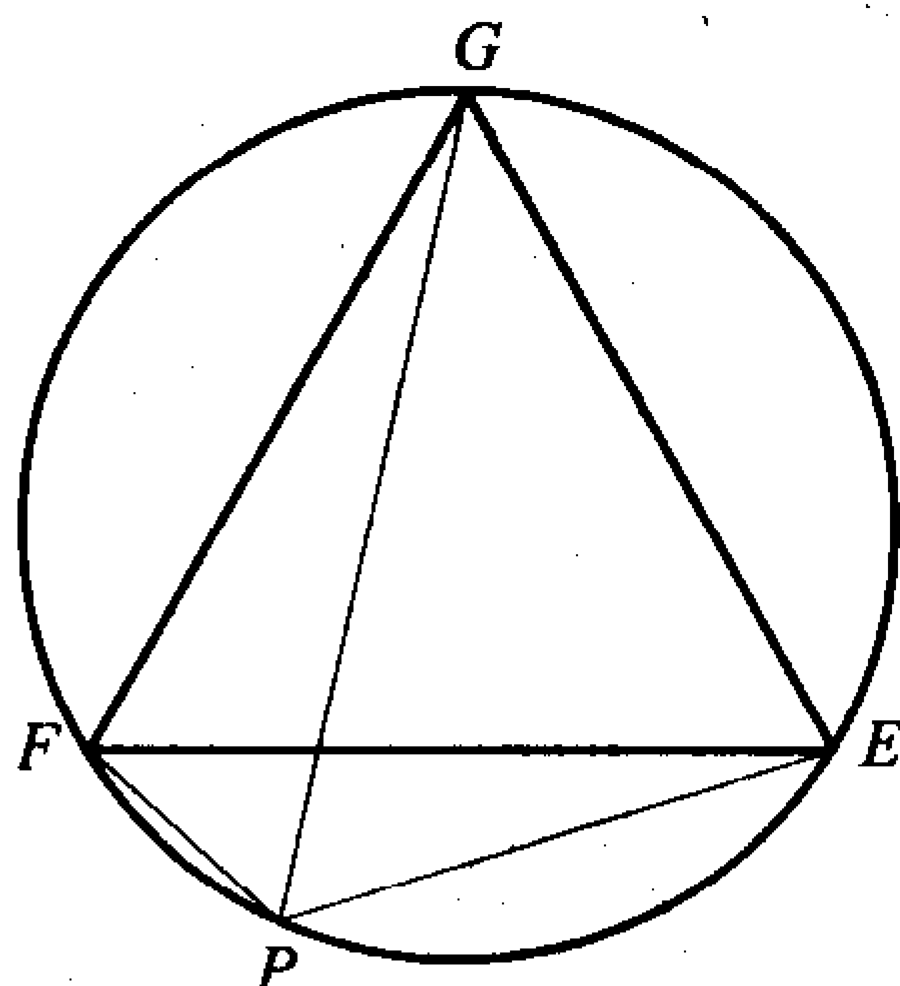
Ptolemy's theorem　托勒密定理

如果 $ABCD$ 是圆内接四边形,那么

$$AB\times CD+BC\times AD=AC\times BD.$$

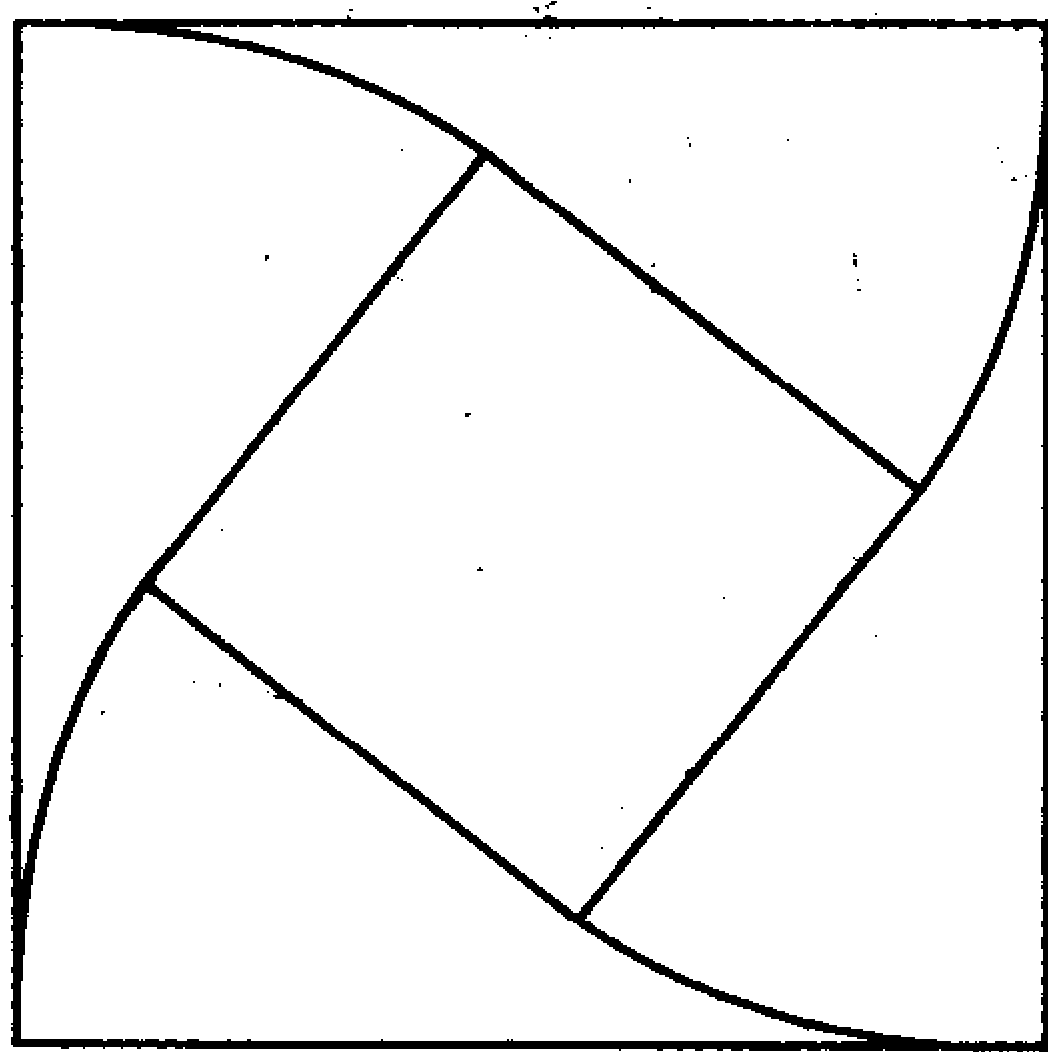


当三个顶点组成一个等边三角形 EFG 时，就出现一种特殊情况(常用来求费尔马点和斯坦纳树). 如果 P 是弧 EF 上任意一点，那么 $PG=PE+PF$.



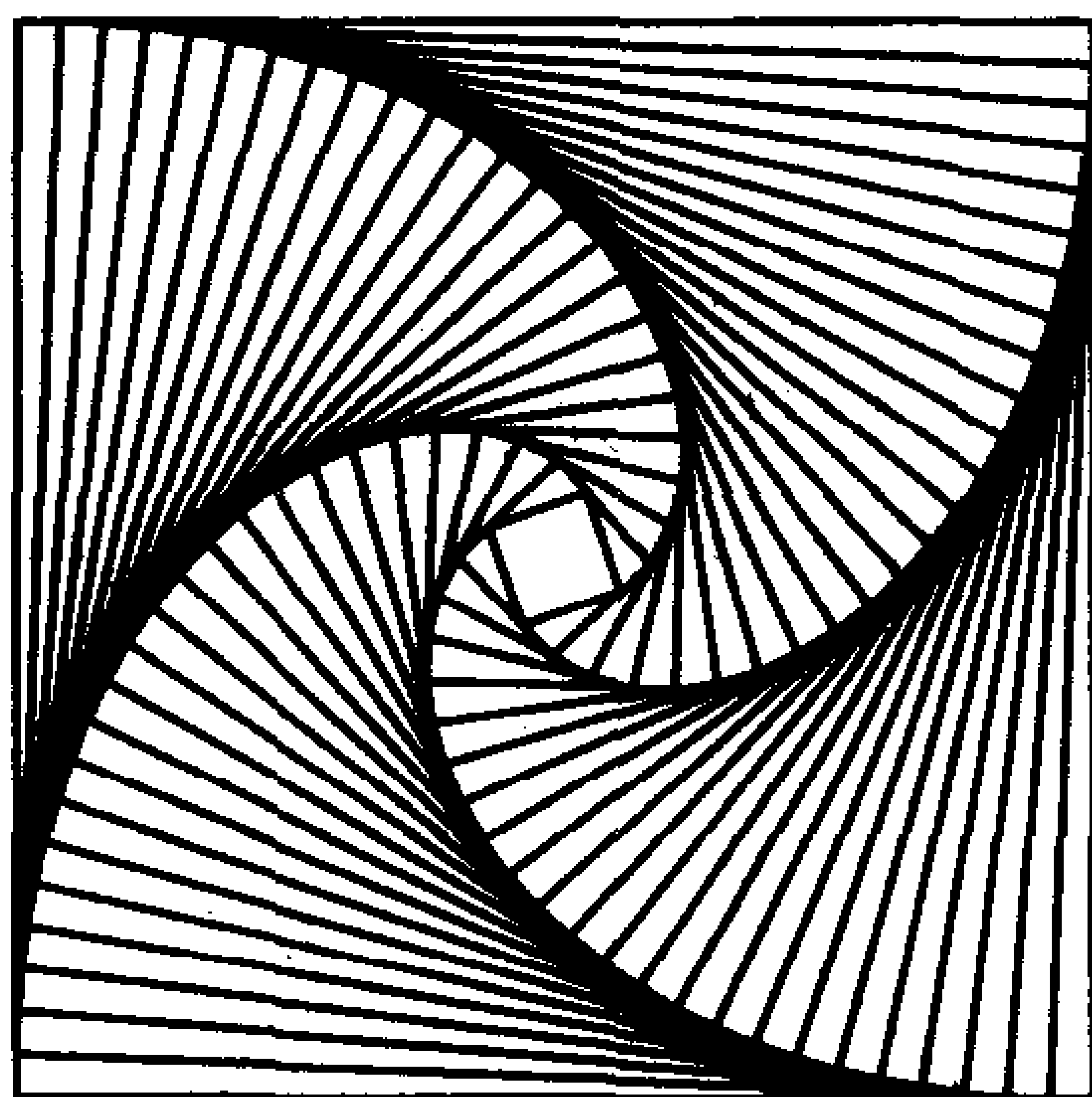
pursuit curves　追逐曲线

设想有四条狗从正方形的四个角上出发，互相追逐另一条狗的尾巴. 每一条狗的路径将是一条等角螺线. 如果适当数量的狗从任何正多边形的每一个顶点出发，那么结论同样成立.

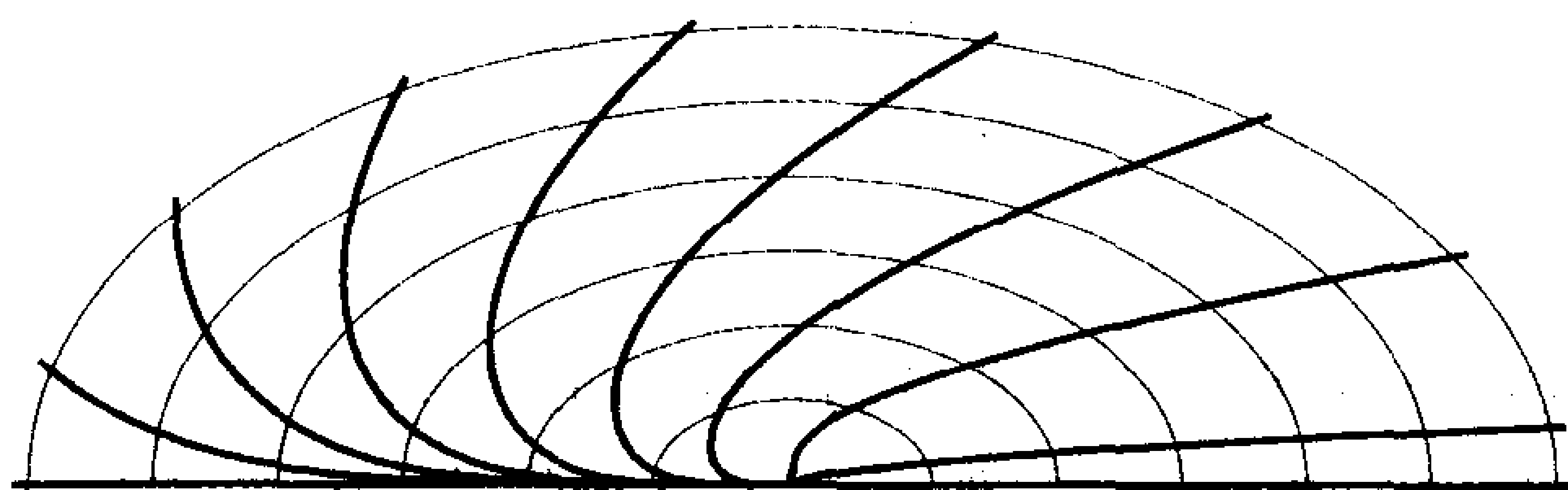


画每一个多边形的边就得到在 1960 年数学光效应艺术绘画作品中很著名的图形(如下图)，因为它给人以一种强烈的深度感.





考虑以匀速直线运动的目标点 T 和随时都指向 T 的动点 P. 如果 P 点从最外面的椭圆上的任何一点出发，点 T 从外面的椭圆的焦点出发，那么点 P 总是在同一点，即椭圆的中心处俘获 T.



具有共同中心的各椭圆的形状取决于 P 和 T 的相对速度，它们是同步的，追逐曲线是等倾斜的弹道.

Pythagoras' theorem　毕达哥拉斯定理

在直角三角形中，斜边的平方等于另外两边的平方和.

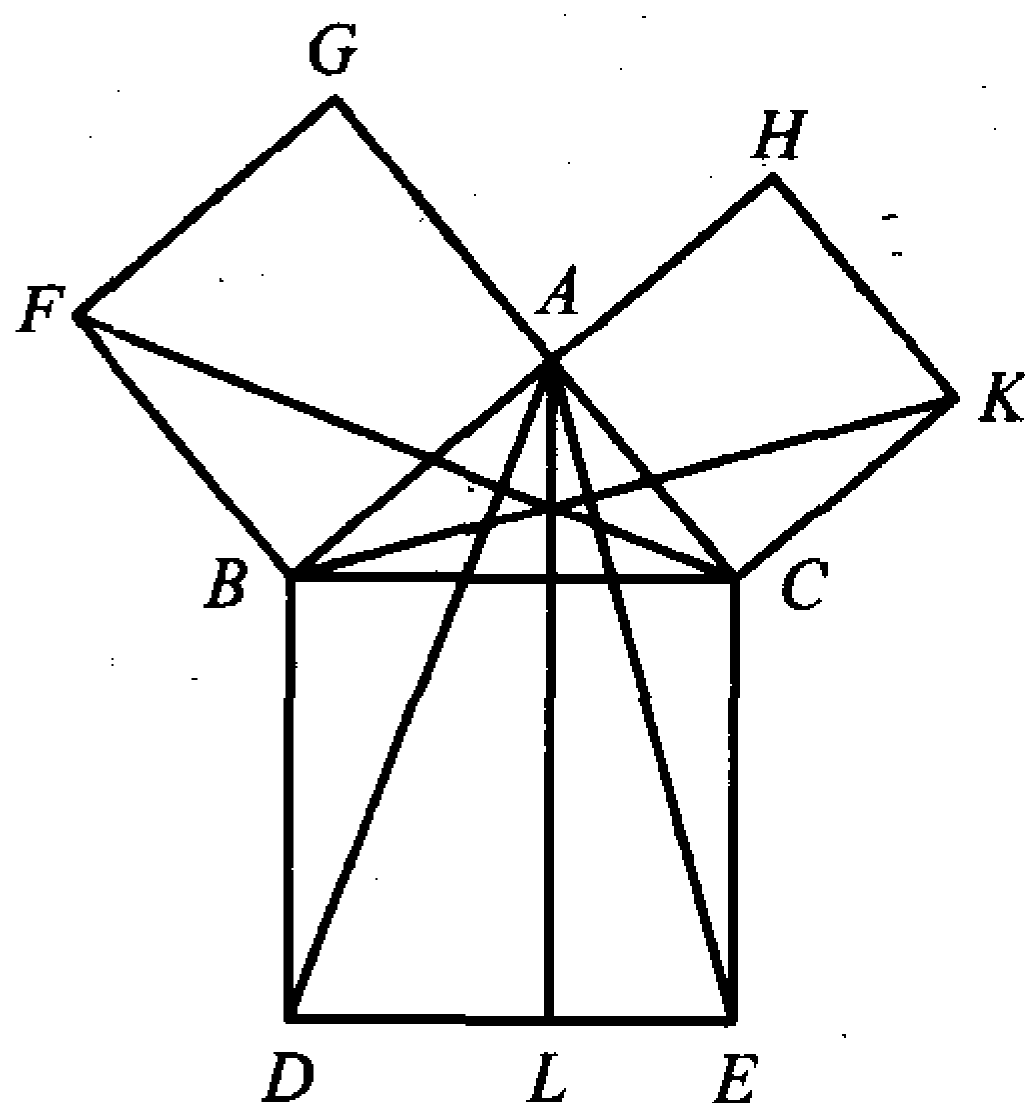
（In a right-angled triangle, the square on the hypotenuse is equal to the sum of the squares on the other two sides.）

它是所有几何定理中最有名的，也是仅有的有着广泛流传的笑话这一特色的定理，笑话的行文是：

"the squaw on the hippopotamus is equal to the sum of the squaws on the other two hides."

（在河马背上的印第安妇女等于另外两张兽皮上的印第安妇女的和.）

这一定理是欧几里得的《几何原本》第一卷中的命题 47，但在欧几里得的证明中，推导的方法决不是最简单的或者说是最容易的. 这一定理曾被称为新娘定理，定理中的图有时被称为新娘的座椅：



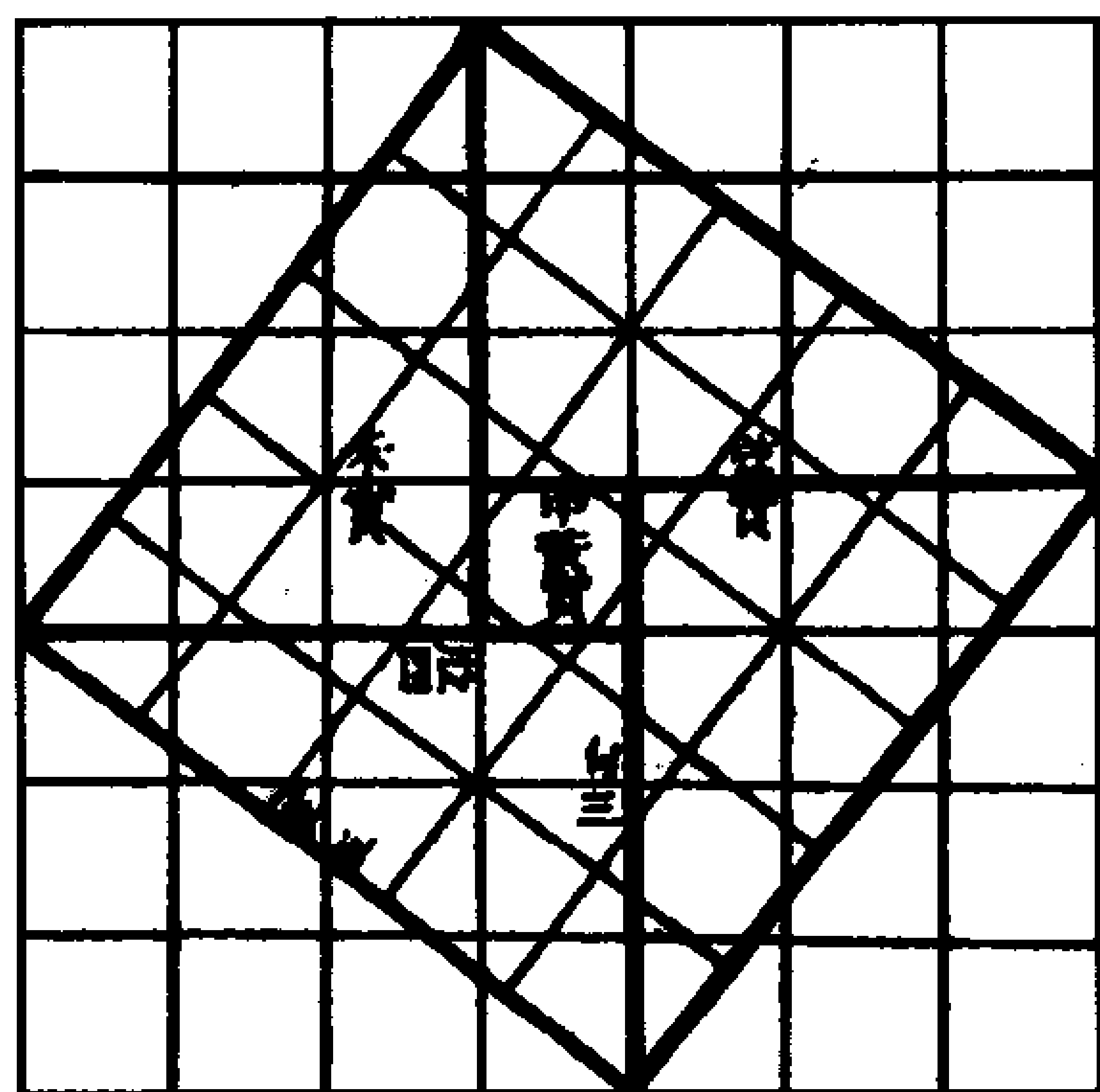
欧几里得证明三角形 ABD 和 FBC 全等，三角形 KCB 和 ACE 也全等. 再往前看，他证明了对角线为 BL 的矩形的面积等于正方形 $BAGF$ 的面积，类似地，对角线为 CL 的矩形的面积等于正方形 $CAHK$ 的面积.

欧几里得的图还有他无须用的另外一些性质. 例如，AE 和 BK 互相垂直，CF 和 AD 互相垂直，以及海伦证明过的 AL，CF 和 BK 共点.

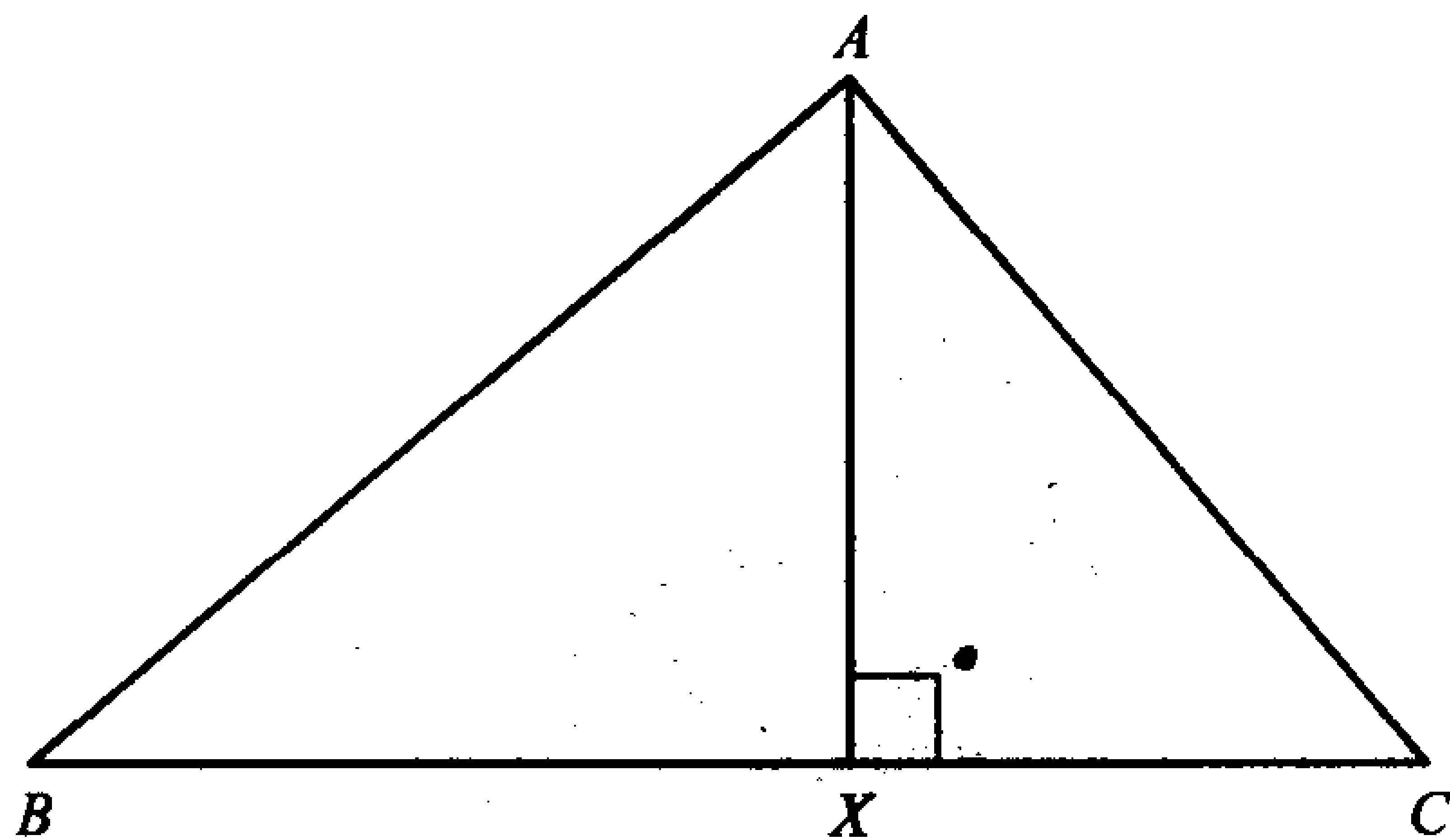
毕达哥拉斯定理在中国出现得还要早一点. 下一页中的图取自于《周髀算经》，该书可追溯到约公元前 500～200 年.

对于毕达哥拉斯定理所提供的证明的方法之多超过数学中的其他任何命题. 1940 年 E · S · 罗米斯(Elisa Scott Loomis) 出版了他的《毕达哥拉斯命题》，这是他喜爱的工作，书中介绍了 367 种证明，其中包括美国第二十届总统詹姆斯 · 伽费尔德

(James Garfield)的证明，许多证明是新闻记者提供的，包括十几岁的年轻人的若干证明. 这些证明被分成四大类和三十多的小类，但其纲要尚不完备.

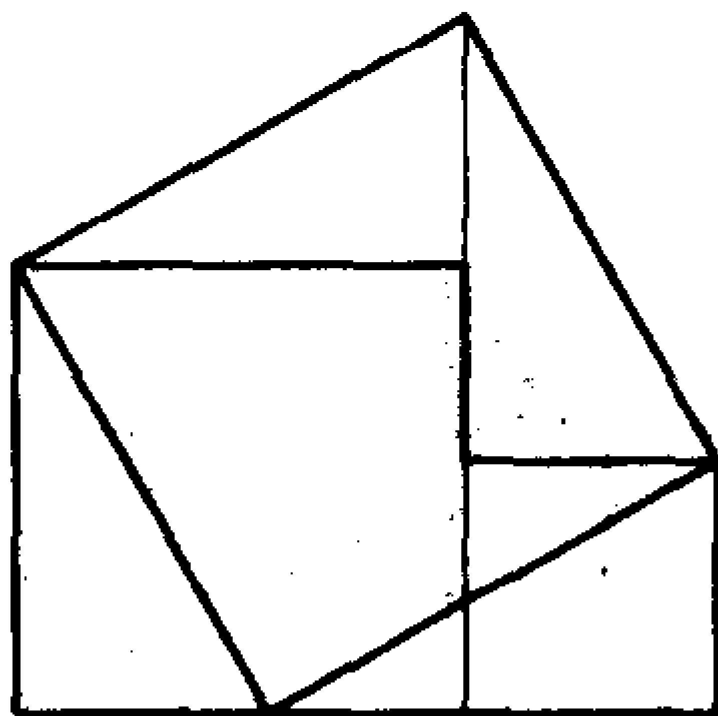


下面是最简单的证明之一. 下图中 $ABX+ACX=ABC$，这些三角形都相似，分别以 AB，AC 和 BC 为底. 但这些三角形的面积与对应的底上的正方形的面积成正比，于是就推出了该定理.

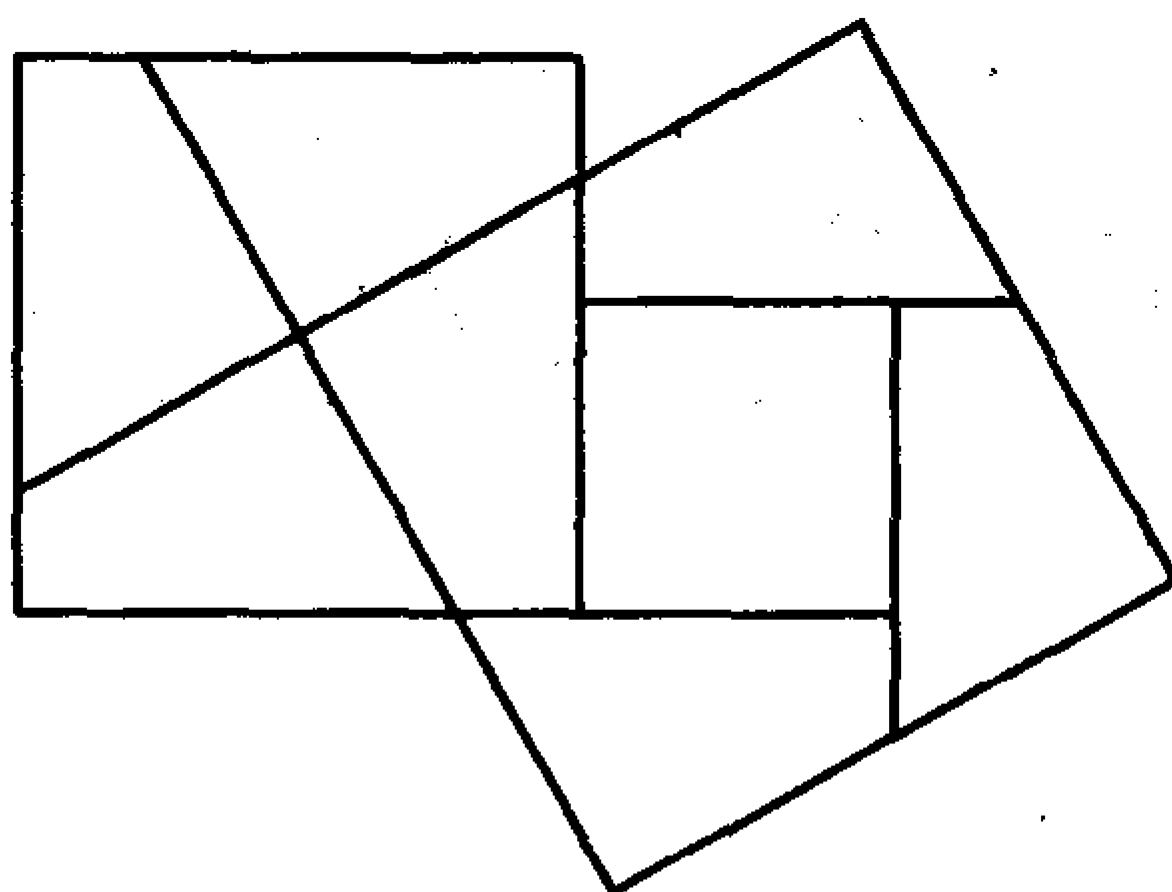


第 258 页上的两种不同大小的正方形的镶嵌提供了用分割法的另一个证明. 事实上，它提供了无穷多种分割的方法(因此也有无穷多种证明方法!). 因为角上的那个正方形能放在这个方向上的任何地方. 下面第一个图是 1873 年的泊里加尔(Peri-

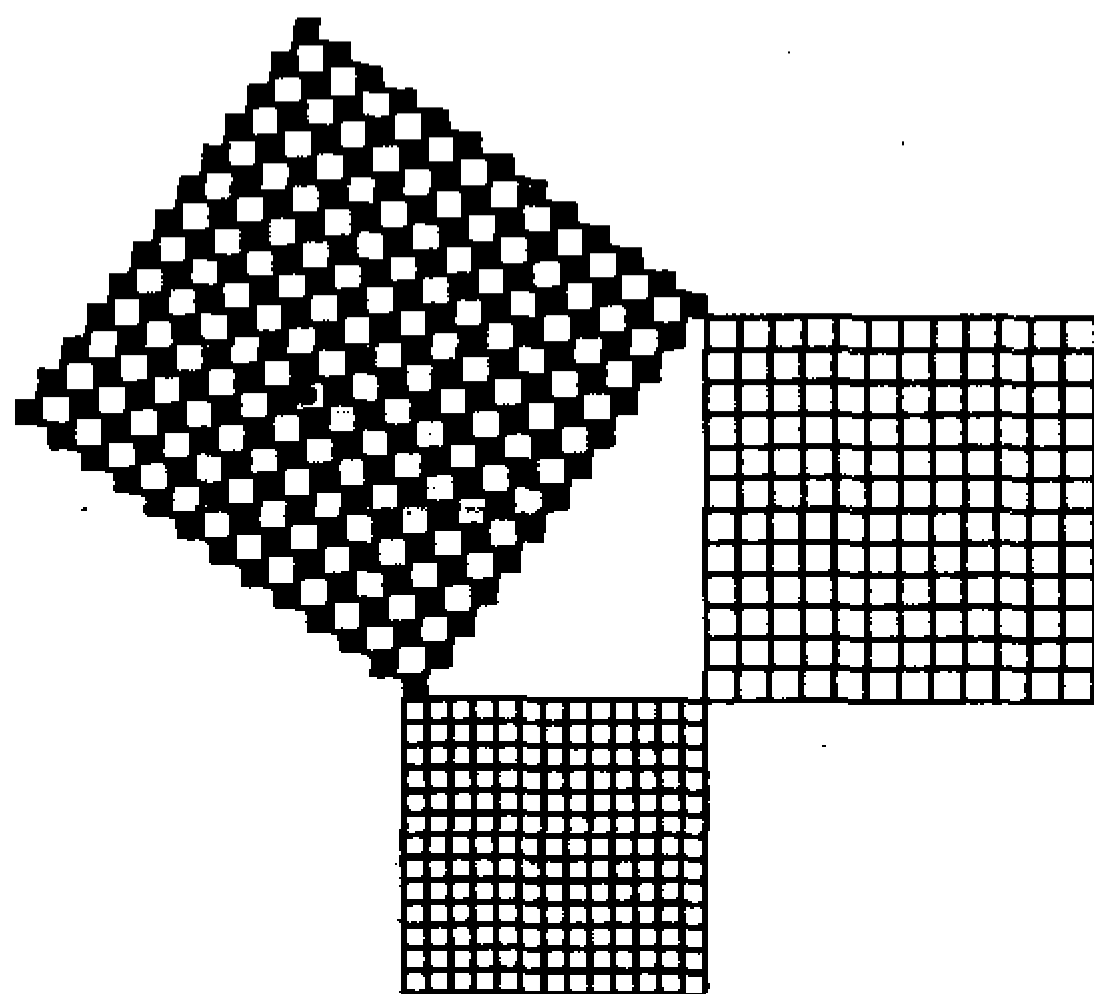
gal)分割法.



第二个图是 1917 年由杜德尼(Dudeney)构造的.

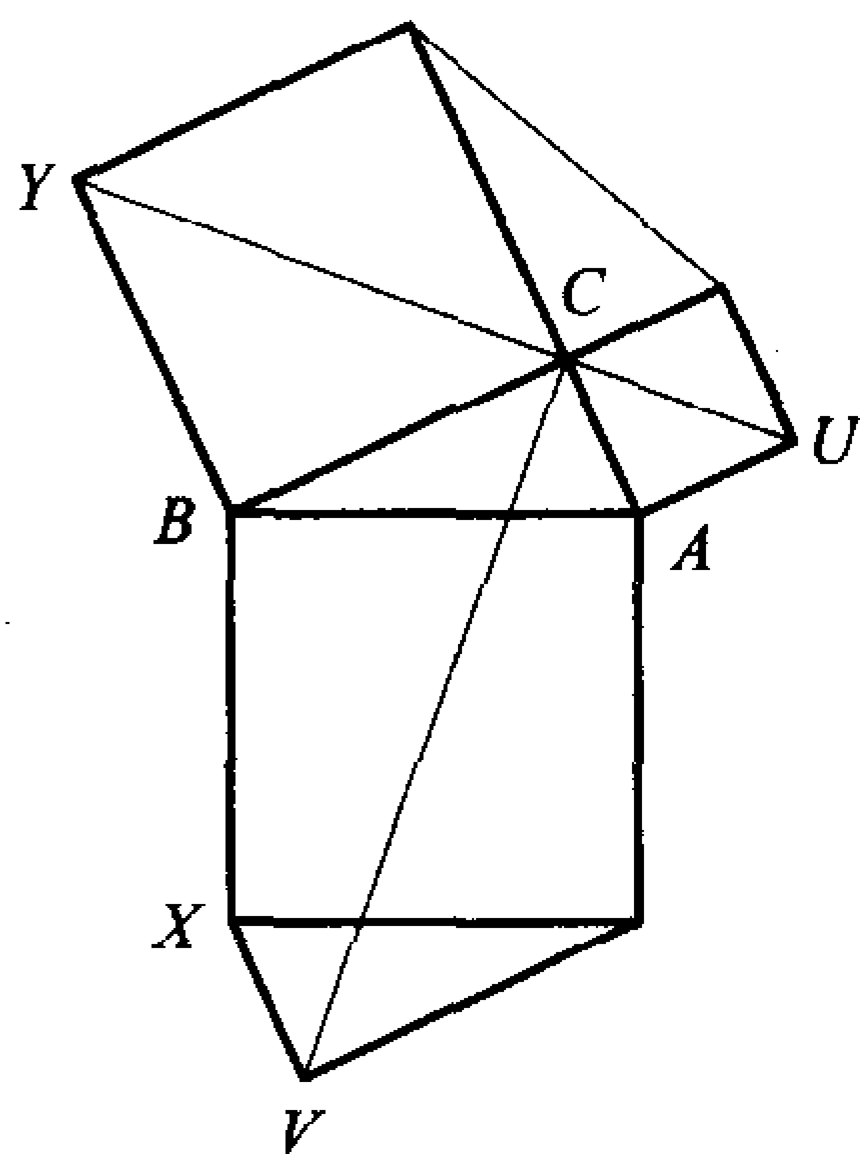


最近泡鲁斯·基尔德斯(Paulus Gerdes)提出了一个十分巧妙的方法,可以用来把同样的装饰小图案加在这一定理的图上:

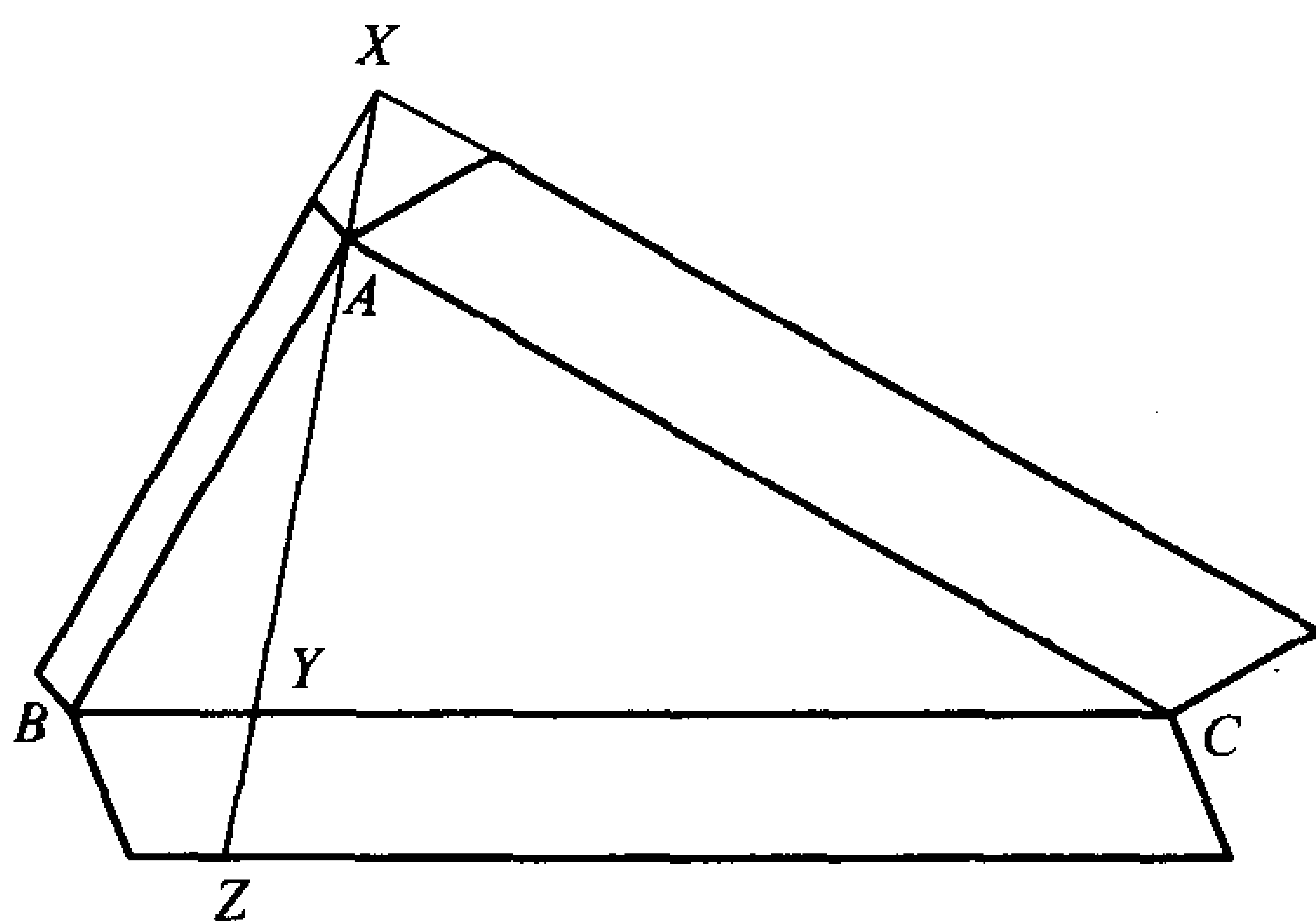


下面的美妙的证明归功于达·芬奇(Leonardo da Vinci).

在底部加一个与原三角形相同的三角形. 此时的图形由四个全等的四边形组成. 为了证明它们的面积相等，把 BA 绕 B 点顺时针旋转到 BX，这样四边形 $BAUY$ 就变成四边形 BX-VC.

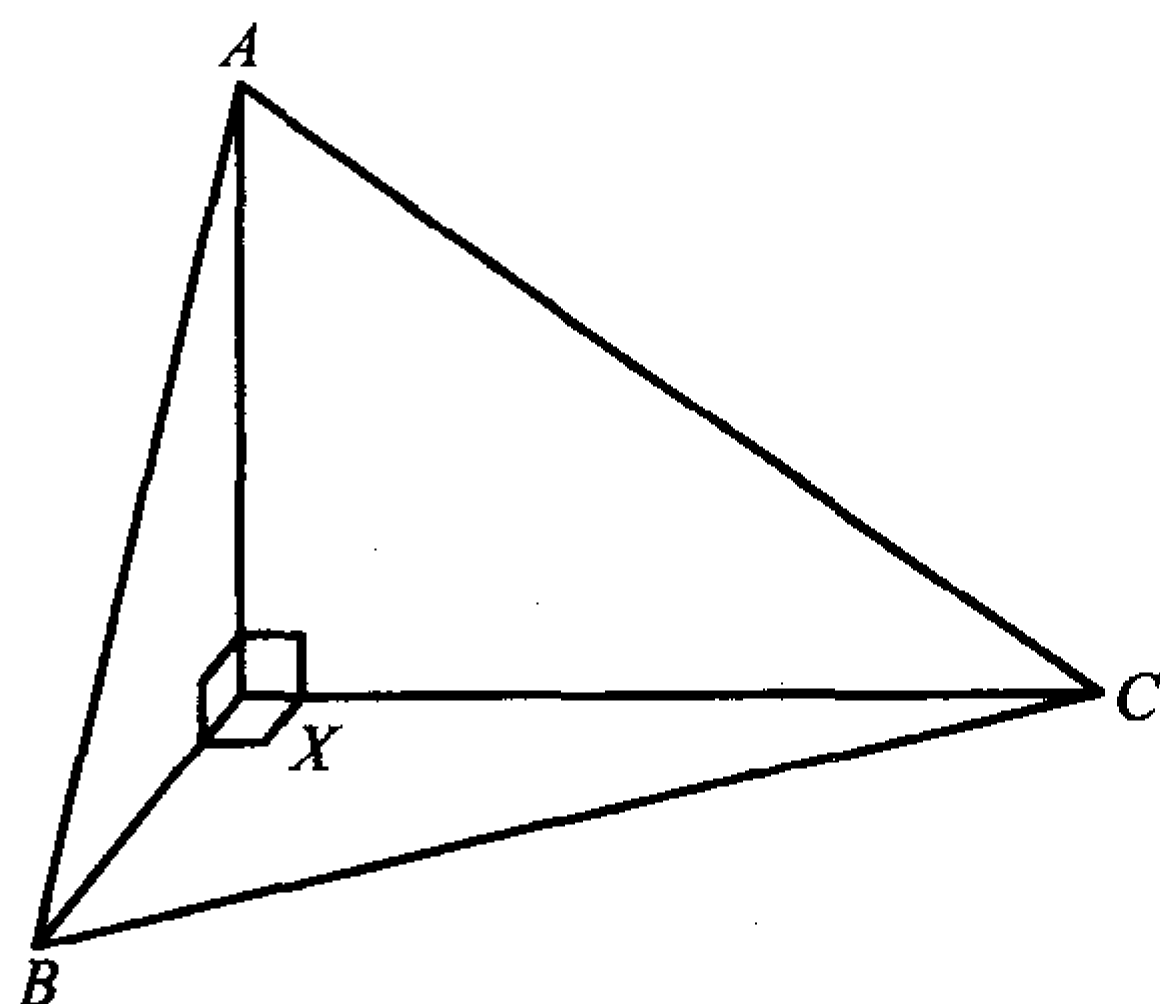


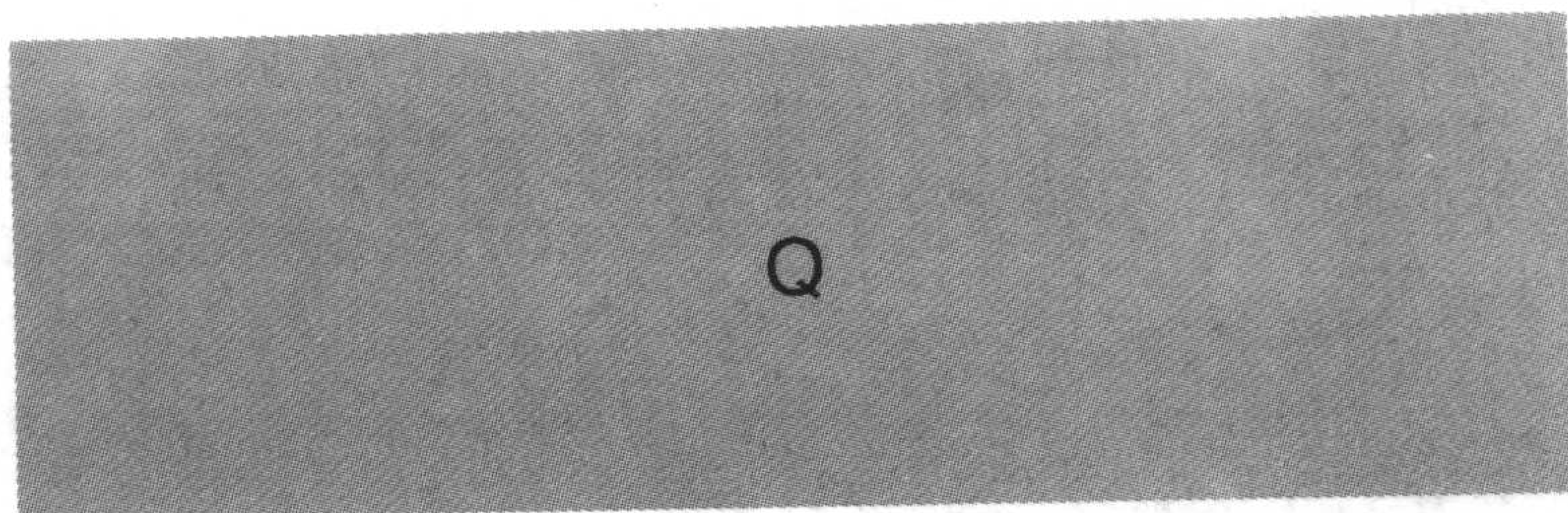
毕达哥拉斯定理能以许多方式推广. 帕普斯考虑的是一个任意三角形，画一条直线 $XAYZ$，使 $XA=YZ$. 他在图中作了三个平行四边形(它们的角可以变化，但高和底不变)，他得出结论说，较大的一个的面积是两个较小的面积的和.



另一个推广是以德·瓜·德·马尔夫斯(De Gua de

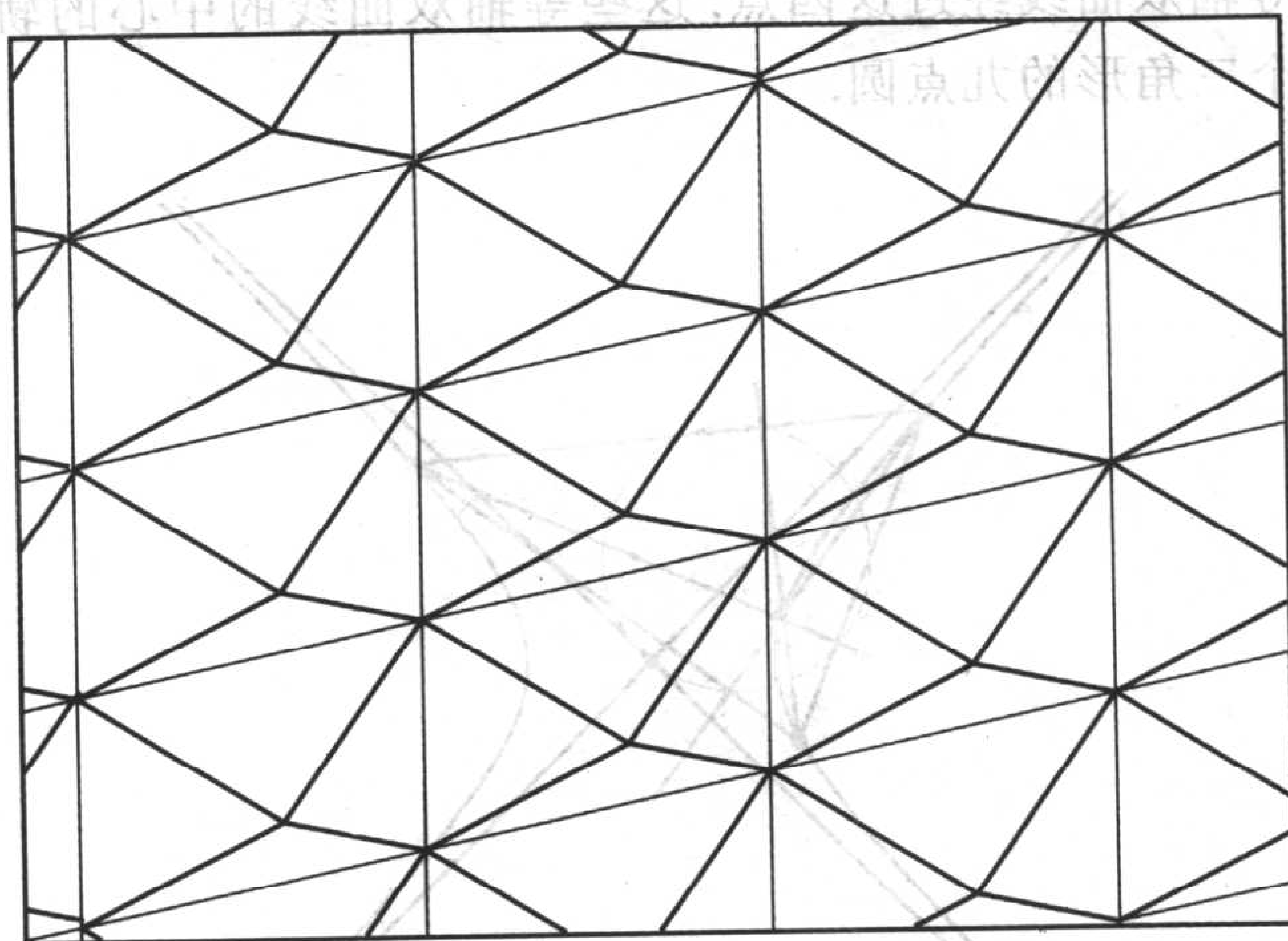
Malves)命名的，这是他在 1783 年提出的，虽然笛卡儿(Descartes)早已知道.将一个长方体截去一个角得到一个四面体，这个角上的三个角都是直角.于是三角形 ABC 的面积等于另外三个三角形的面积的和.





quadrilateral tessellation　四边形镶嵌

任何非交叉的四边形甚至是凹的，都能镶嵌. 最简单的镶嵌是用平行四边形组成的镶嵌，这种平行四边形由连接四边形的两对相对顶点所得的半个四边形拼成.

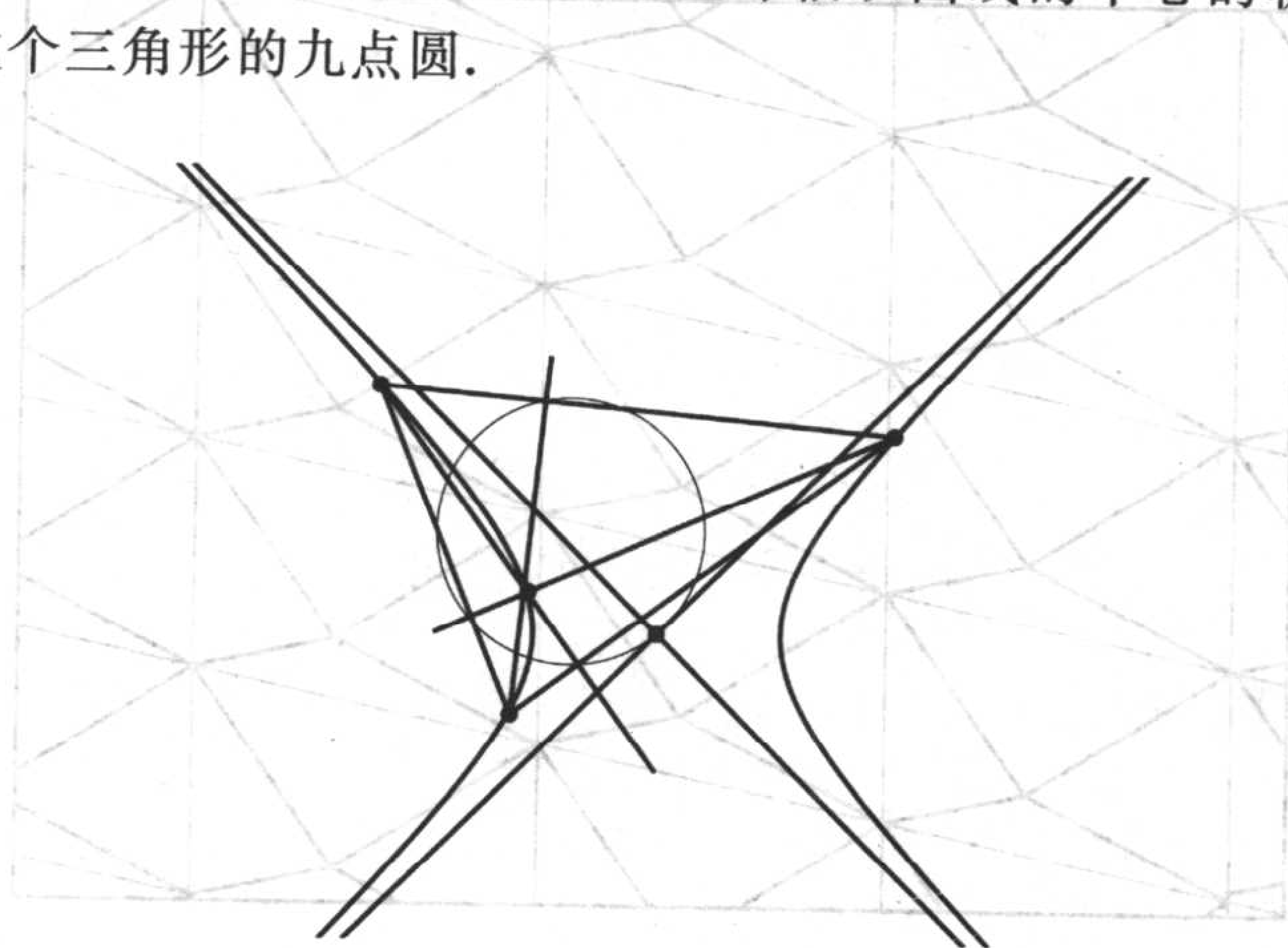


R

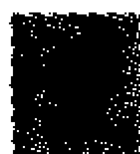
rectangular hyperbola　等轴双曲线

渐近线互相垂直的双曲线称为**等轴双曲线**.

如果一个三角形的三个顶点在等轴双曲线上，那么它的垂心也在同一条双曲线上.换句话说，如果四点是垂心组，那么有一族等轴双曲线经过这四点.这些等轴双曲线的中心的轨迹就是这个三角形的九点圆.



如果四点不是垂心组，那么有唯一的等轴双曲线经过这四点，其中心是所有四个三角形的九点圆的交点，这四个三角形是这四点中每次取三点得到的.如果把等轴双曲线的中心作为反演中心，那么反演曲线是双纽线.



regular four-dimensional polytopes　四维空间中的正多单形体

三维空间中的正多面体在四维空间中有类似的图形. 一共有十六种,其中六个是凸的,十个是星状的.

下表给出组成正单形体的顶点数、棱数、二维平面数和三维胞腔数.

	顶　点	棱	二维平面	三维胞腔
正五单形体	5	10	10	5
16 胞腔	8	24	32	16
超立方体	16	32	24	8
24 胞腔	24	96	96	24
600 胞腔	120	720	1 200	600
120 胞腔	600	1 200	720	120

正五单形体和 24 胞腔都自身对偶. 16 胞腔是超立方体的对偶,600 胞腔和 120 胞腔互为对偶.

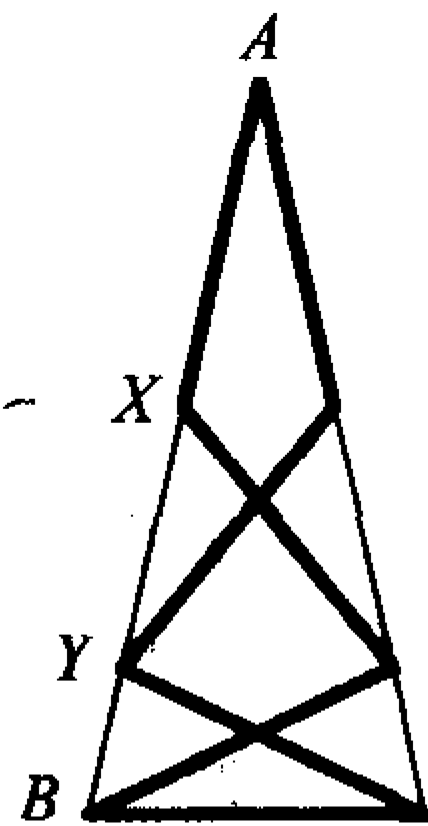
对于所有正单形体,一个类似于欧拉关系的等式成立:

顶点数＋二维平面数＝棱数＋胞腔数.

在五维或更多维空间中,都只有三种凸的正单形体.

regular heptagon　正七边形

只用圆规和直尺作一个正七边形是不可能的. 但是, 用七根牙签可能作出一个$\frac{\pi}{7}$的角, 然后就容易作出正七边形了. 七根牙签必须安放得使 A, X, Y, B 在同一直线上,右边也是如此. $\angle A$ 将是$\frac{\pi}{7}$.

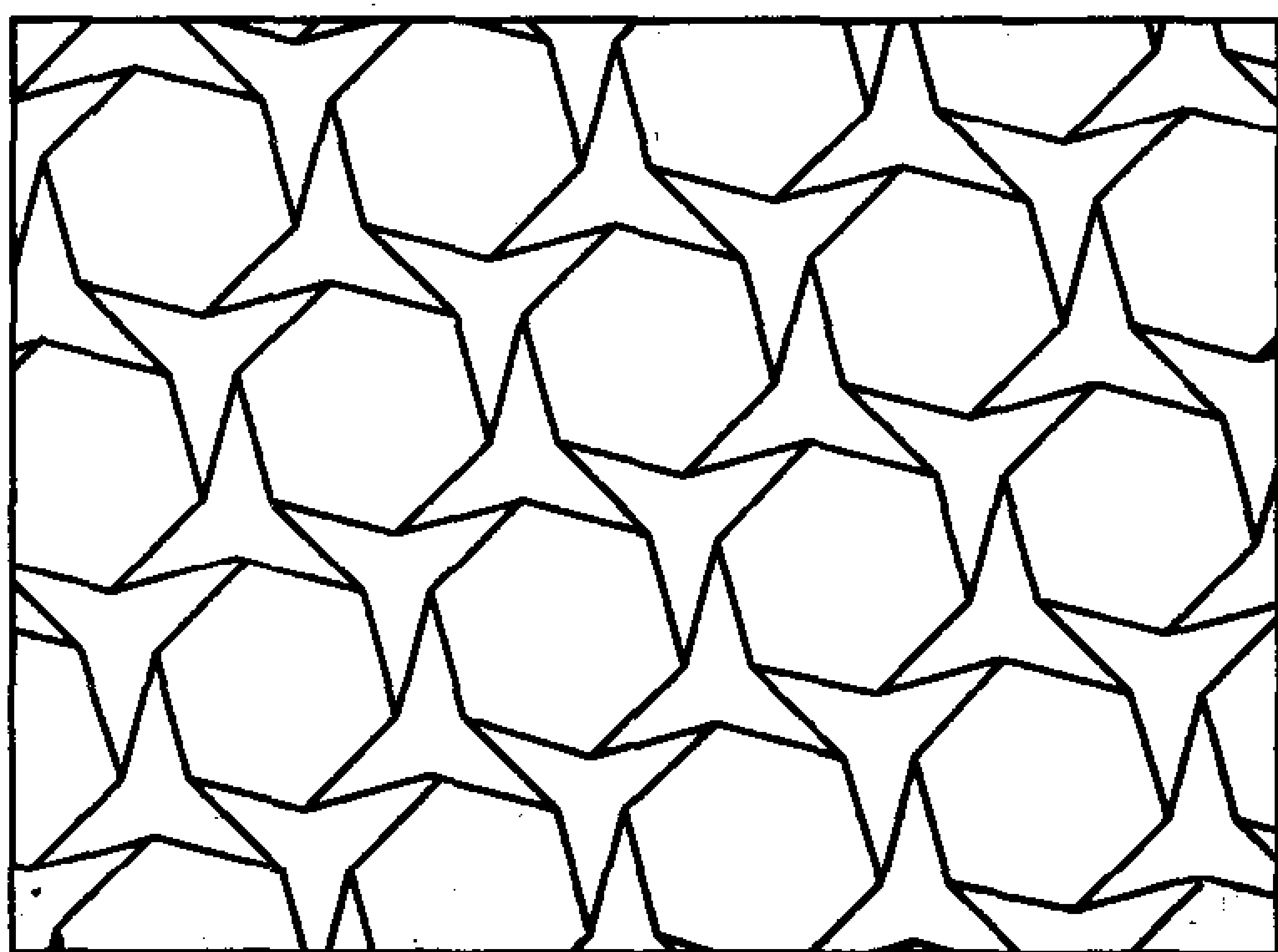


参考书:C. JOHNSON,正七边形的作法(A

construction for a regular heptagon), *Mathematical Gazette*, No. 407,1975.

regular hexagons and stars　正六边形和星形

能单独镶嵌的正多边形可以转化成多边形和星形的镶嵌，只要把各正多边形稍稍分开，再分割它们之间的空间.



这也可以理解为铰链式镶嵌. 星形的每一条非正六边形的边就像一个搭扣带，它的两个端点连接两个正六边形. 六边形分得越开，星形就变得越宽. 有一个时刻星形就变成大的等边三角形，最后变成和原六边形相同的六边形.

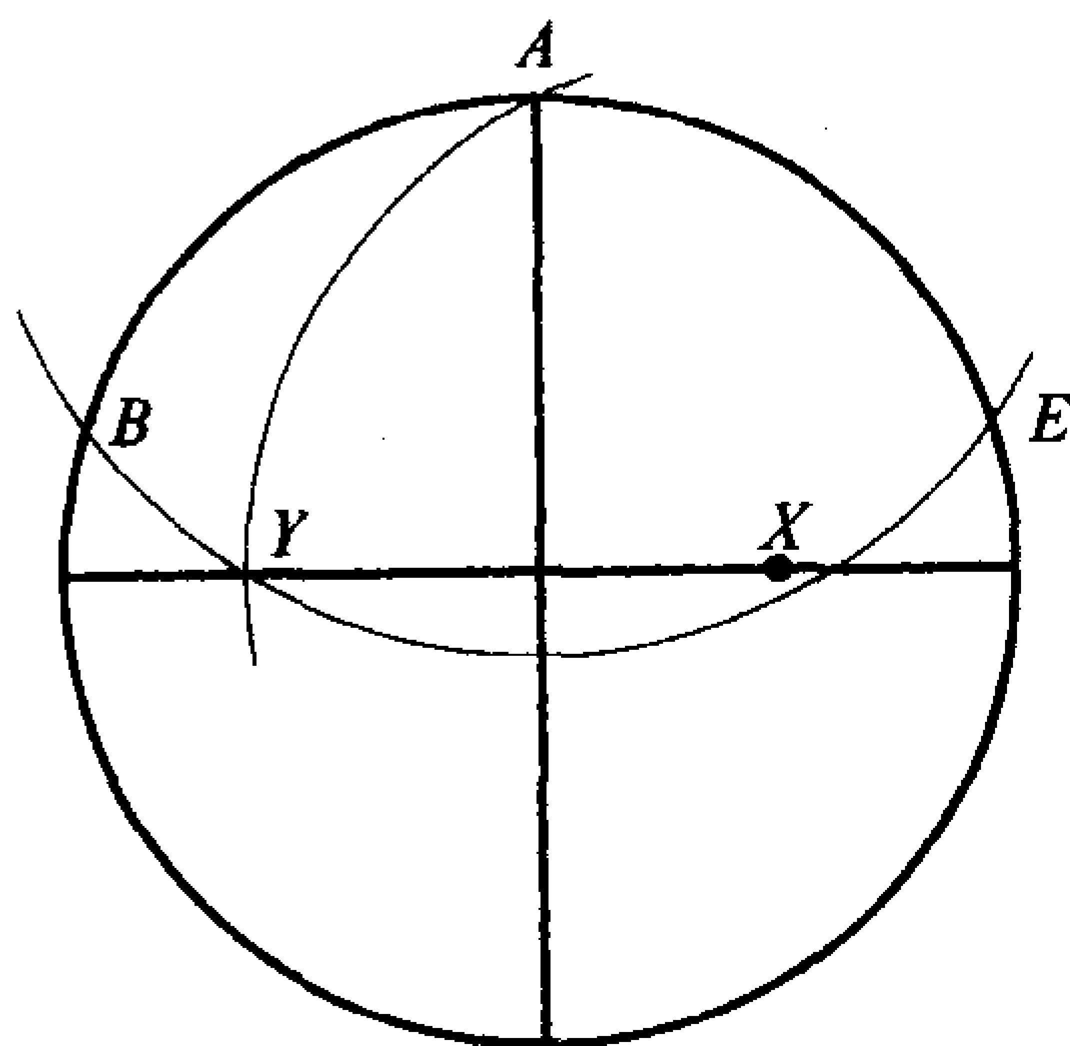
regular pentagon　正五边形

欧几里得指出如何作一个正五边形，并在《几何原本》的最后一卷中写道，没有这方面的知识是不可能作出正十二面体的.

达·芬奇(Leonado da Finci)和丢勒(Dürer)还有其他一些人描述了正五边形的许多近似作法供建筑师使用. 下一页中的图是一种简单而完美的作法.

画一个圆和两条互相垂直的直径，再平分一条半径于 X

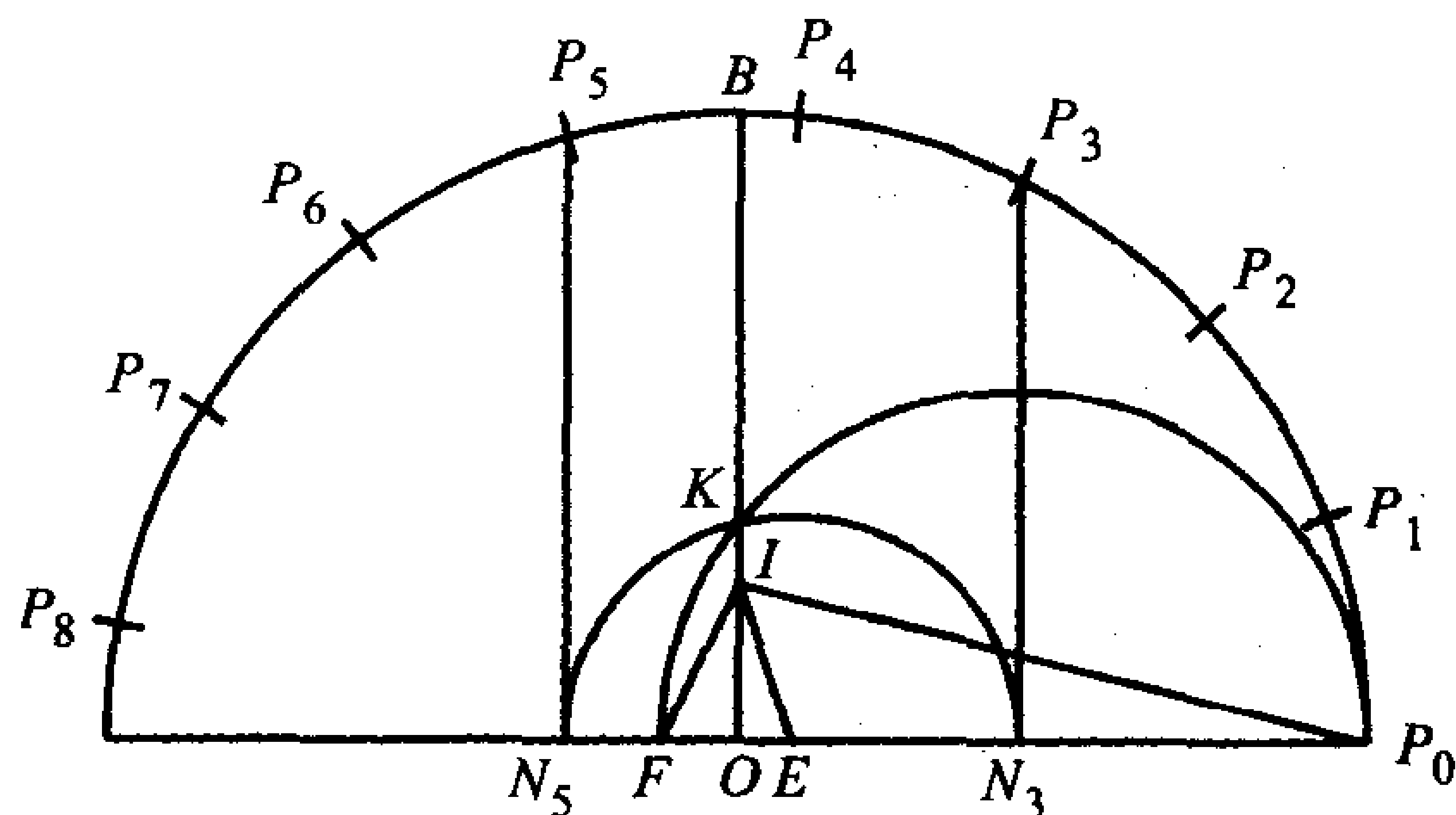
点. 截取 XY 等于 XA，再以 YA 为半径，A 为圆心，画弧交圆于 B 和 E. 于是 A，B，E 就是一个正五边形的三个顶点.



regular seventeen-gon　正十七边形

高斯于 18 岁时（刊登于《算术论文》(*Disquisitiones arithmeticae*)，1801)，证明了如果 n 是一个费尔马质数或几个不同的费尔马质数的积，那么正 n 边形可以用圆规和直尺作出.

第 n 个费尔马数是 $2^{2^n}+1$，这里 n 是零或正整数. 由于第三个费尔马数是 17，所以只用圆规和直尺作出正十七边形在理论上是可能的. 最简单的作法应归功于里奇蒙（H. W. Richmond)，根据露斯·鲍尔(Rouse-Ball)的说明是这样的：



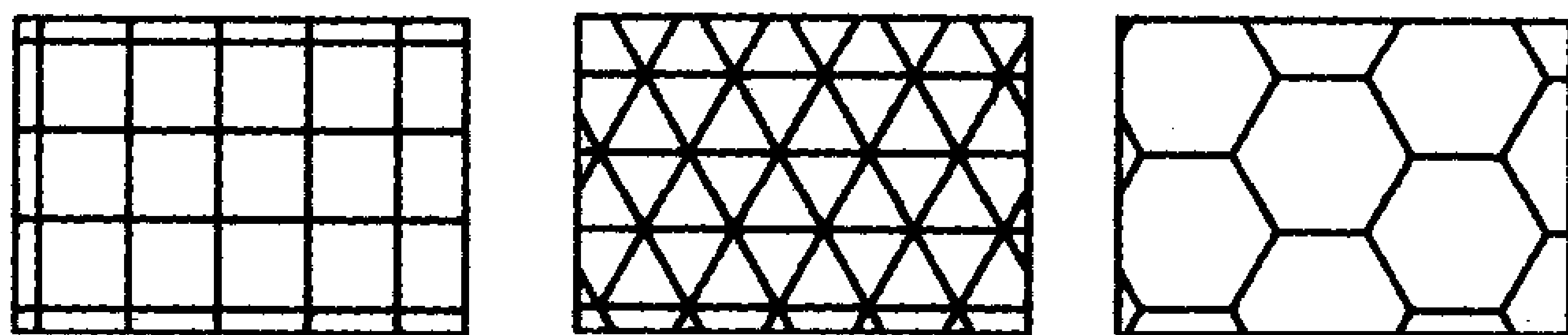
在 OB 上找一点 I 使 $OI=\frac{1}{4}OB$,连接 IP_0,在 OP_0 上找 E 点和 F 点,使 $\angle OIE=\frac{1}{4}\angle OIP_0$,$\angle EIF=\frac{1}{4}\pi$. 设以 FP_0 为直径的圆交 OB 于 K,设以 E 为圆心,以 EK 为半径的圆交 OP_0 于 N_3(在 O 和 P_0 之间)和 N_5.

设直线 N_3P_3 和 N_5P_5 平行于 OB,交原来的圆于 P_3 点和 P_5 点. 则 P_0,P_3,P_5 是正十七边形的第 0 个,第 3 个,第 5 个顶点,这样其余的顶点就不难作出了.

参考书:W. W. ROUSE-BALL. H. S. M. COXETER, *Mathematical Recreations and Essays*, 12th edn, University of Toronto Press, Toronto. 1974.

regular tessellations　正多边形镶嵌

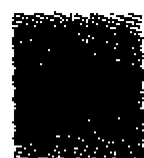
是开普勒首先考虑正多边形镶嵌的,他认识到这种镶嵌与正多面体类似. 有三种正多边形镶嵌,即用正方形,正六边形和等边三角形镶嵌.

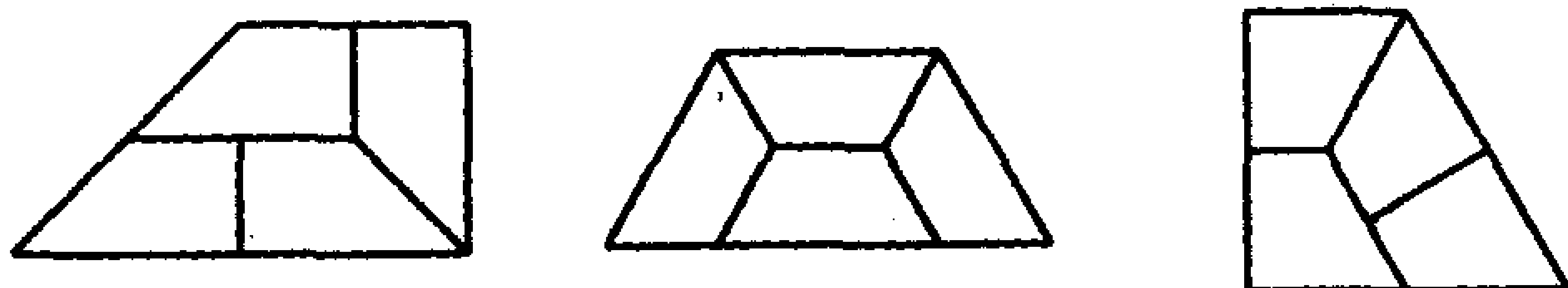


reptiles　全等图形的镶嵌

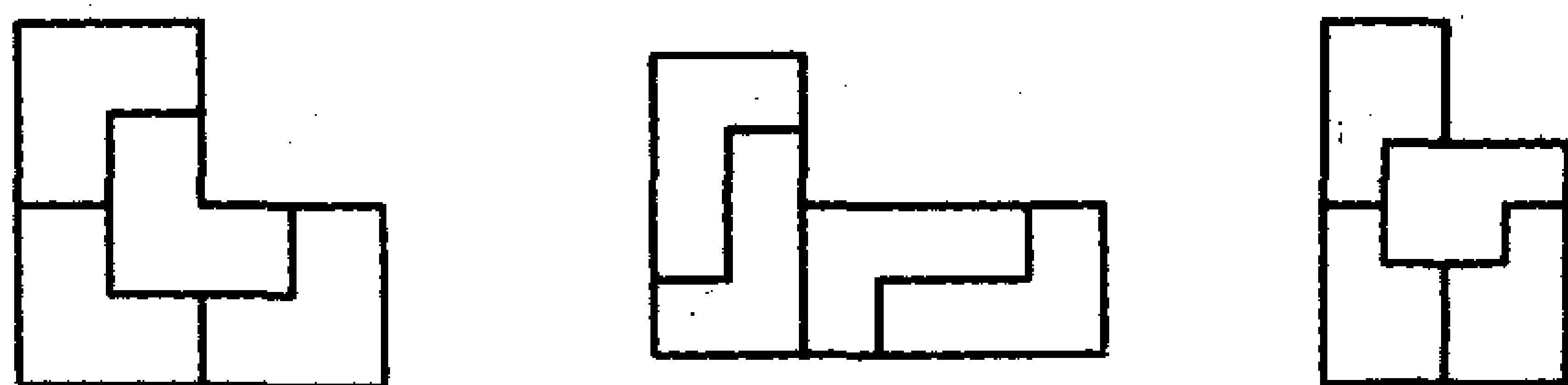
怎么样的形状能够分割成与原图相似的全等的图形呢? 等腰直角三角形和两邻边的比是 $1:\sqrt{2}$的平行四边形能够分割成与原图相似的两个全等的图形.

下面的几个梯形中的每一个都能分割成与原图相似的四个全等的梯形. 下一页的人面狮身像那样的图形也能做到这一点,它是具有这一性质的唯一已知的五边形.

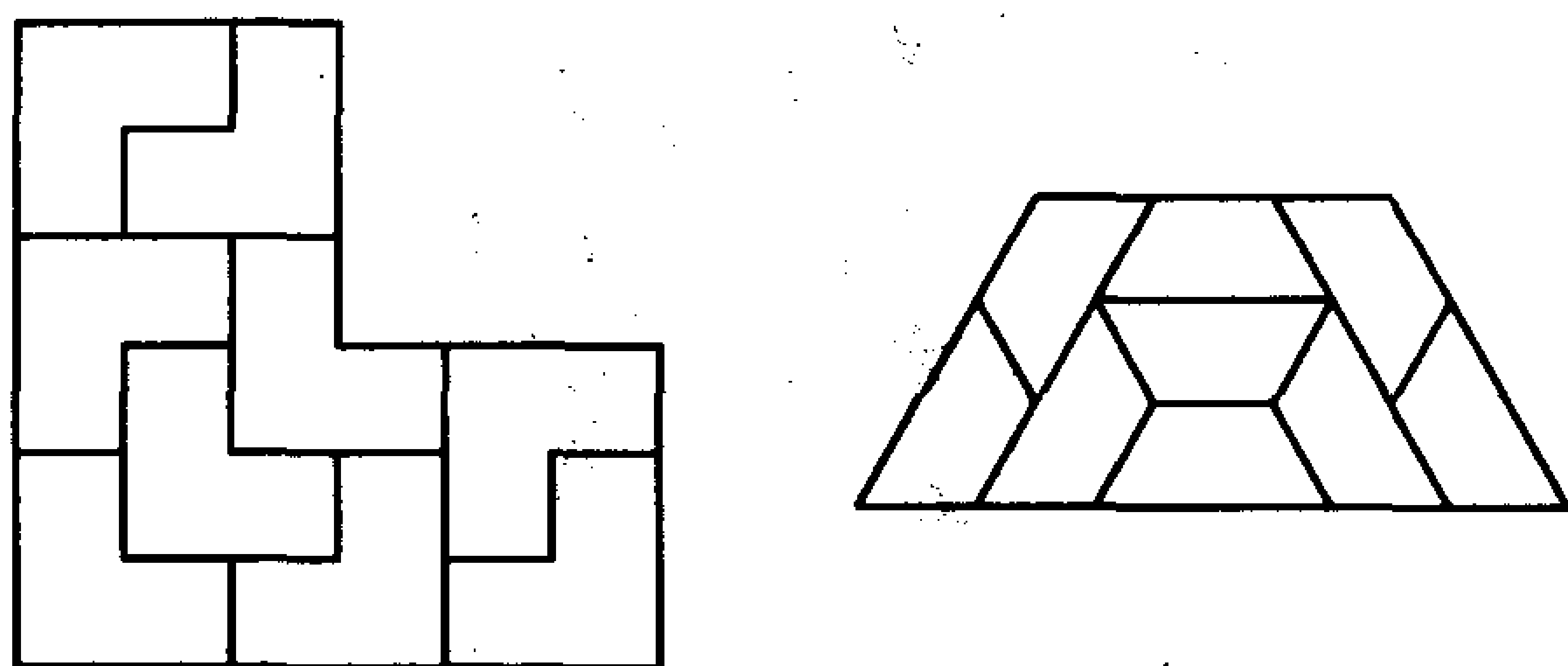




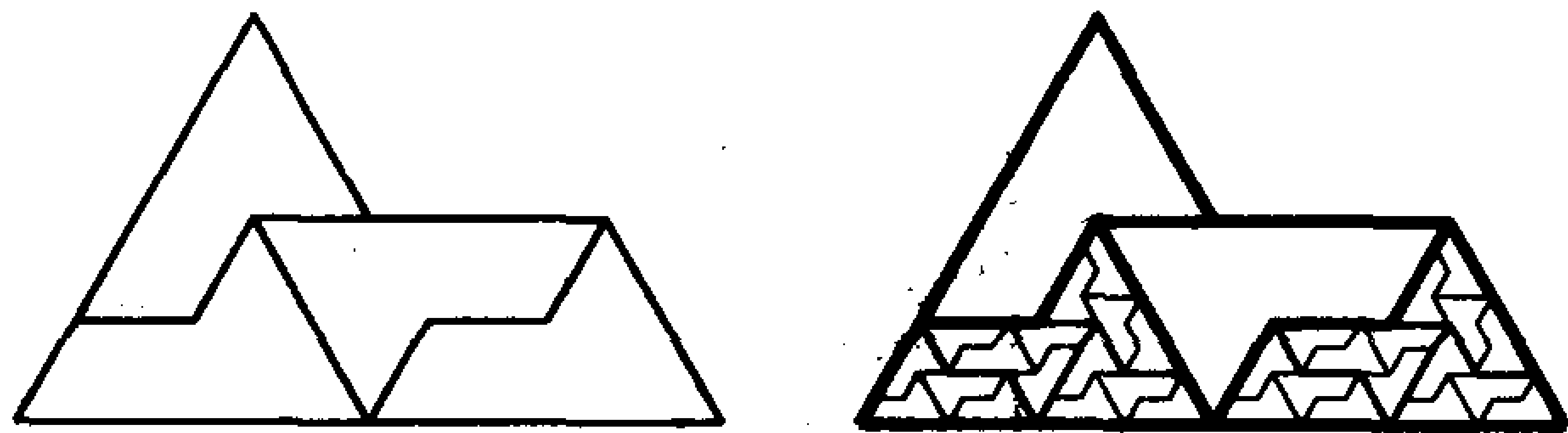
下面的 L 形也能分割成四块相同的图形：



下面两种图形也能分割成几块较小的相同的图形：



任何全等图形的镶嵌都能重复生成一个个越来越小的拼块.反之,这一过程也可以倒过来,原来的图形可以拼起来形成整个平面的镶嵌.

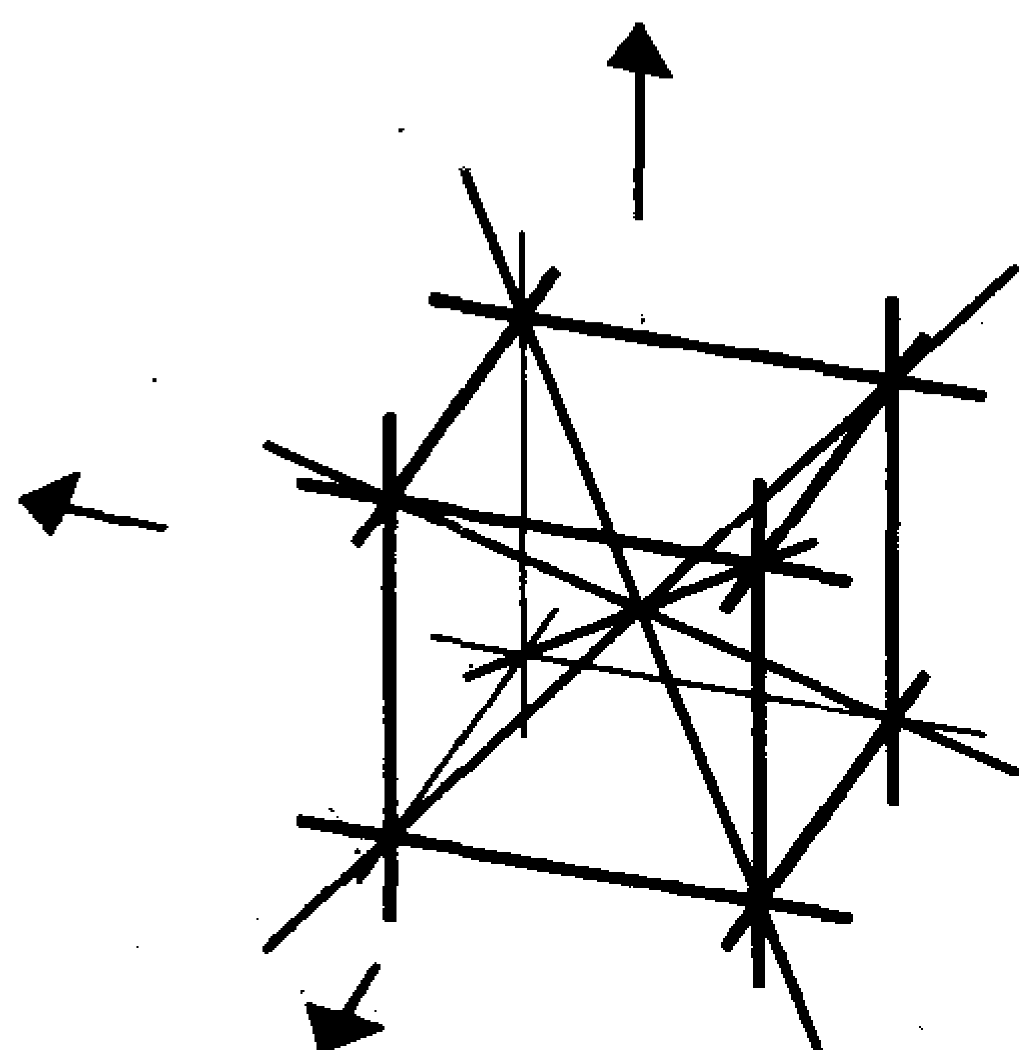


参考书:C. DUDLEY LANDFORD, Uses of a geometric puzzle, *Mathematical Gazette*, No. 260, 1940.

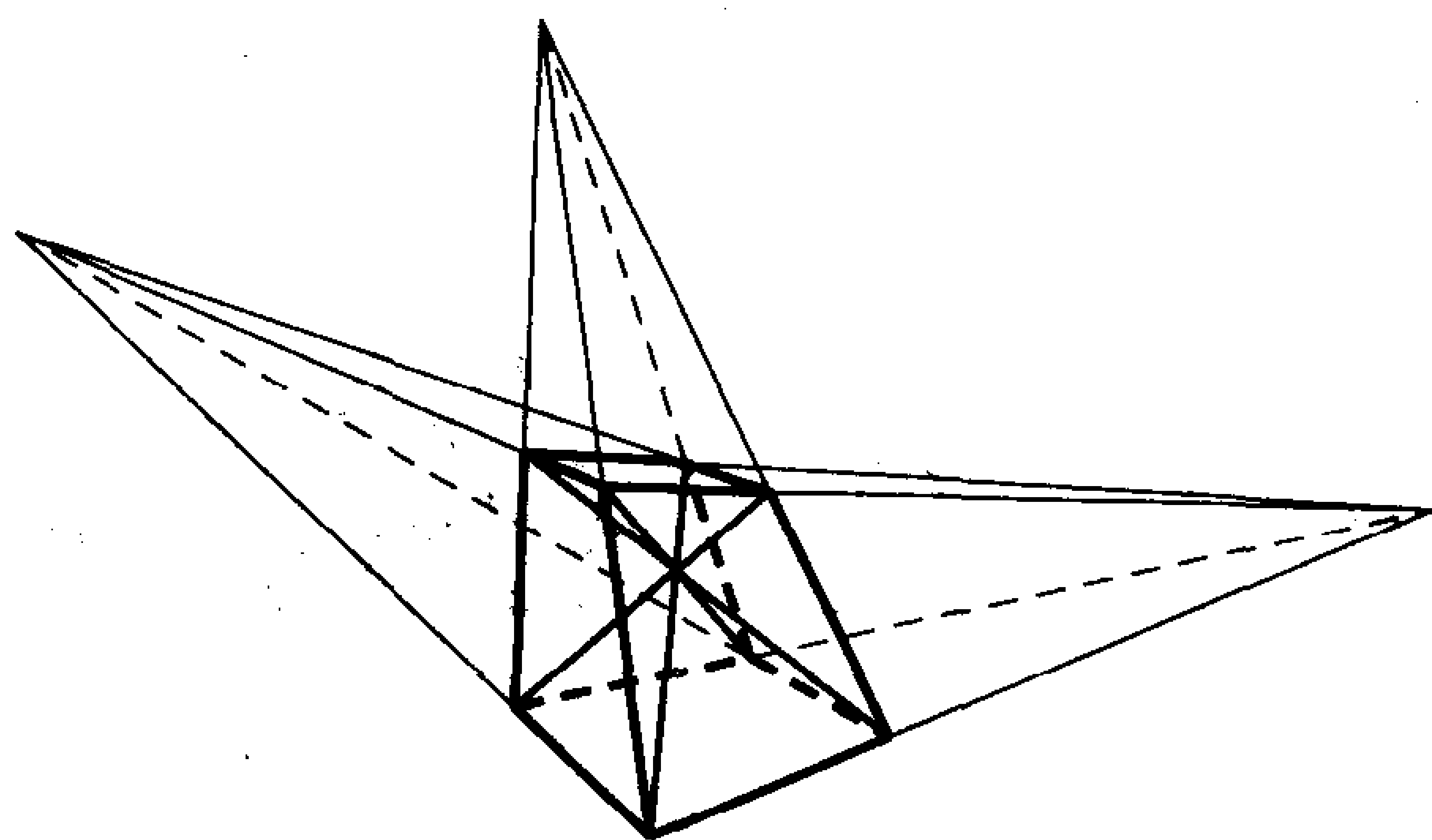
Reye's configuration　雷氏构形

取正方体的 8 个顶点，加上它的中心和三个“无穷远点”，即正方体的三组平行棱的交点，下图中用箭头表示，这样一共得到了 12 个点.

正方体的 6 个面加上经过一组对棱的 6 个平面共有 12 个平面. 这就成了雷氏(Reye)构形，其中有 12 个平面和 12 个点，每一个平面上有 6 个点，每一个点都在 6 个平面上.



从通常的正方体出发只是为了考虑这个构形的方便. 下面是一个没有“无穷远点”的雷氏构形：

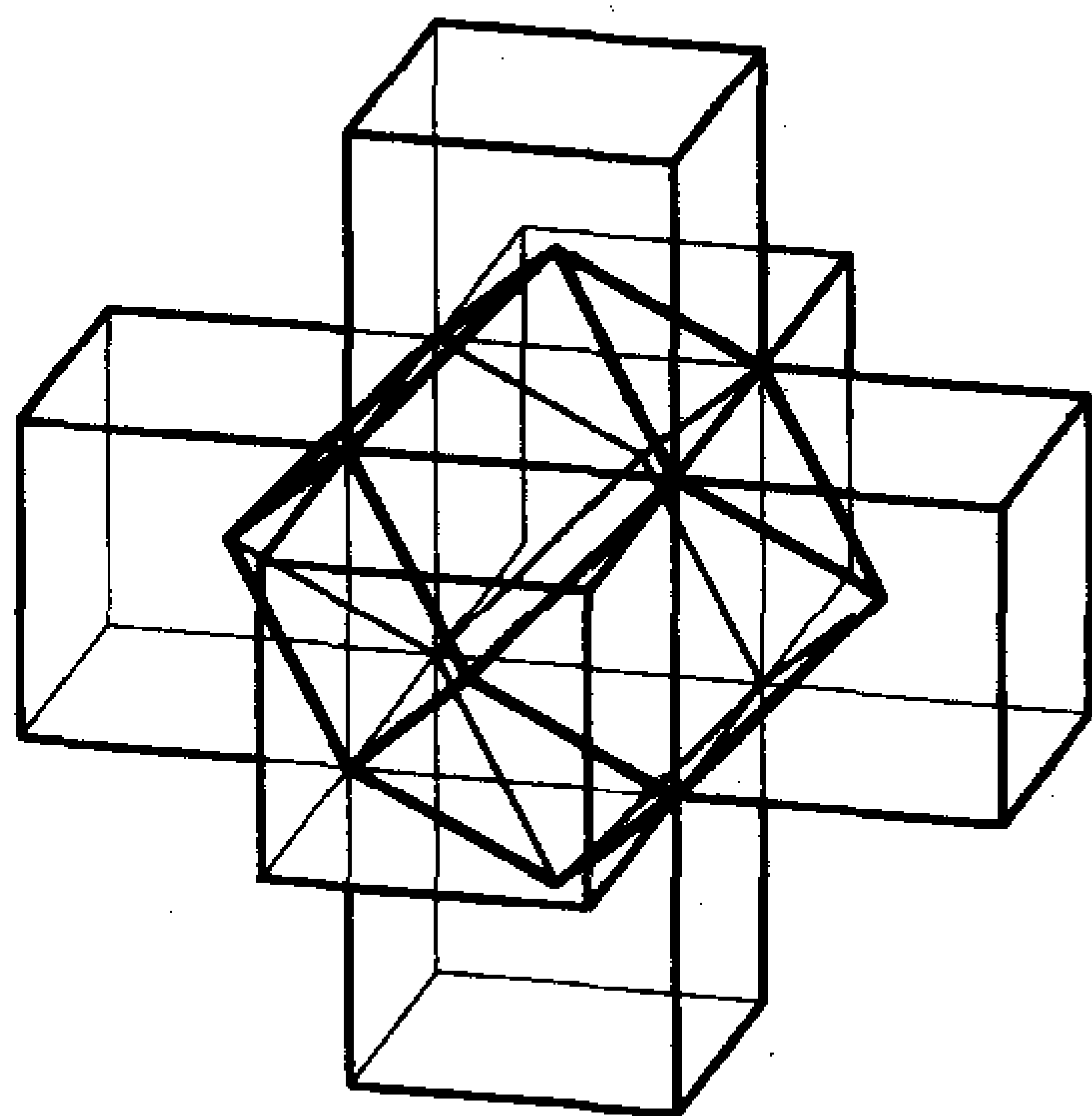


它也可以看作是直线和点的一个构形：16 条直线，即正方

体的 12 条棱和 4 条对角线，以及上面的同样的 12 个点，这样每一个点在 4 条直线上，每一条直线上有 3 个点.

rhombic dodecahedron　菱形十二面体

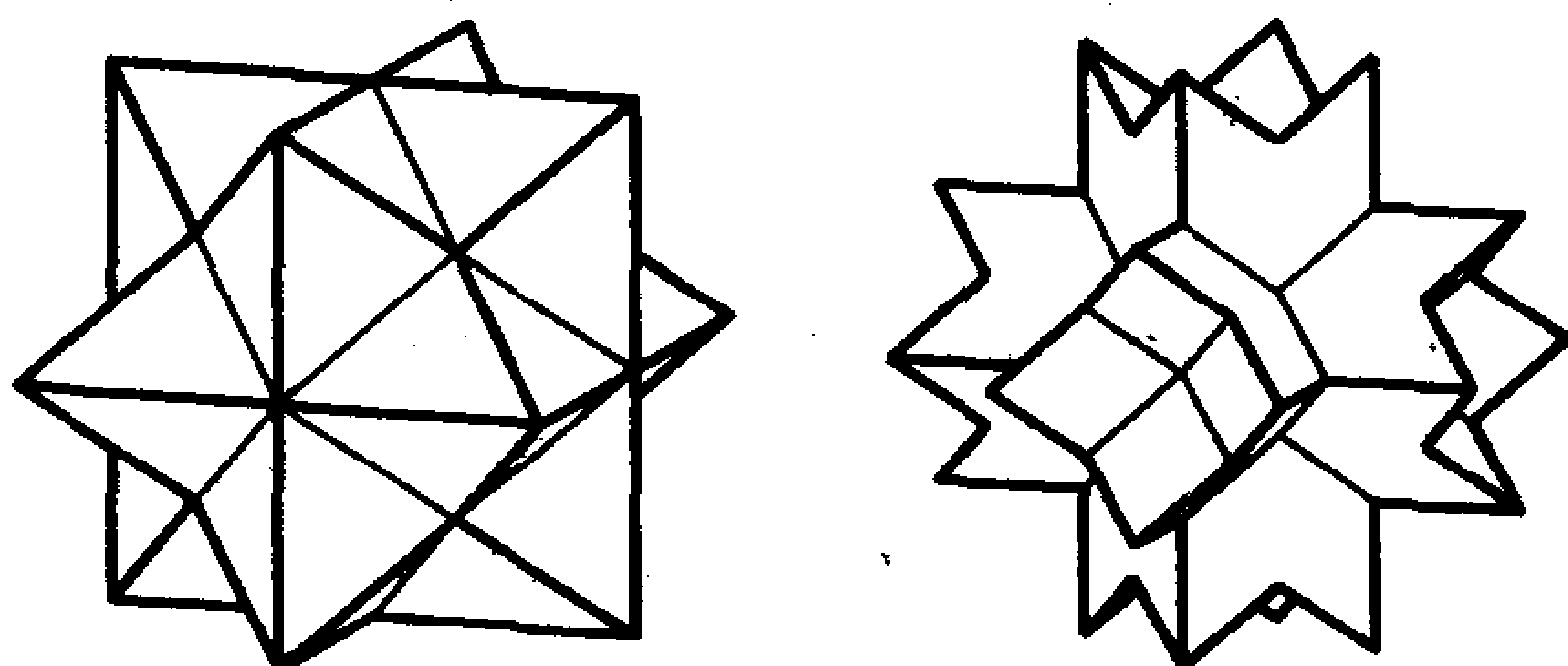
把六个正方体放在第七个正方体的各个面上，形成三维相交的情况. 连接外面六个正方体的中心和中间一个正方体的顶点就得到菱形十二面体. 它的面都是菱形，这些菱形的短对角线是原正方体的棱，长对角线是正八面体的棱. 它出现在自然界中的柘榴石和其他一些晶体中.



由原来的作法可以得到菱形十二面体的空间铺砌. 如果用六个连接正方体的中心和一个面的正四棱锥组成的铰链状的模型，那么用一种方法可把这个模型折成一个完整的正方体，用其他情况折成内部有一个空正方体的菱形十二面体.

这些面要么四个相交于一点，要么三个相交于一点. 去掉交于一点的三个面，延伸周边的六个面就形成一个正六棱锥的面，这些面就像在蜂窝中见到的蜂房.

延伸菱形十二面体的各个面使它们相交，可形成三种星状多面体，至于是这三种星状多面体中哪一种取决于延长这些面有多远. 下图表示第一种和第三种星状多面体.

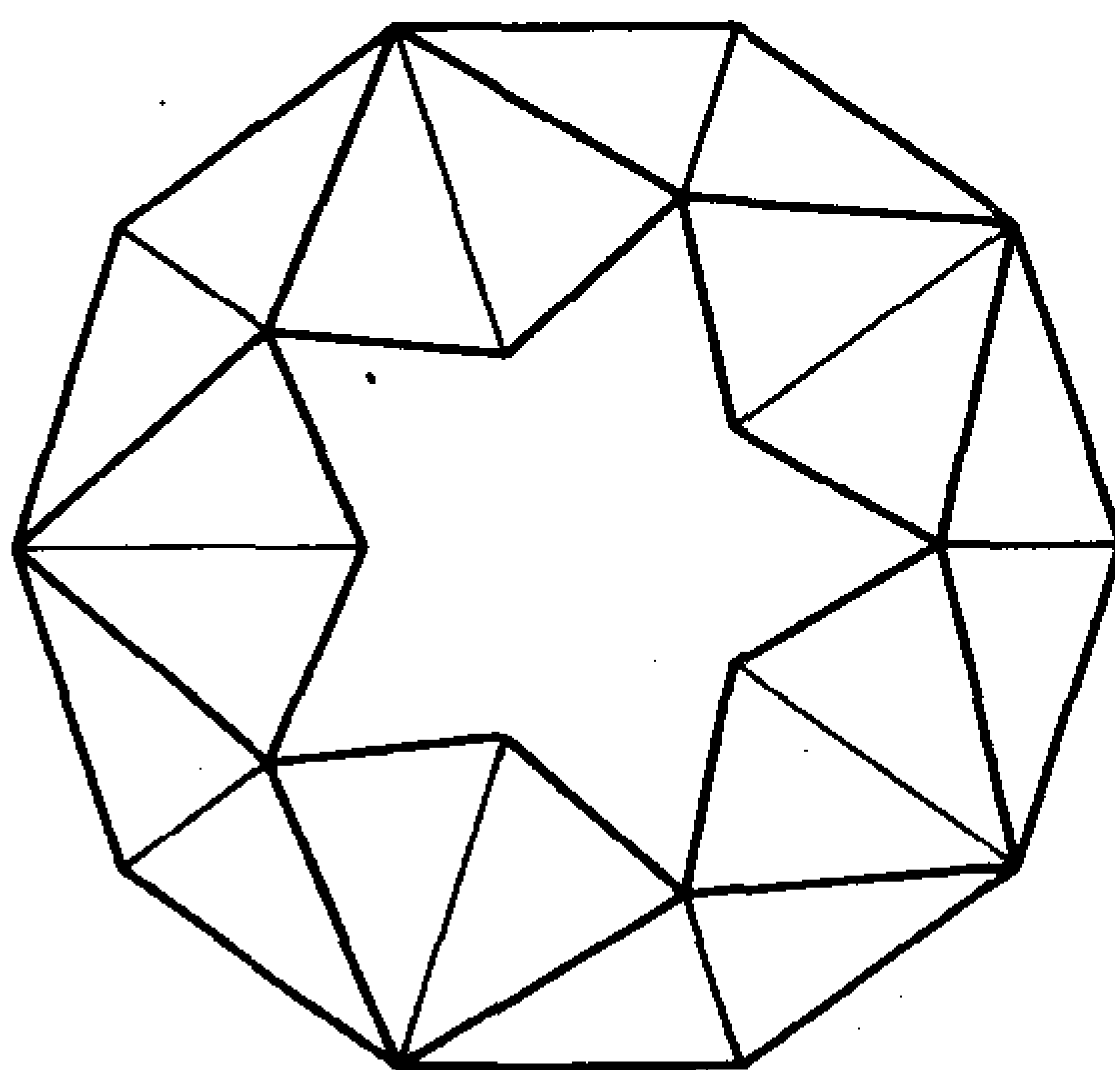


第一种星状多面体的各个顶点就是正八面体的顶点. 第一种星状多面体也是三个非正八面体相交得到的,其中每一个都是沿正八面体的一主轴压缩而成.

仔细考查第三种星状多面体,可以看到菱形十二面体也是一个这样的立体图形,它是三个互交的正四棱锥交,这些正四棱锥每一对都交于公共的对角面. 第三种星状多面体的顶点也是截头八面体的顶点.

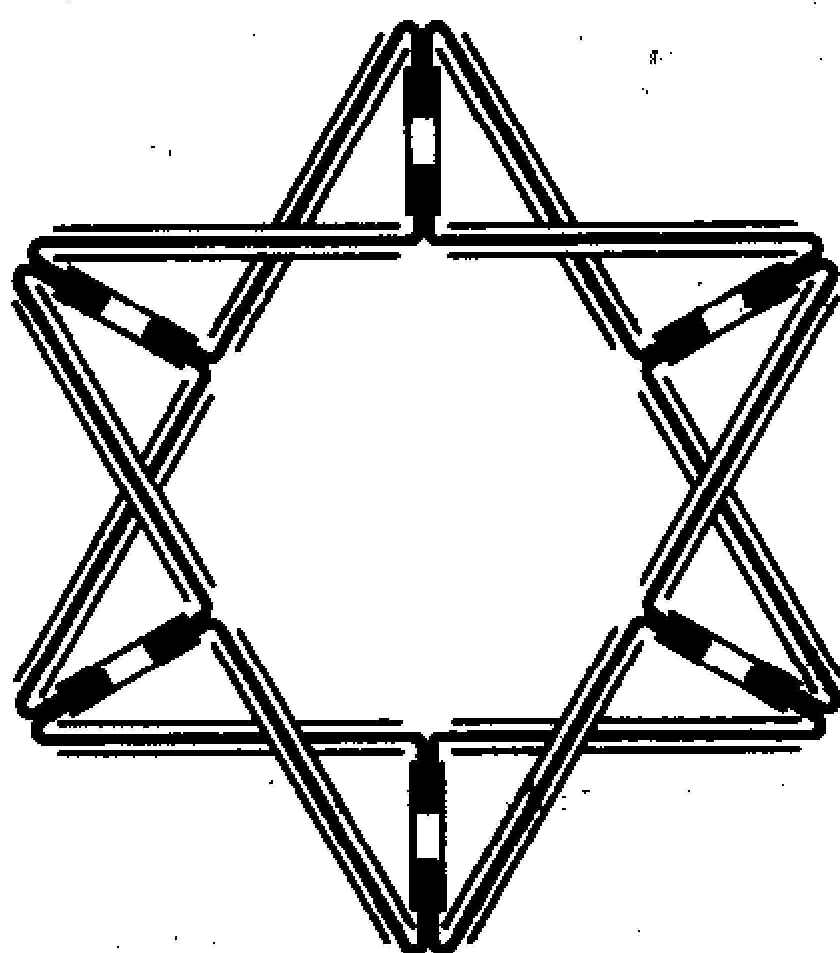
rings of polyhedra　多面体环

正四面体的对棱互相垂直. 因此,如果制成铰链状,那么它们的功能就像一个万向联接器. 如果有足够多的正四面体,并且内部空间充分大,那么就形成可以自由转动的正四面体环. 对于正四面体,至少需要 8 个.

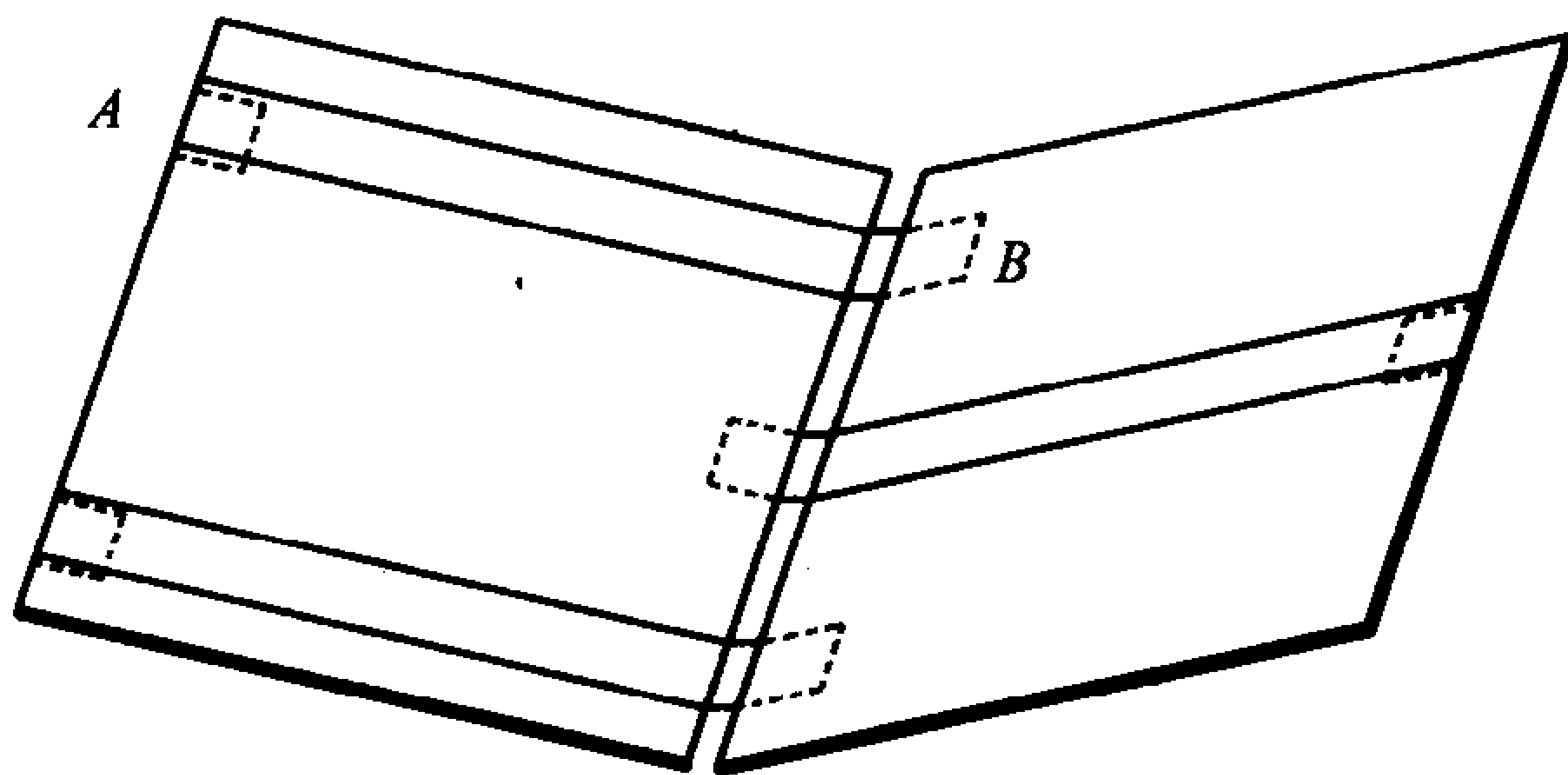


如果四面体"既长又细",那么少到 6 个就可以转动.用烟斗通条和吸管可做成一个简单的模型.取十二根 9 厘米长的吸管,把烟斗通条穿过每一条吸管,再把烟斗通条在吸管外的两头弯成直角,即垂直于吸管并互相垂直.(有左旋和右旋两种做法,每种六根)再取 6 根吸管,每根 6.5 厘米长,也这样连接.

下图表示吸管是如何连接的.(短的吸管不平行于图形所在的平面.)两根长吸管和两根短吸管是四面体的六条棱中的四条.

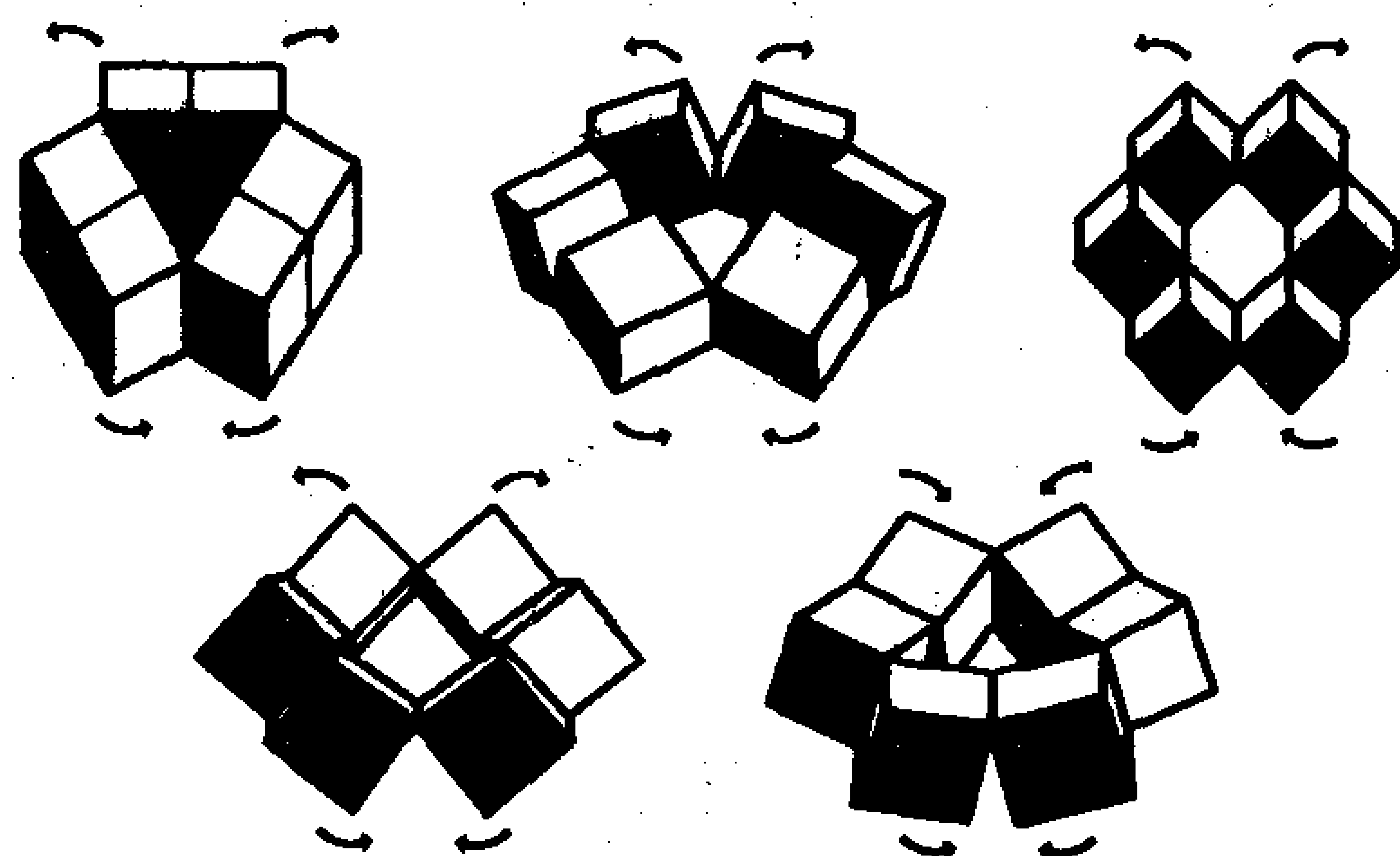


更为灵活的另外一类连接方法可以用"皮夹状铰链"完成,它出现在著名的皮夹小玩意中,一张钞票一会儿在皮夹条的上面,一会儿又在皮夹条的下面.



A 到 B 的纸条贴在左面卡片背面的 A 处,贴在右面卡片背面的 B 处.类似地再贴两张.

用这样的方法连接，只有六个正方体就可以连续转动.

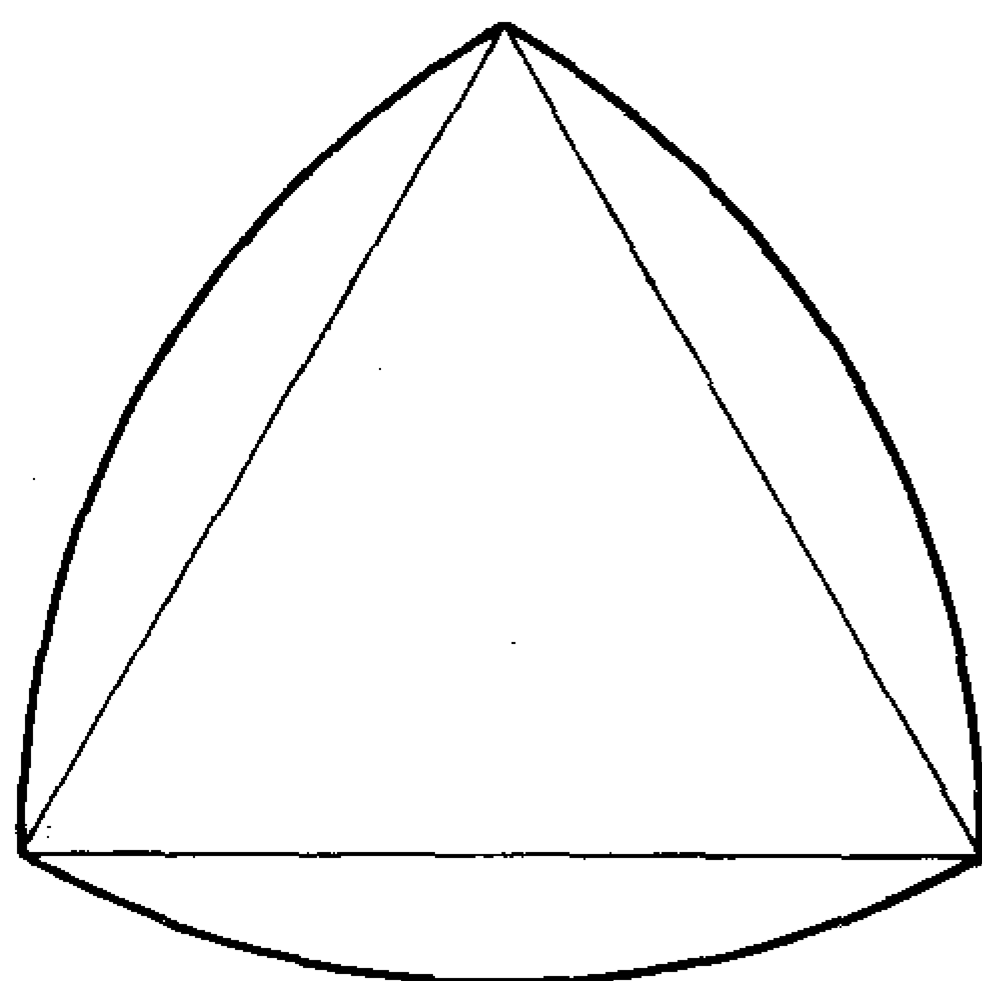


参考书：DAVID WELLS，'puzzle page'，*Games and puzzles* September，1975.

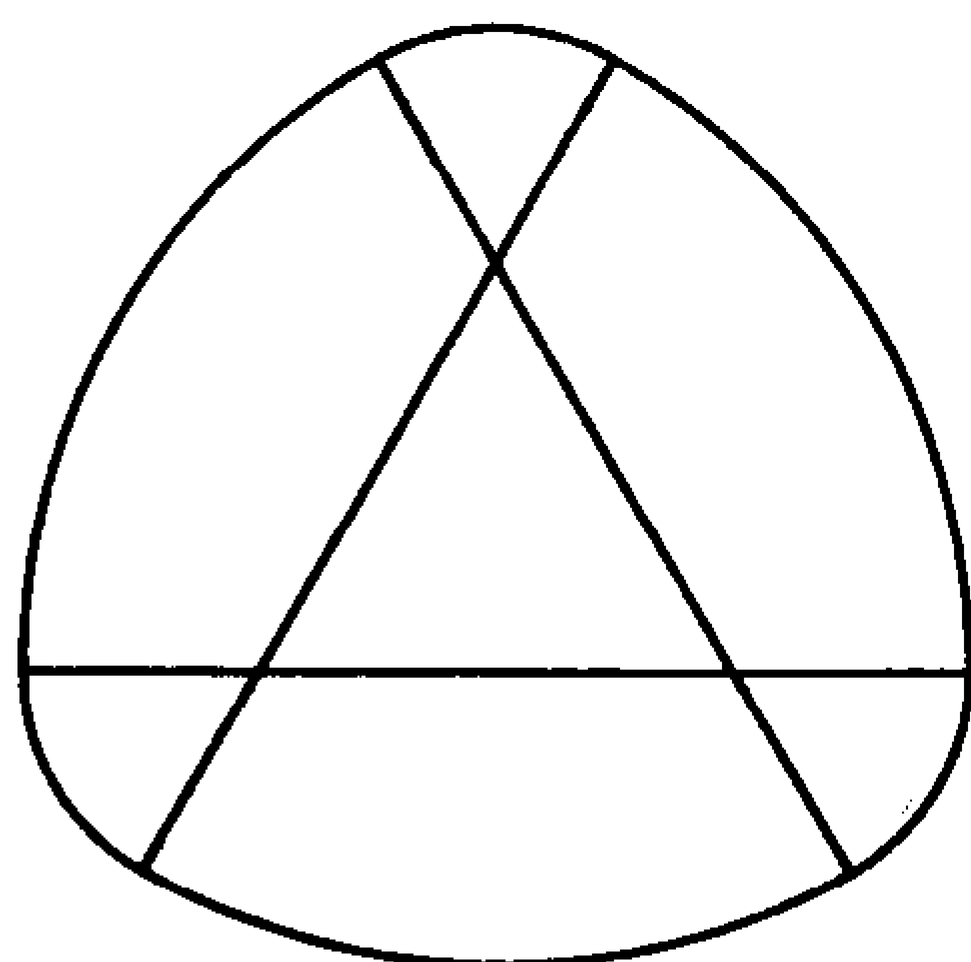
rollers　定宽曲线

一个外形是圆柱状的物体能平滑地运动而不颠簸是因为圆柱体的直径固定.但不是圆也可以有固定的直径.

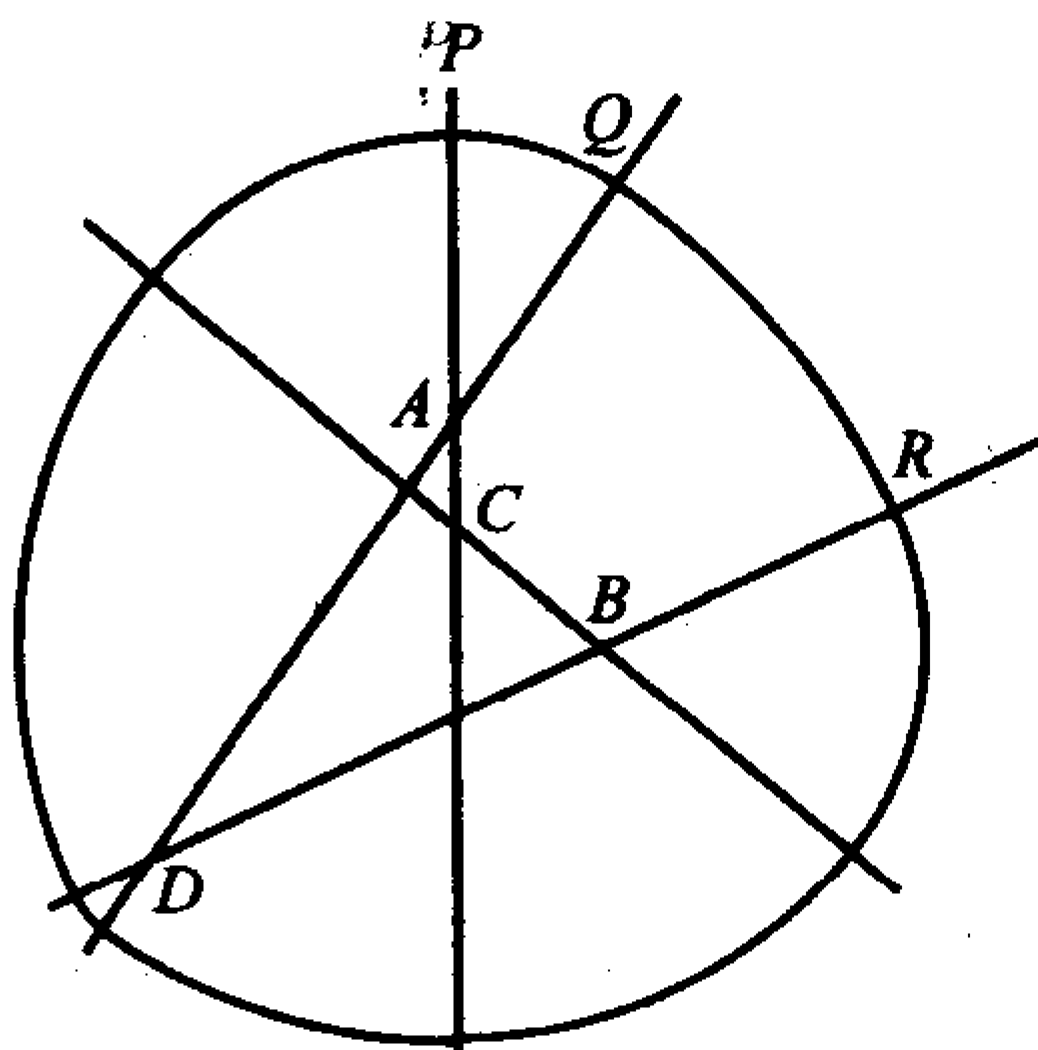
这就是劳伊鲁（Reuleaux）三角形，它由一个等边三角形加上三条以顶点为圆心的弧组成. 该图形的固定的直径等于三角形的边长.



从同一个三角形出发画六条弧又得到另一种定宽曲线，其直径等于这两条半径的和：



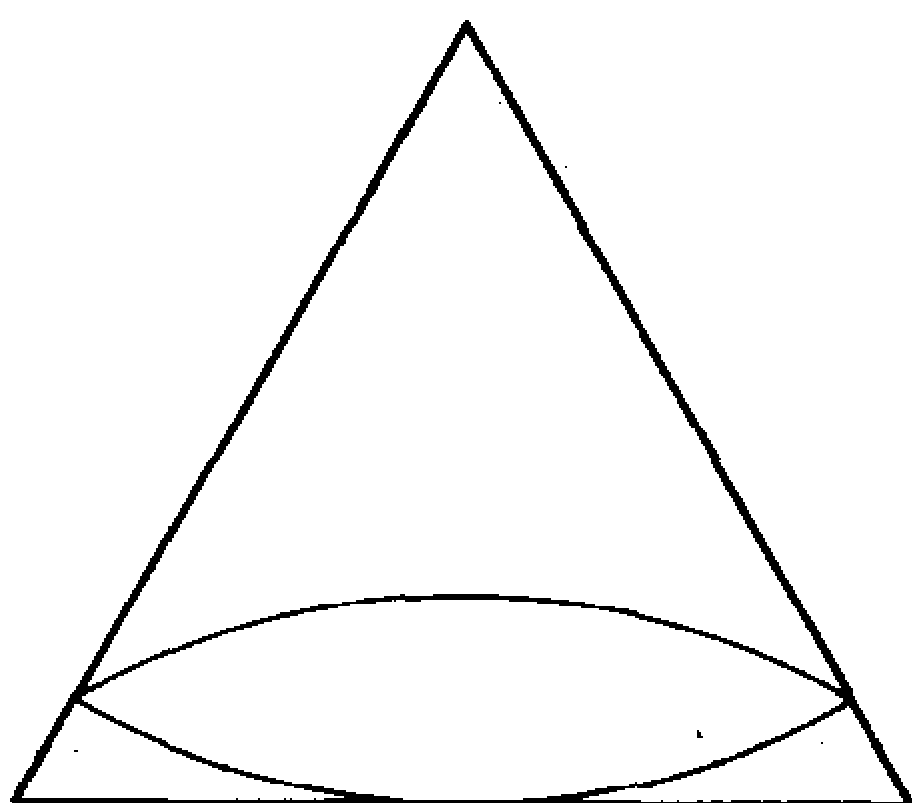
由此形成的这类定宽曲线不必是三角形，更不必是等边三角形：可以从任何条相交直线出发. 下图中给出四条直线，以 A 点为圆心画弧 PQ，然后以 D 点为圆心，画弧 QR. 再以 B 点为圆心画弧，继续画下去直至回到 A 点. 整个曲线就有一个固定的直径.



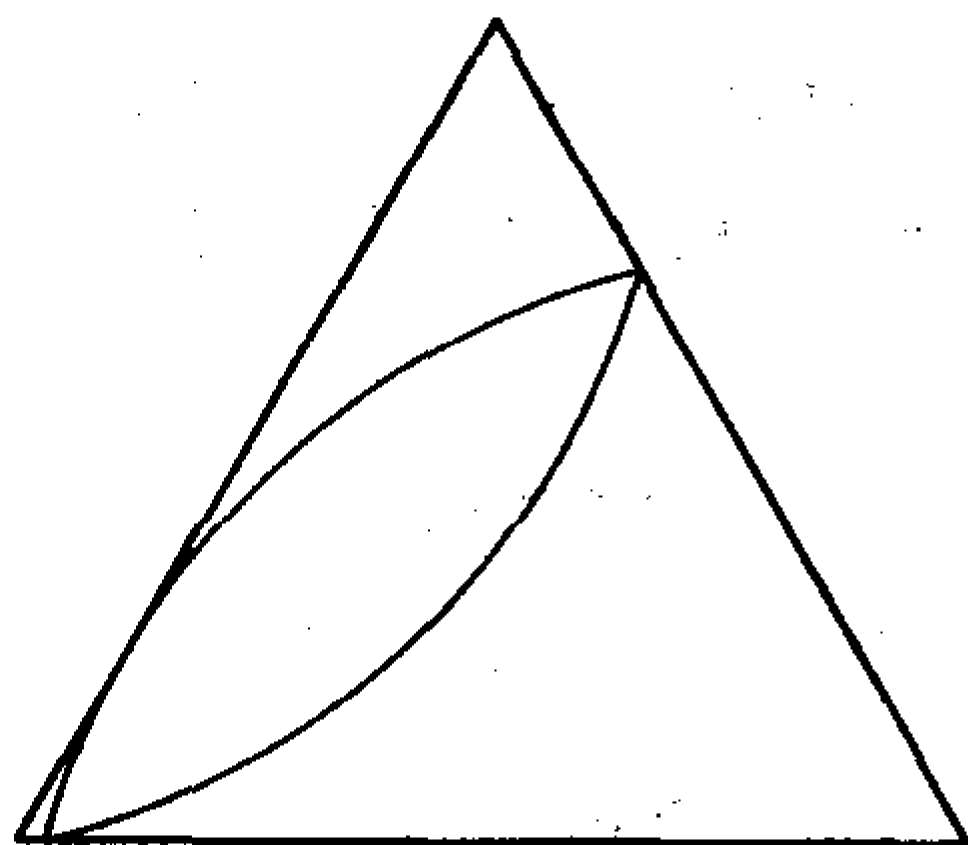
有固定直径 d 的所有曲线都有同一个周长，即有同一直径的圆的周长 πd.

rotors　转子

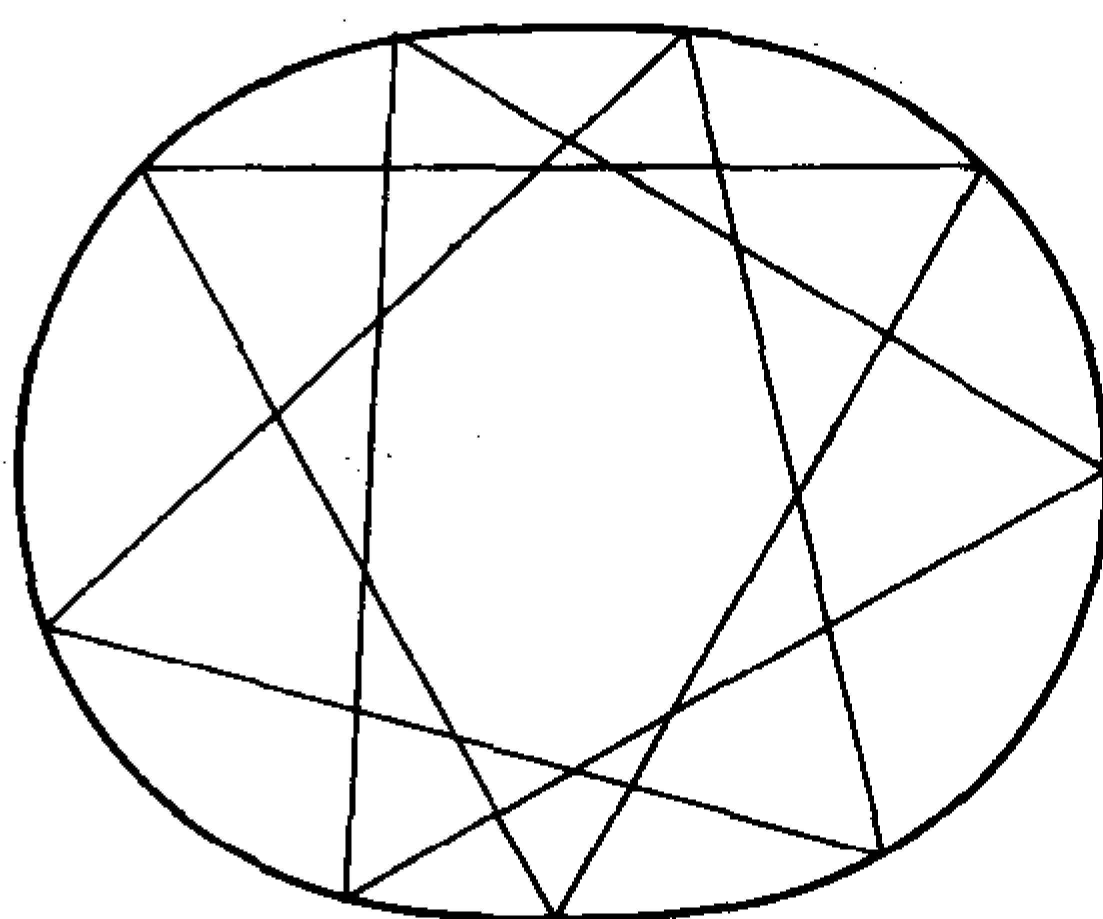
一个像正六边形那样的旋转对称的物体可以很容易在一个圆内旋转，该圆总与一边相切. 但是，无论是转子还是外面的曲线都不必是对称的.



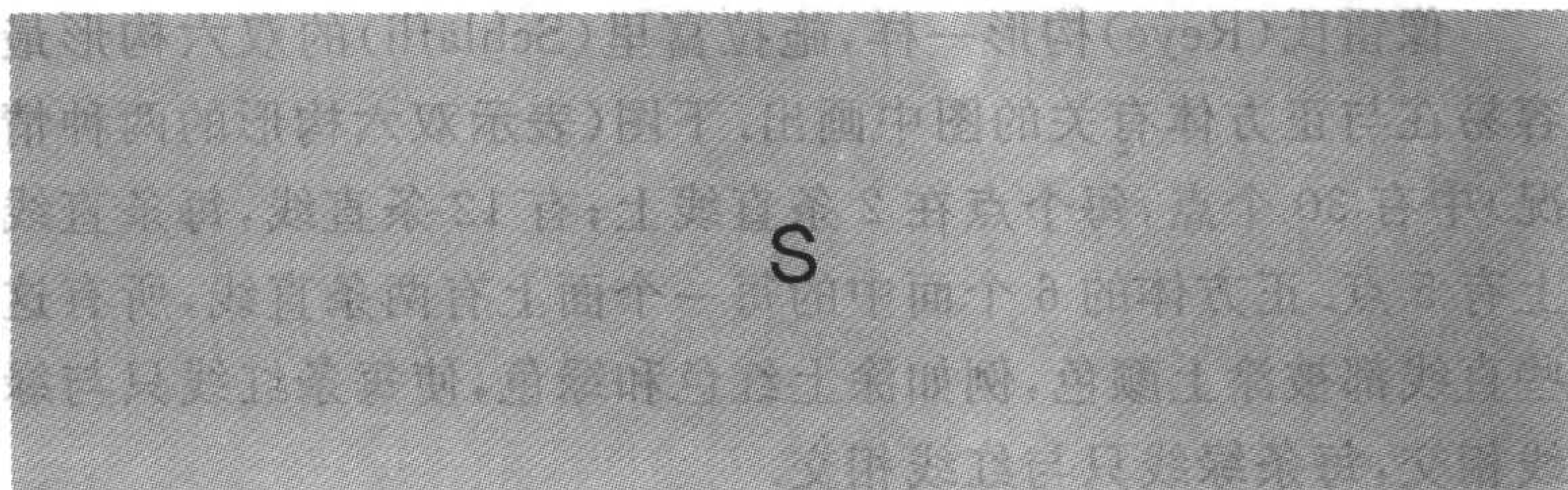
上图中等边三角形具有三阶旋转对称.转子是双面对称的，每一边都是圆弧，其圆心是三角形的顶点，且与三角形的对边相切.（转子的长等于该三角形的高.）



柱体也不必是圆柱.等边三角形能在下面这样的柱体中旋转：

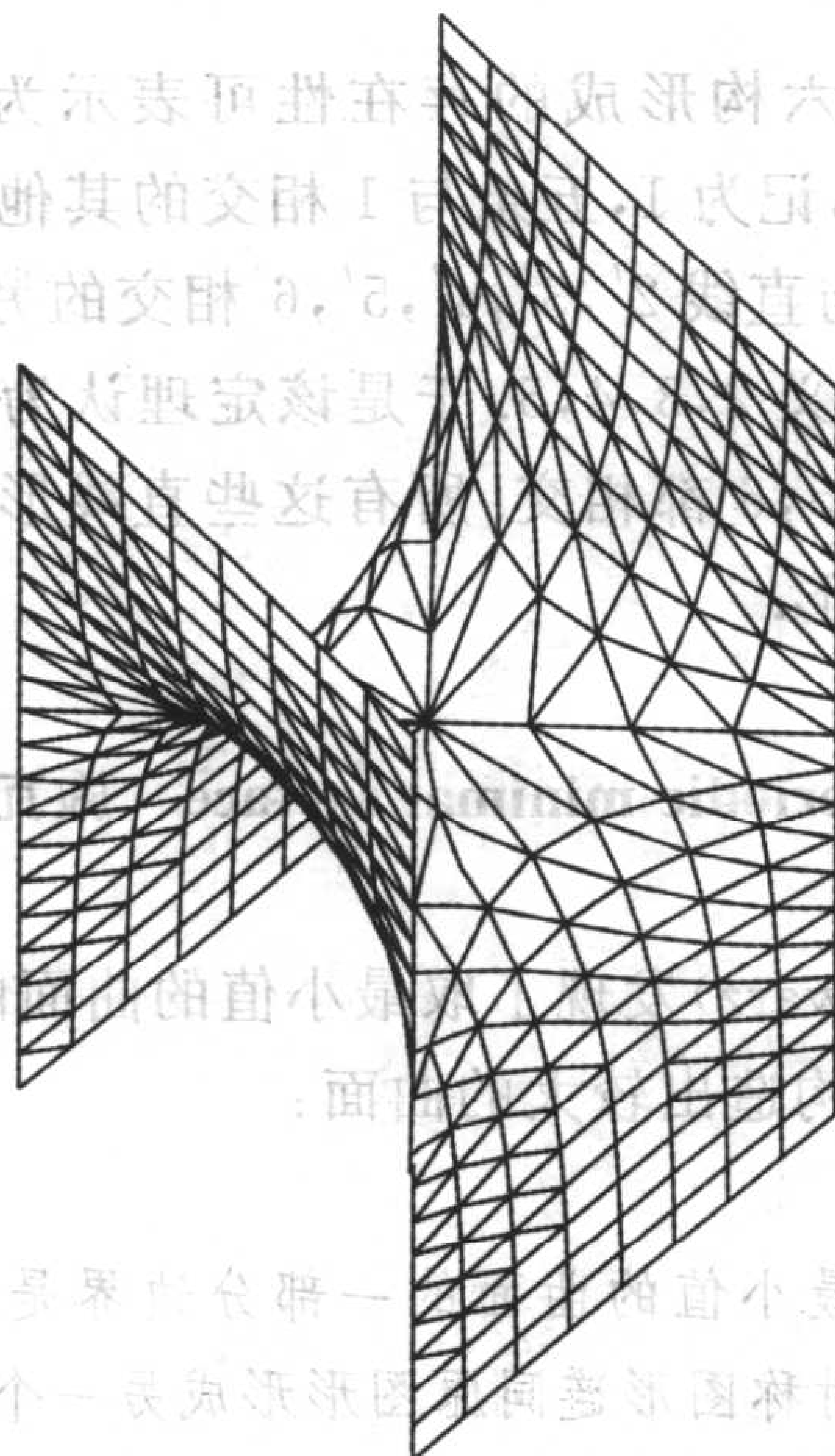


参考书：STEINHAUS, *Mathematical Snapshots* 3rd edn Oxford, University Press, Oxford, 1969.



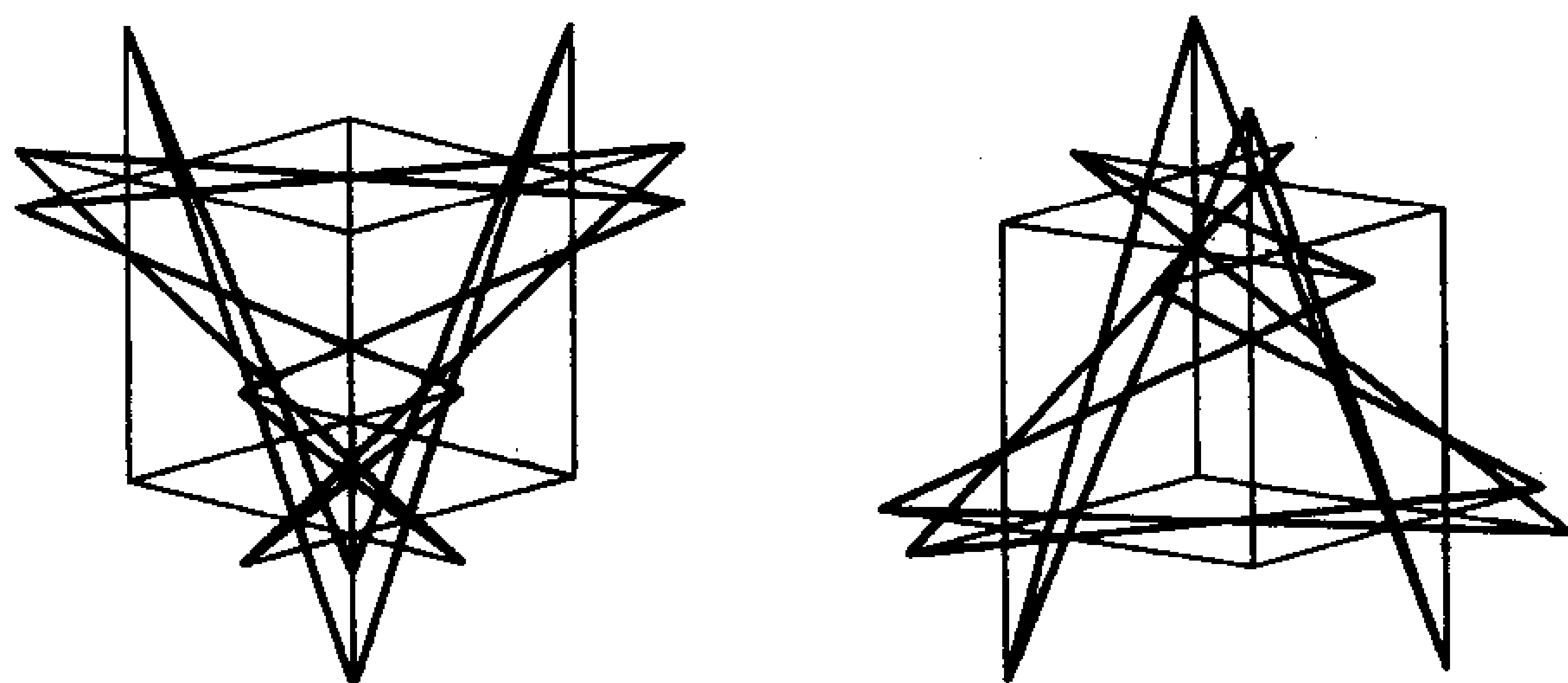
Scherk's surface　歇尔克曲面

歇尔克(Scherk)曲面是一个取最小值的曲面，它通常用最很简单的方程 $e^z\cos y=\cos x$ 表示. 它跨越经过水平的正方形的顶点的四条竖直的平行直线. 下图中该曲面也被上下两个水平的平面所截.



Schläfli's double six　施拉富里的双六构形

像雷氏(Reye)构形一样,施拉富里(Schläfli)的双六构形最容易在与正方体有关的图中画出.下图(表示双六构形的两种情况)中有 30 个点,每个点在 2 条直线上;有 12 条直线,每条直线上有 5 点.正方体的 6 个面中的每一个面上有两条直线,所有这些直线都被涂上颜色,例如涂上红色和绿色,使每条红线只与绿线相交,每条绿线只与红线相交.



施拉富里双六构形成的存在性可表示为著名的"双六定理".取一条直线,记为 1,五条与 1 相交的其他面上的直线记为 2′,3′,4′,5′,6′,与直线 2′,3′,4′,5′,6′相交的另一条唯一的直线记为 6.类似地定义 2,3,4,5.于是该定理认为存在唯一的直线 1′与直线 2,3,4,5,6 都相交.所有这些直线形成的构形就是施拉富里的双六构形.

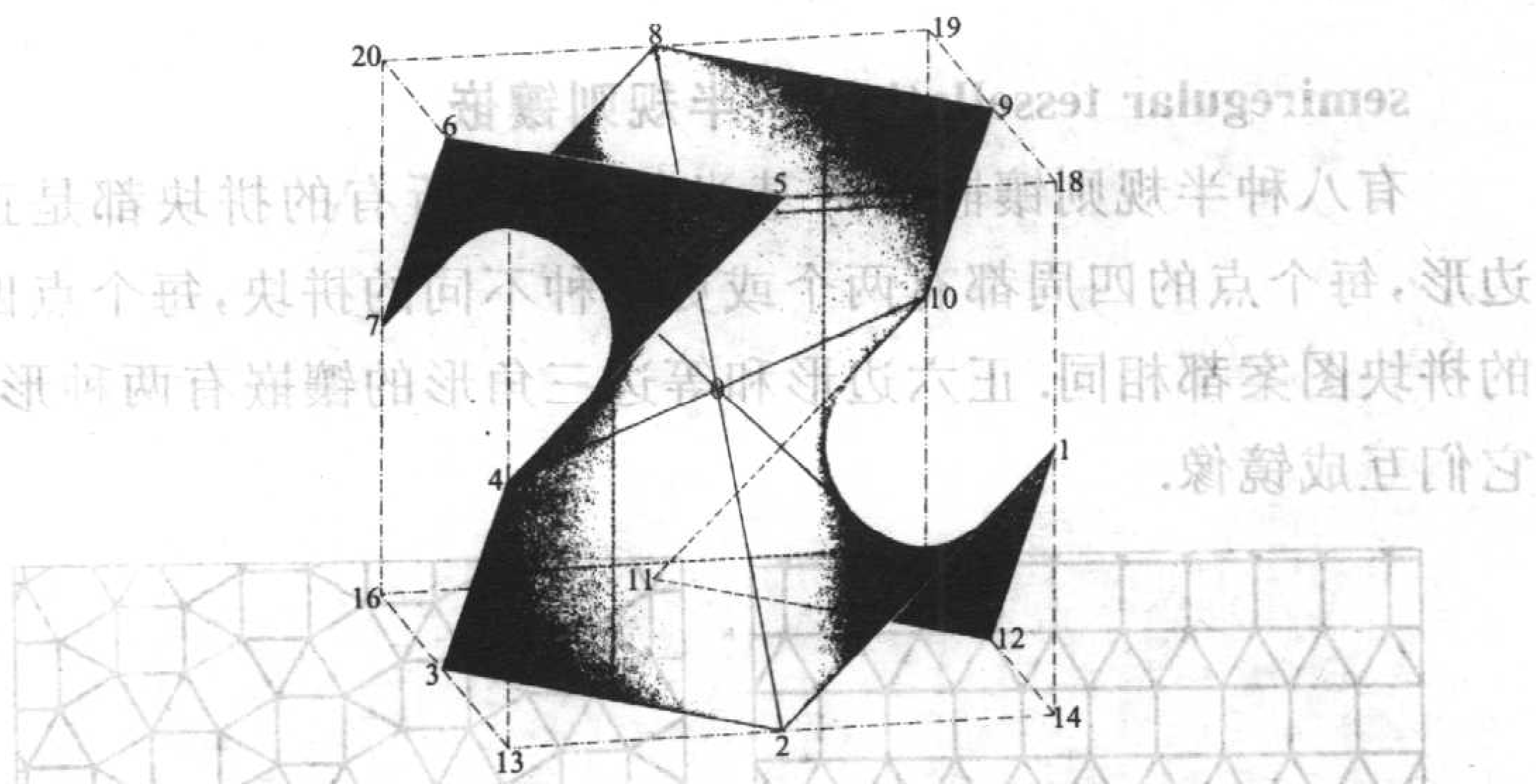
Schwarz's periodic minimal surface　施瓦兹的周期性取最小值的曲面

施瓦兹(Schwarz)发现了取最小值的曲面的两个原则,这使他从较小的单位构造出较大的曲面:

> 如果取最小值的曲面的一部分边界是直线,那么它关于这条直线的对称图形连同原图形形成另一个取最小值的曲面.
>
> 如果一个取最小值的曲面与一个平面相交成直角,那

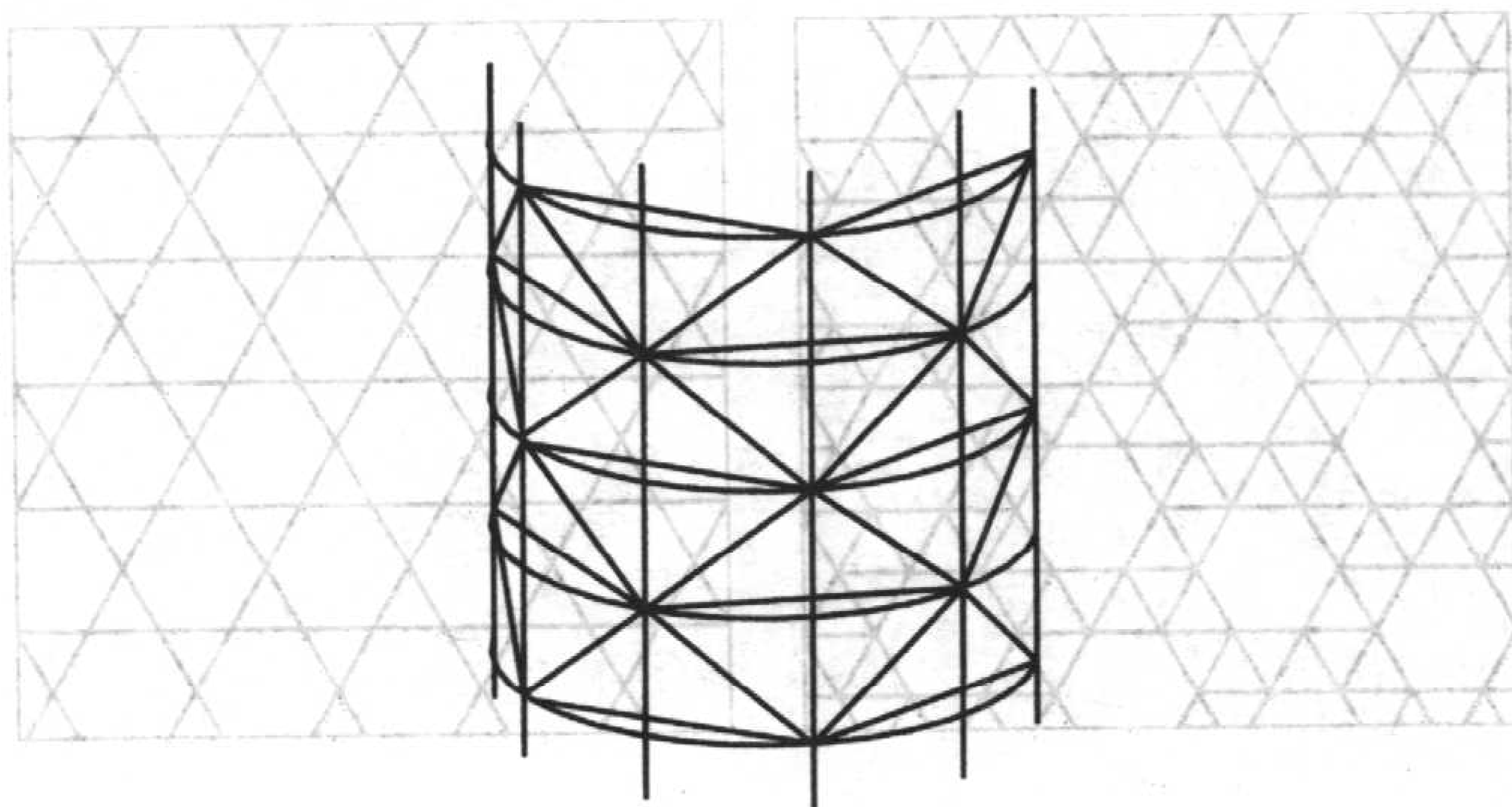
么它关于该平面的镜像连同原图形也形成一个取最小值的曲面.

施瓦兹的周期性取最小值的曲面由一个正方体的各个面上的直线组成. 通常用这些正方体填满空间,得到一个无限次重复的取最小值的曲面.



Schwarz's polyhedron 施瓦兹多面体

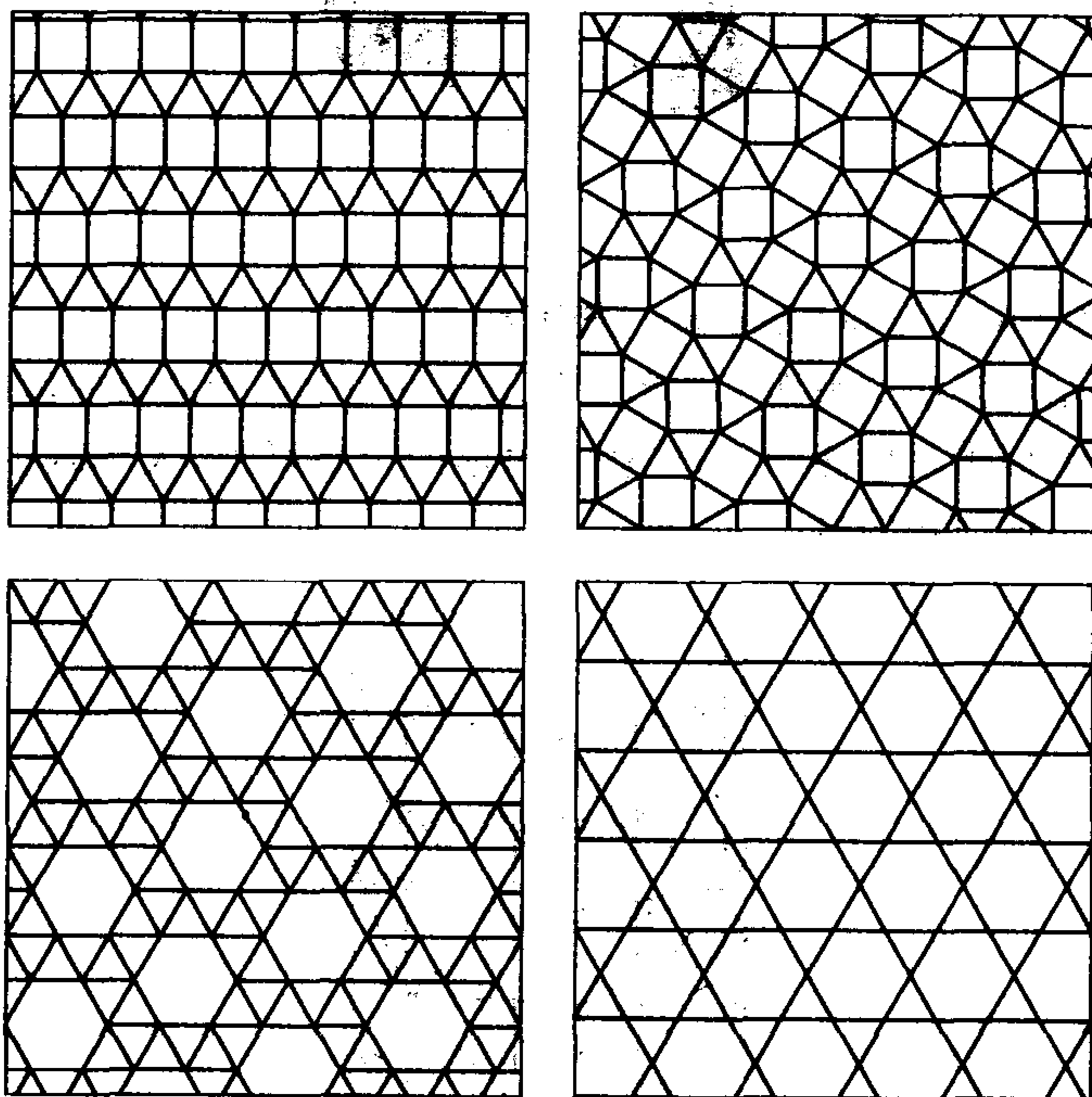
用许多小的平面三角形近似地度量一个光滑曲面的面积在直观上似乎是可能的,当这些三角形的个数增加,大小减少时,就求出该面积的极限.

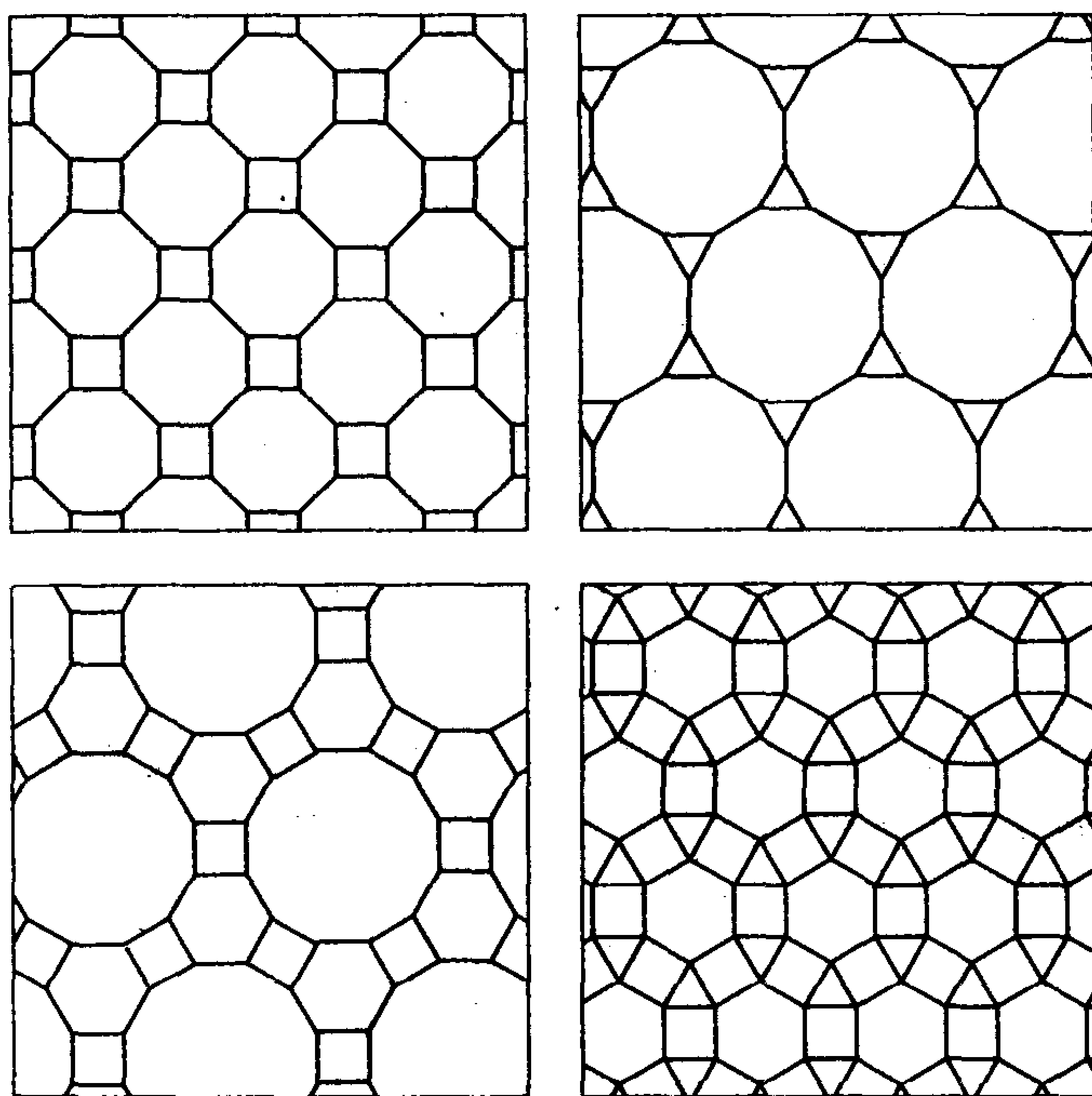


施瓦兹举出了一个例子说明直观会犯多么大的错误.取柱面为基本曲面.用 $2n$ 条竖直方向的等间隔的直线沿平行于柱面的轴的方向分割柱面,用 $2n^3$ 个垂直于柱面的轴的等间隔的圆分割柱面.如上图连接这些交点,形成一个像手风琴似的褶状曲面,然后让 n 趋向于无穷大.三角形转而紧靠曲面,并不是越来越接近于柱面,总面积趋向于无穷大.

semiregular tessellations　半规则镶嵌

有八种半规则镶嵌或阿基米德镶嵌,所有的拼块都是正多边形,每个点的四周都有两个或更多种不同的拼块,每个点四周的拼块图案都相同.正六边形和等边三角形的镶嵌有两种形式,它们互成镜像.





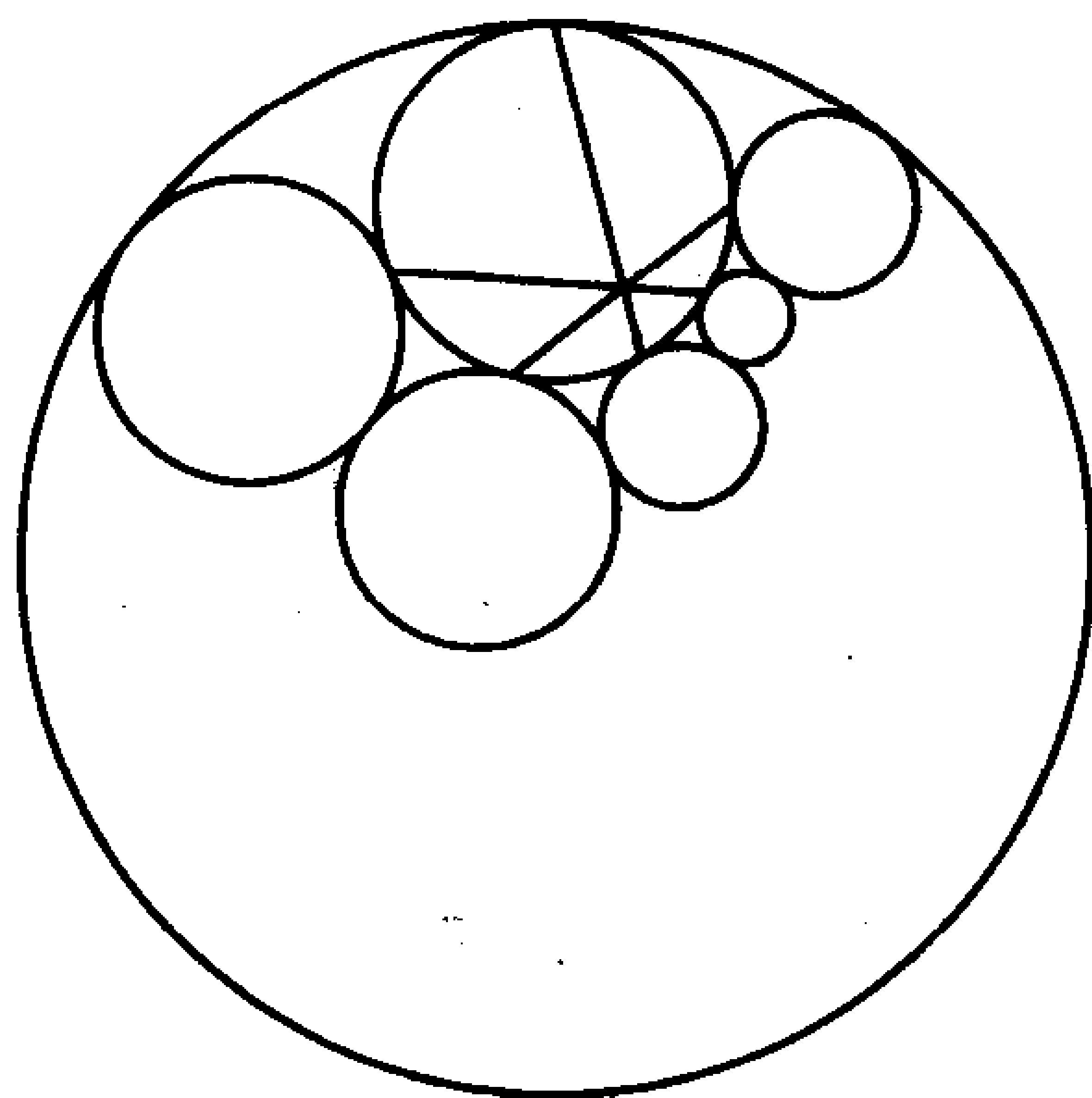
如果各点四周的铺砌图案不必相同,那么正多边形镶嵌可能有无穷多种.一个简便的构造法可以这样完成:先取一个半规则镶嵌,然后把铺块移开,再用更多的正多边形填满空隙,就像用这种方法从正多边形镶嵌构成(至少)两个半规则镶嵌那样.

seven circles theorem 七圆定理

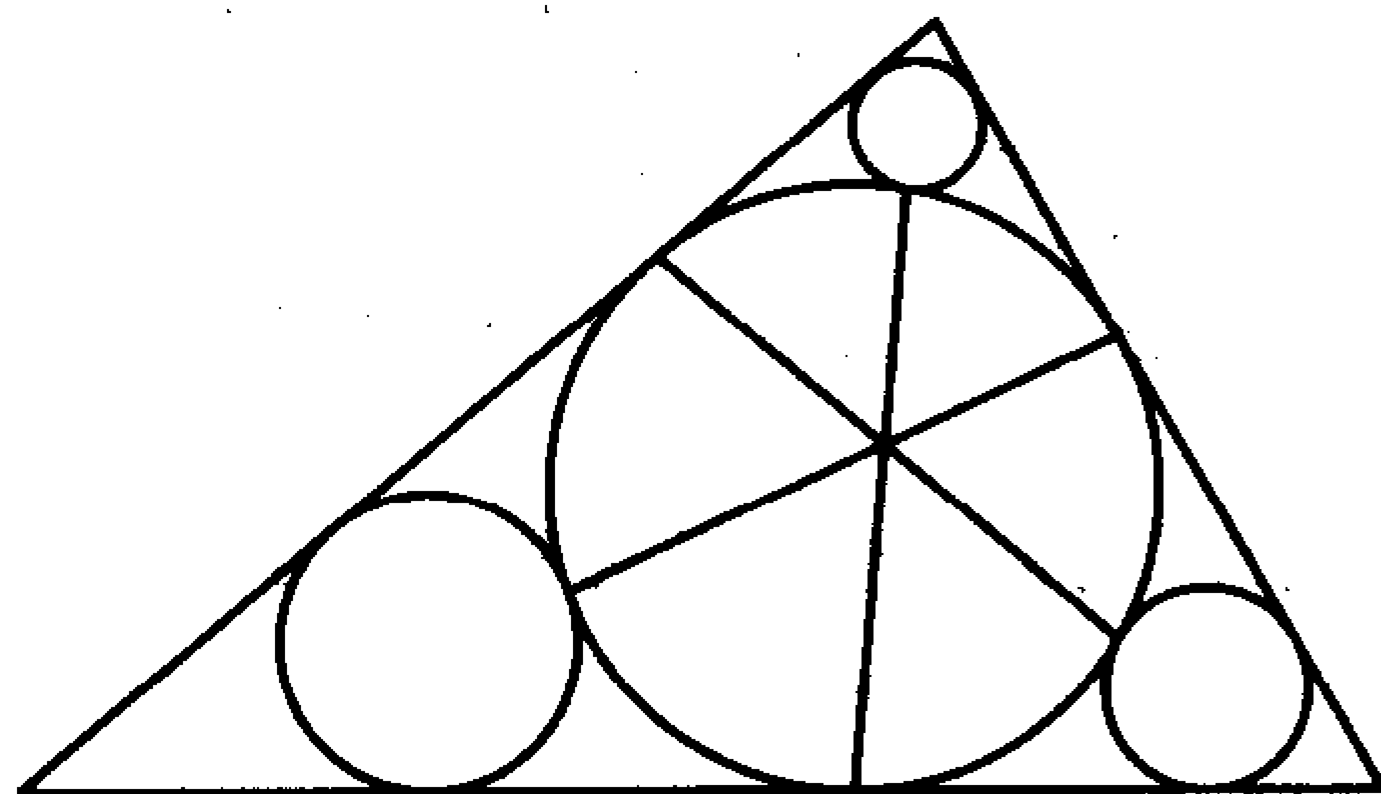
先画一个圆,再在圆的旁边放六个圆.它们可以任意大小,但是必须依次相切,并和原来的圆相切.连接相对两切点的三条直线共点.

这一基本图形有不少变式.下一页图中原来的圆在顶上:添加的圆中有五个互相外切,但第六个圆夹在原来的圆和所有另

五个添加的圆之间.



另一个变式是:添加的圆中有三个圆的半径无限增加,结果这些圆变成了直线,成了一个三角形的边.定理仍然成立.

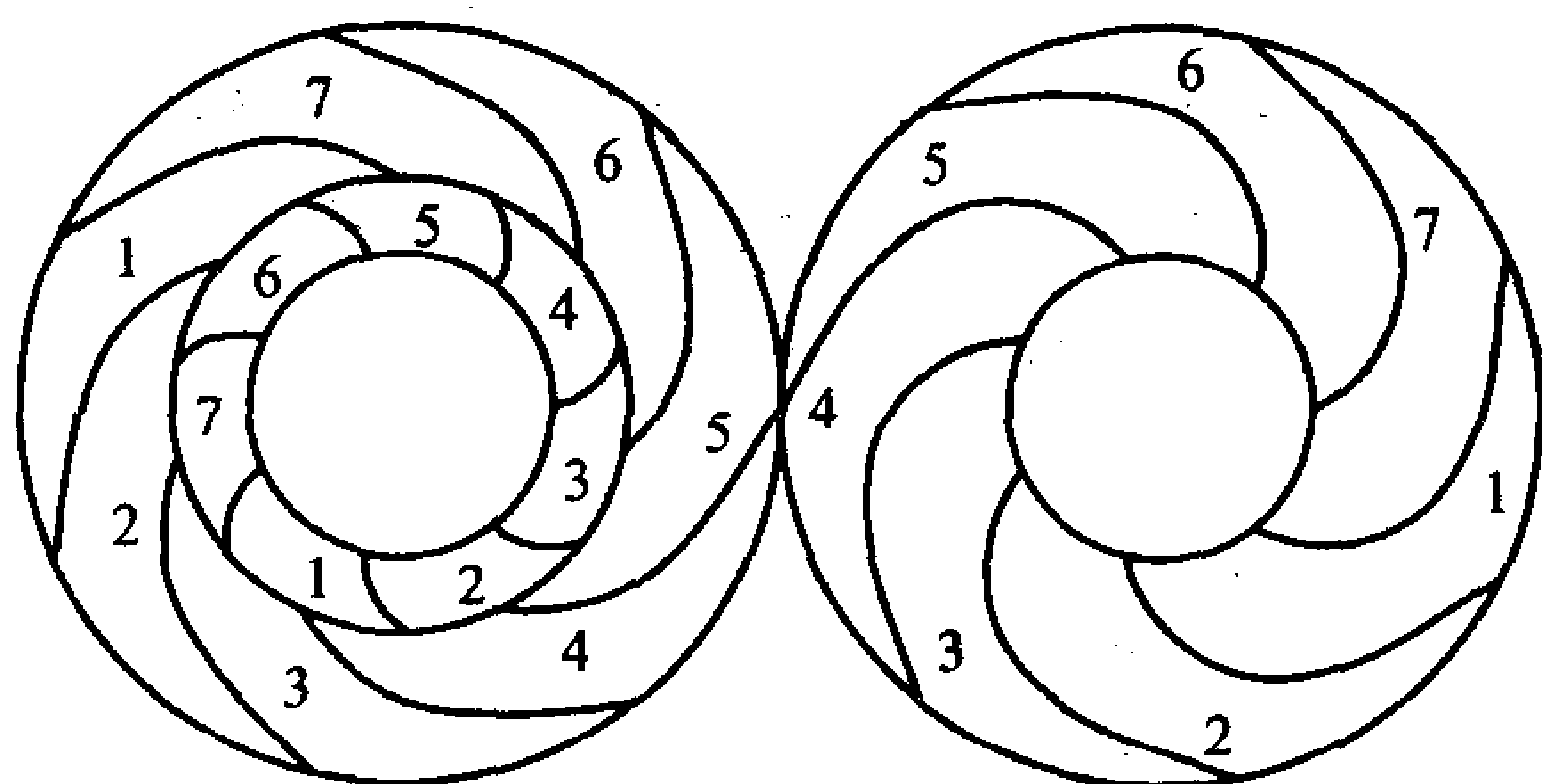


参考书:C. J. A. EVELYN, G. B. MONEY - COUTTS, and J. A. TYRRELL, *The Seven Circles Theorem and Other New Theorem* Stacey. International, London, 1974.

seven colour torus 七色环形圆纹曲面

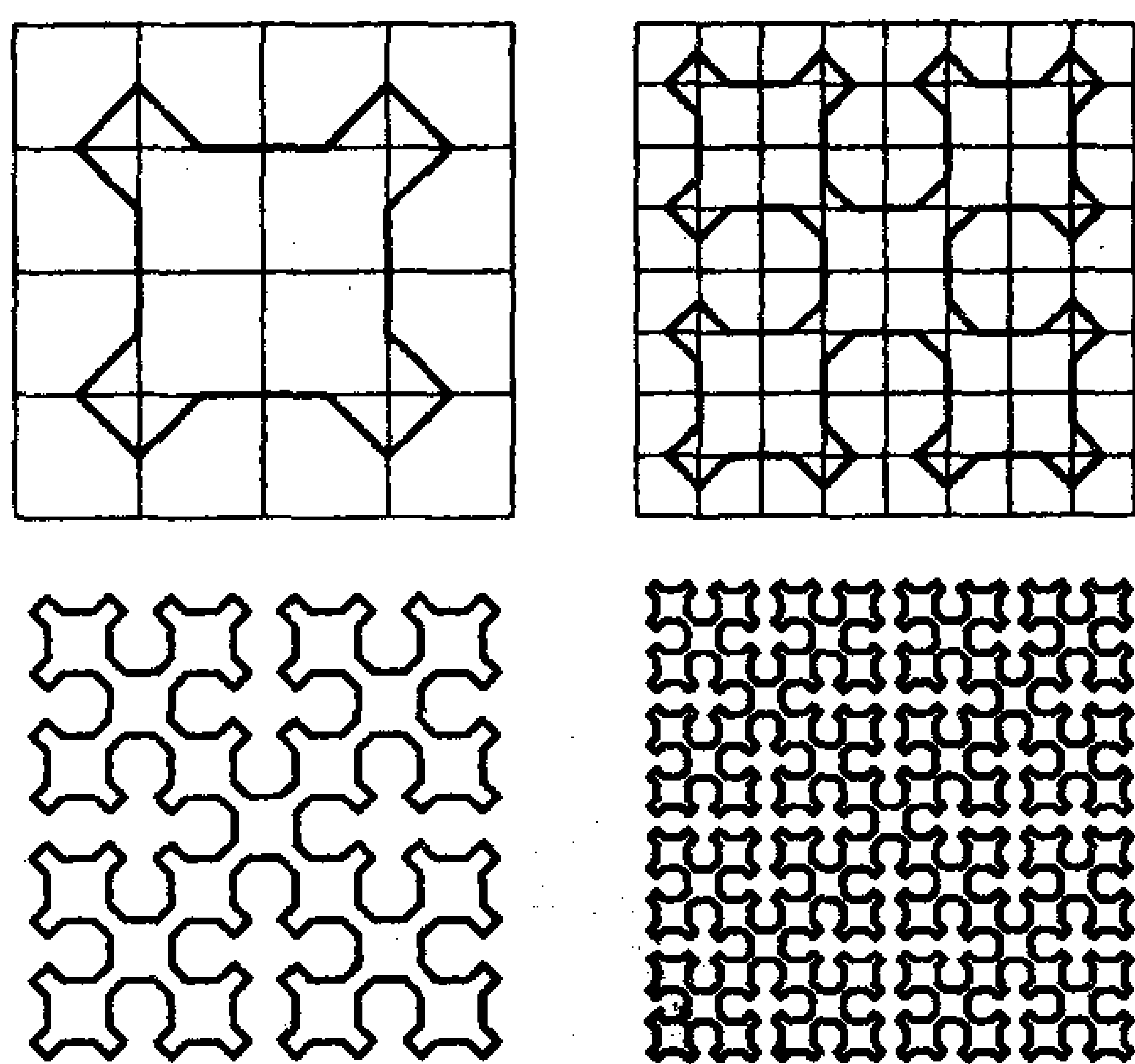
一幅平面地图能用至多四种颜色涂色,使相邻的区域不涂同一颜色.一幅七色环形圆纹曲面上的地图可能需要七种颜色.在这种地图中每一个区域都与另外六个区域中的每一个有共同

的边界，所以对它涂色必须用七种颜色.



Sierpinski's square snowflake 谢尔宾斯基正方形雪花

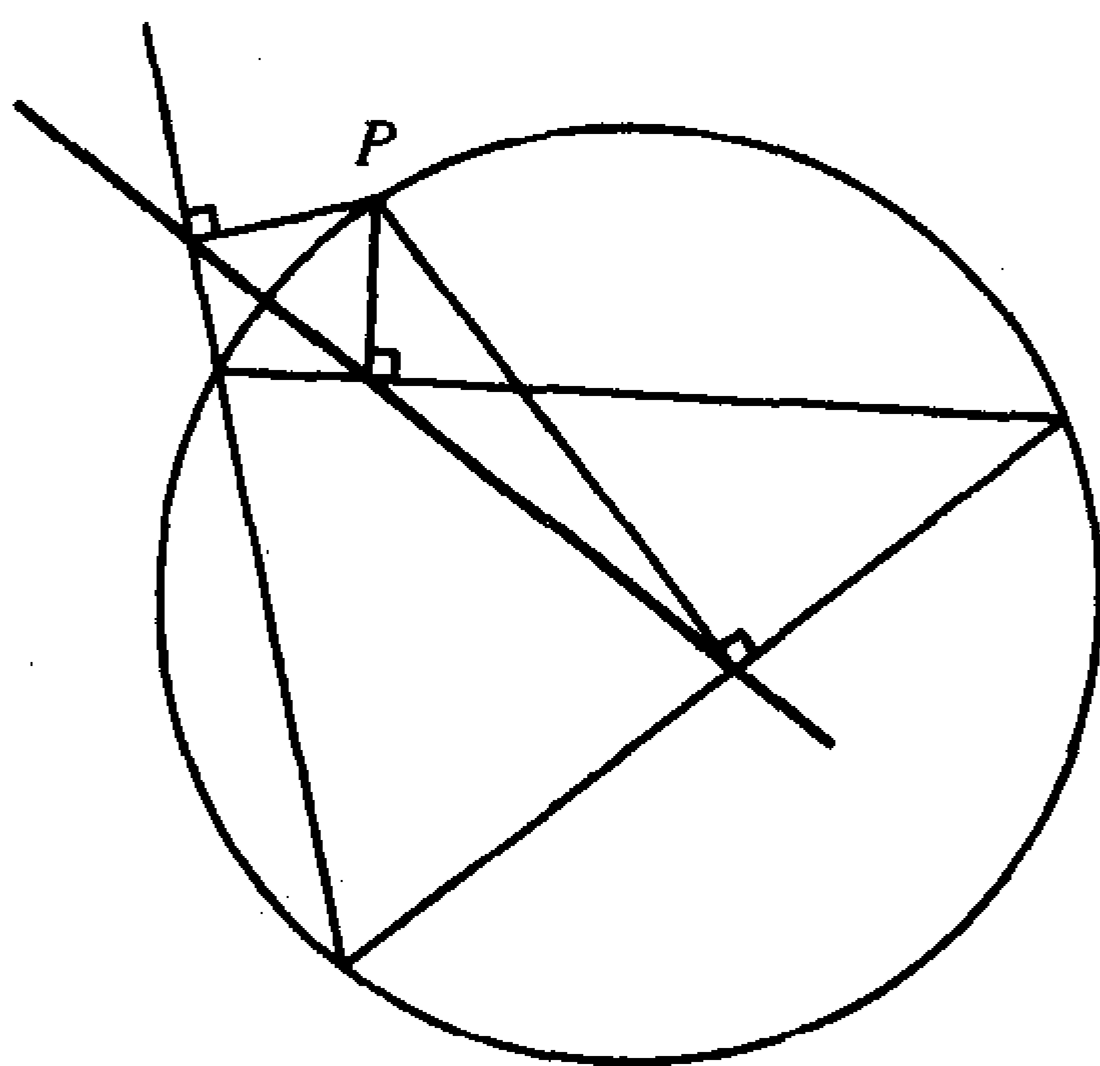
这是谢尔宾斯基的画一条曲线经过正方形内每一个点的问题的解. 下图表示逼近这条曲线的前四步的情况. 前两步以正方形为背景，画出这条曲线的路径.



每一步都这样进行：把每一个正方形分成四个小正方形，再对这四个小正方形按第一步那样画出曲线. 然后把已画好的正方形像第二步那样连接起来. 这一过程的极限就是经过正方形内每一个点的曲线.

Simson line　西姆松线

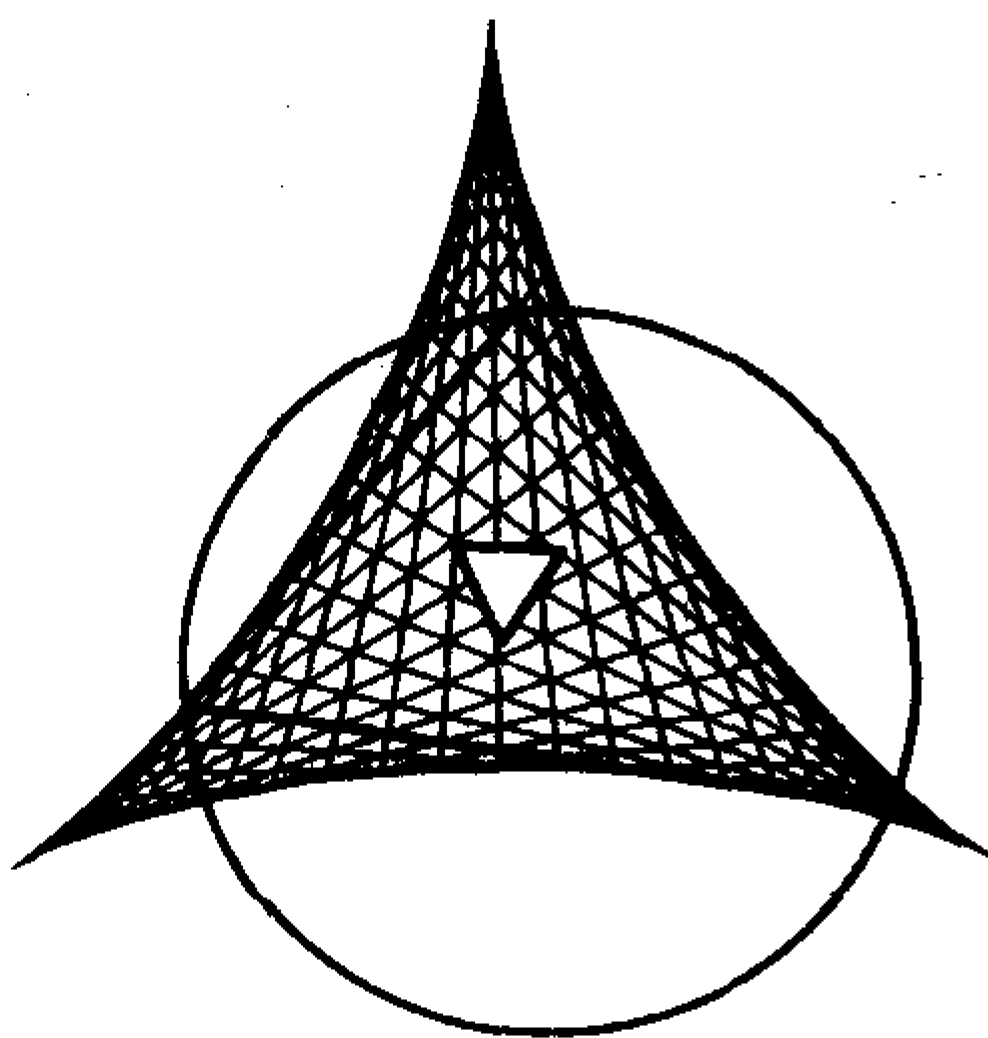
任作一个三角形，在它的外接圆上取一点 P. 过 P 点作该三角形的三边的垂线. 这三个垂线垂足共线，这条线就称为该点的西姆松线，是以罗伯特·西姆松(Robert Simson)命名的，他因出版欧几里得的《几何原本》而著称.



用线段连接三角形的外接圆上任意一点和垂心. 这条线段的中点在九点圆上，也在该点的西姆松线上.

三角形的外接圆上的直径的两个端点的西姆松线互相垂直，且相交在九点圆上.

圆的内接三角形的顶点的西姆松线形成与原三角形相似的另一个三角形.

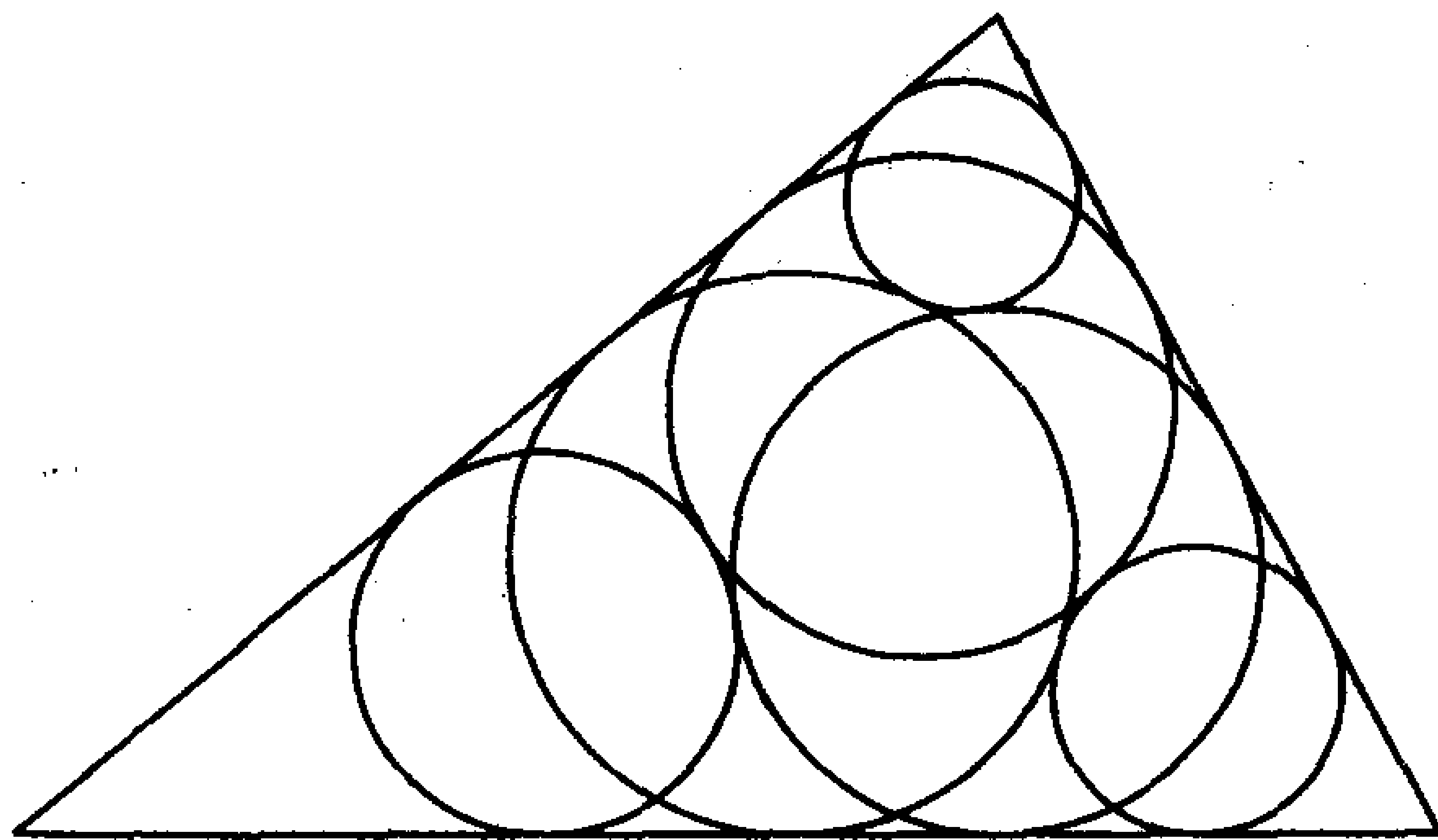


圆上的所有的点的西姆松线包络出一条三尖点内摆线. 这一包络之所以相当著名是因其形状与原三角形的形状无关. 三角形的每一边都与三尖点内摆线相切,且切点到该边中点的距离等于九点圆被该边所截得的弦. 三尖点内摆线的面积等于该三角形的外接圆的面积的一半. 三尖点内摆线的内切圆就是原三角形的九点圆.

原三角形的莫莱三角形与三尖点内摆线的方向相同.

six circles theorem 六圆定理

从一个三角形出发，画一个圆与两边相切，再画一个圆与另两边相切，且与第一个圆相切. 用同样的方法绕三角形转得到更多的圆. 第六个圆必与第一个圆相切，这六个圆组成一个圆链.



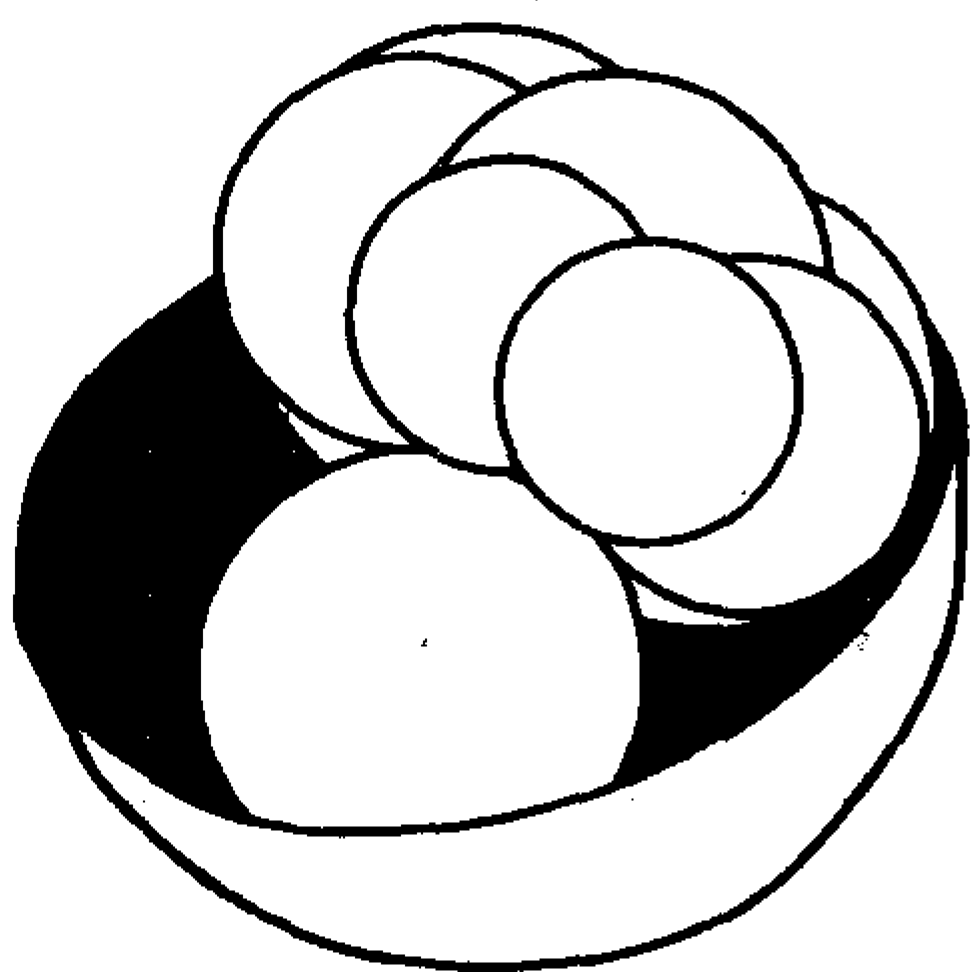
参考书:C. J. EVELYN, G. B. MONEY-COUTTS and J. A. TYRREEL, *The Seven Circles Theorem and Other New Theorems*, Stacey International, ondon, 1974.

Soddy's hexlet 索迪六球定理

F·索迪(Friderick Soddy)爵士是一位化学家,他发现了链锁反应律,放射性元素按照这一定律蜕变为另一些元素,他还发

现一个著名的球链定理.

设想有这样一个球链,它的每一个球都与两个中心球和一个容纳这个球链的球相切.



这样的球链能否像斯坦纳圆链那样永远闭合,即最后一个球与第一个球相切呢?索迪证明了的确如此.无论第一个球放在那里,而且球链永远包含六个球.

此外,球链中的六个球的球心,它们依次相切的六个切点都在同一平面内,有两个平面与这六个球都相切,球链的两侧各有一个平面.

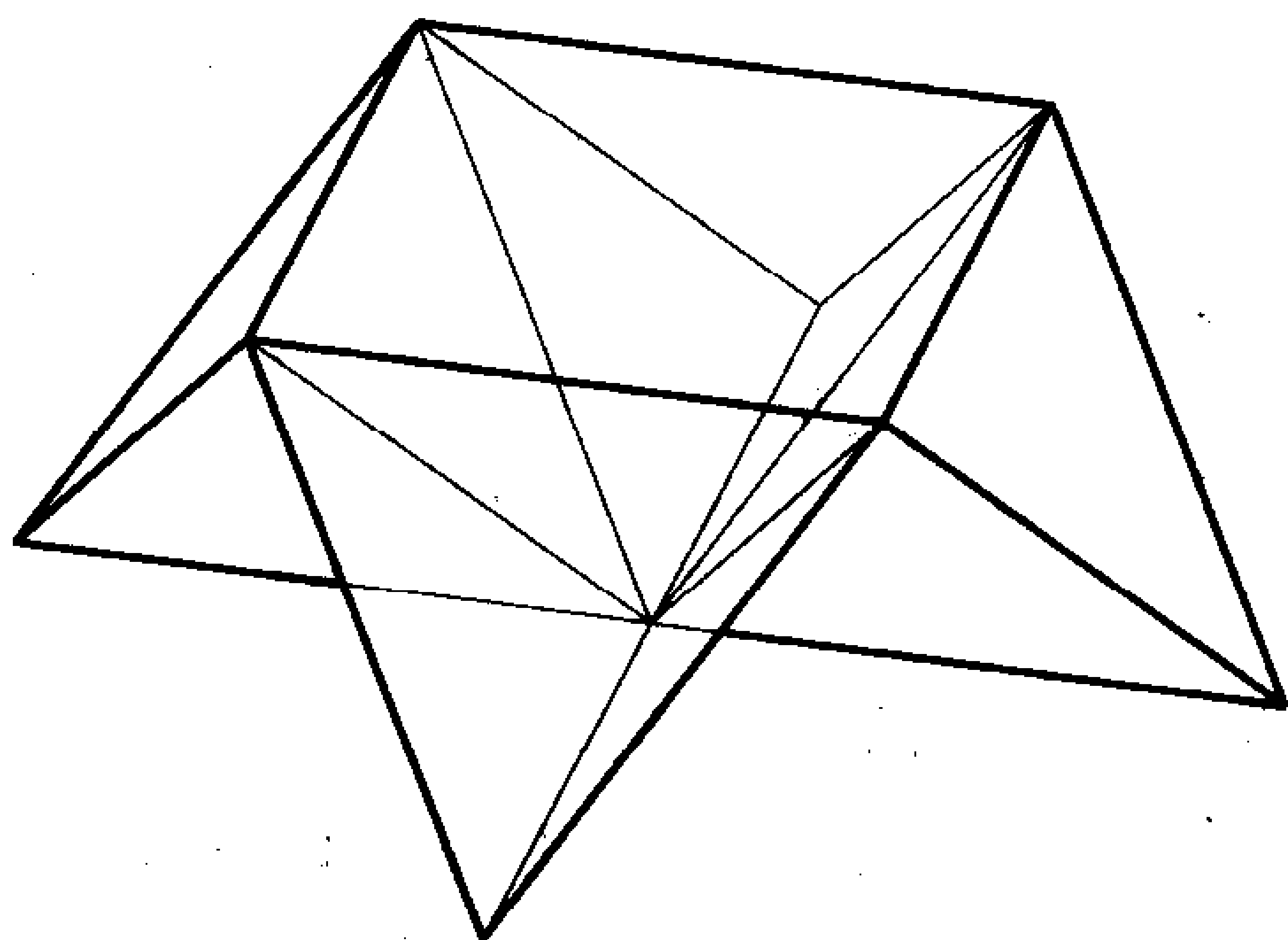
它与斯坦纳圆链的确是十分类似.索迪图可以这样得到:先将六个同样的球放在第七个相等的球的周围,它们都夹在两个平行平面之间,然后将它们反演.

space-filling polyhedra　能填满空间的多面体

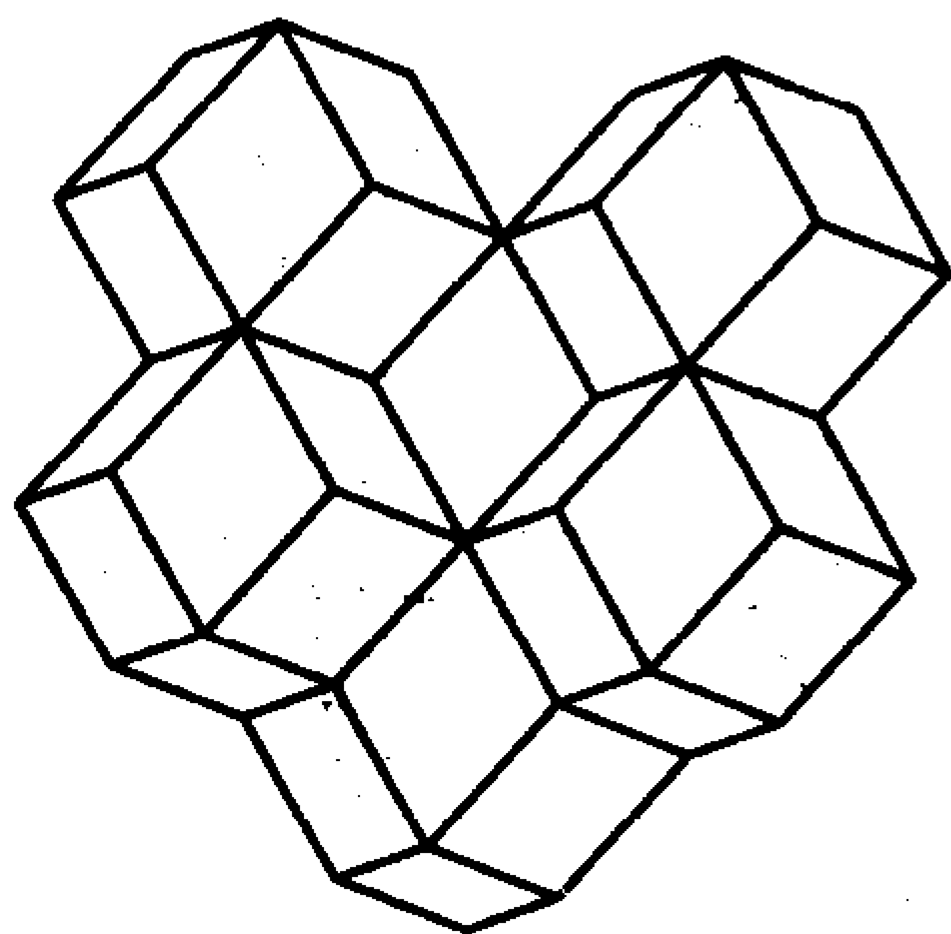
正方体显然能填满空间.至于像其他一些正多面体这样的立体图形,只有正八面体和正四面体的一个组合能填满空间:在一点的周围有六个正八面体和八个正四面体这一种方式能填满空间,它能扩展到无限.为了看到这一点,取四个正方体,排成一个正方形.在每一个正方体中连接一些相对的顶点可以得到一个内接正四面体,于是得到由四个正四面体组成的环,下方的一

个顶点是公共的.

中间的空间是正八面体的一半;对粘在一起组成一个大正方体的八个正方体实施同样的操作,内部的空间就形成一个完整的正八面体.对被正方体填满的整个空间重复这一操作,就得到由正八面体和正四面体填满的整个空间.

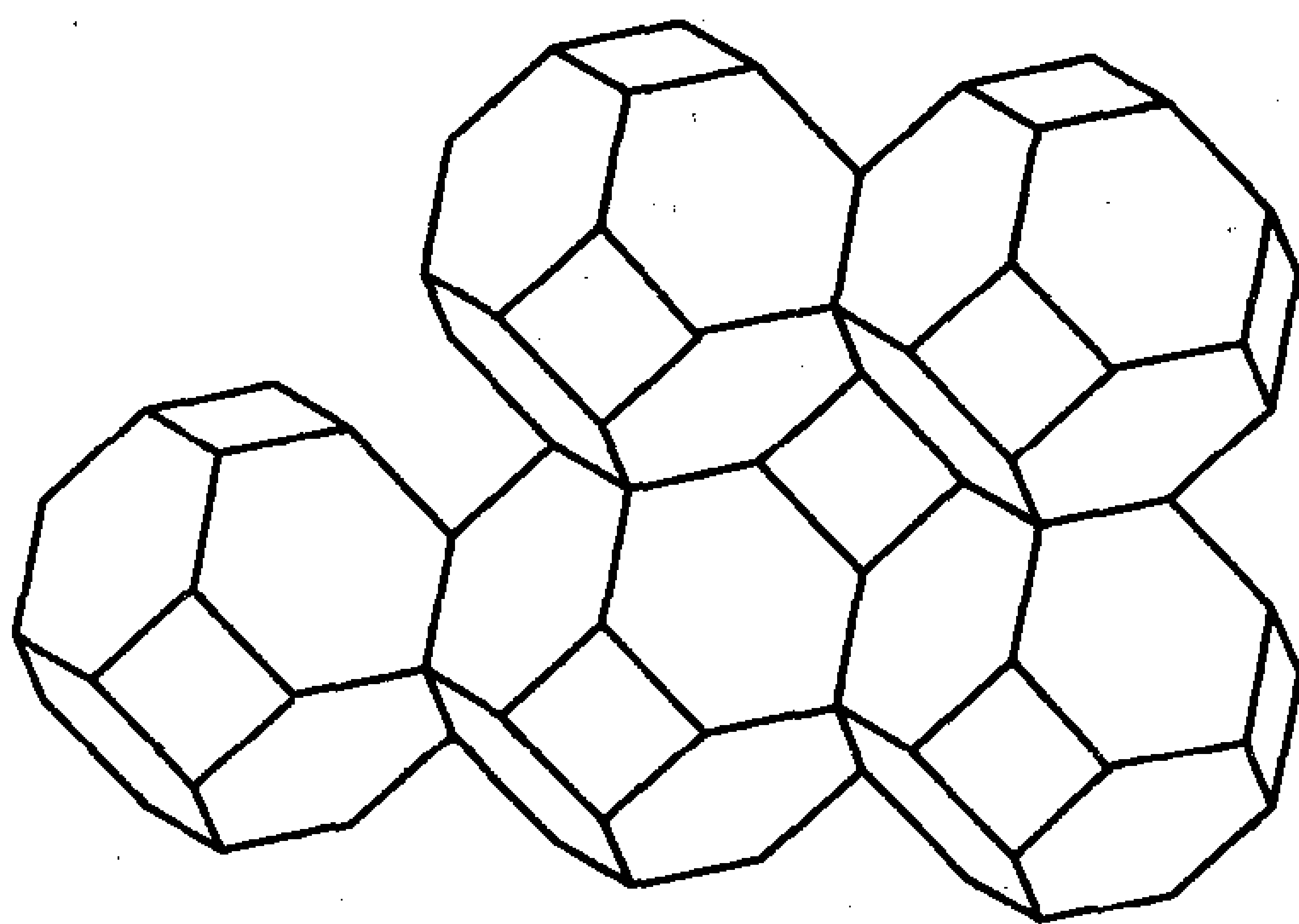


如果有许多球一层一层叠起,每一个交叉放置的层都一样,然后对球进行挤压,结果就得到由菱形十二面体组成的空间铺砌.

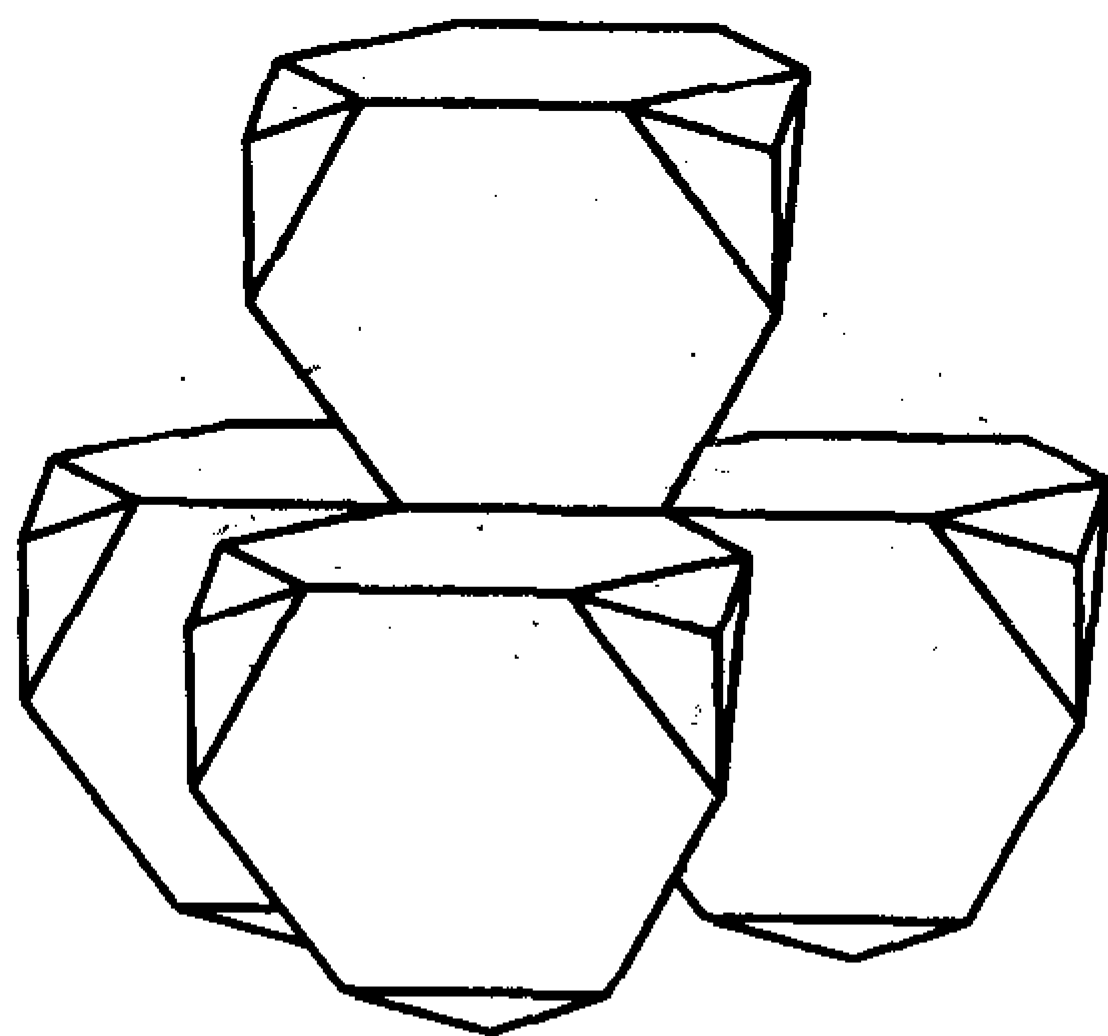


截头正八面体也能填满整个空间.(其体积是延伸截头正八面体的正方形的面使之与其他的面相交所得到的正方体的体积的一半.)下面的图表示正方形面与正方形面紧贴着的一排截头正八面体的部分情况.在同一水平面上再放几排,于是就填补了

这些平面的上下方，形成一个截头正八面体网络，其空隙也是截头正八面体.

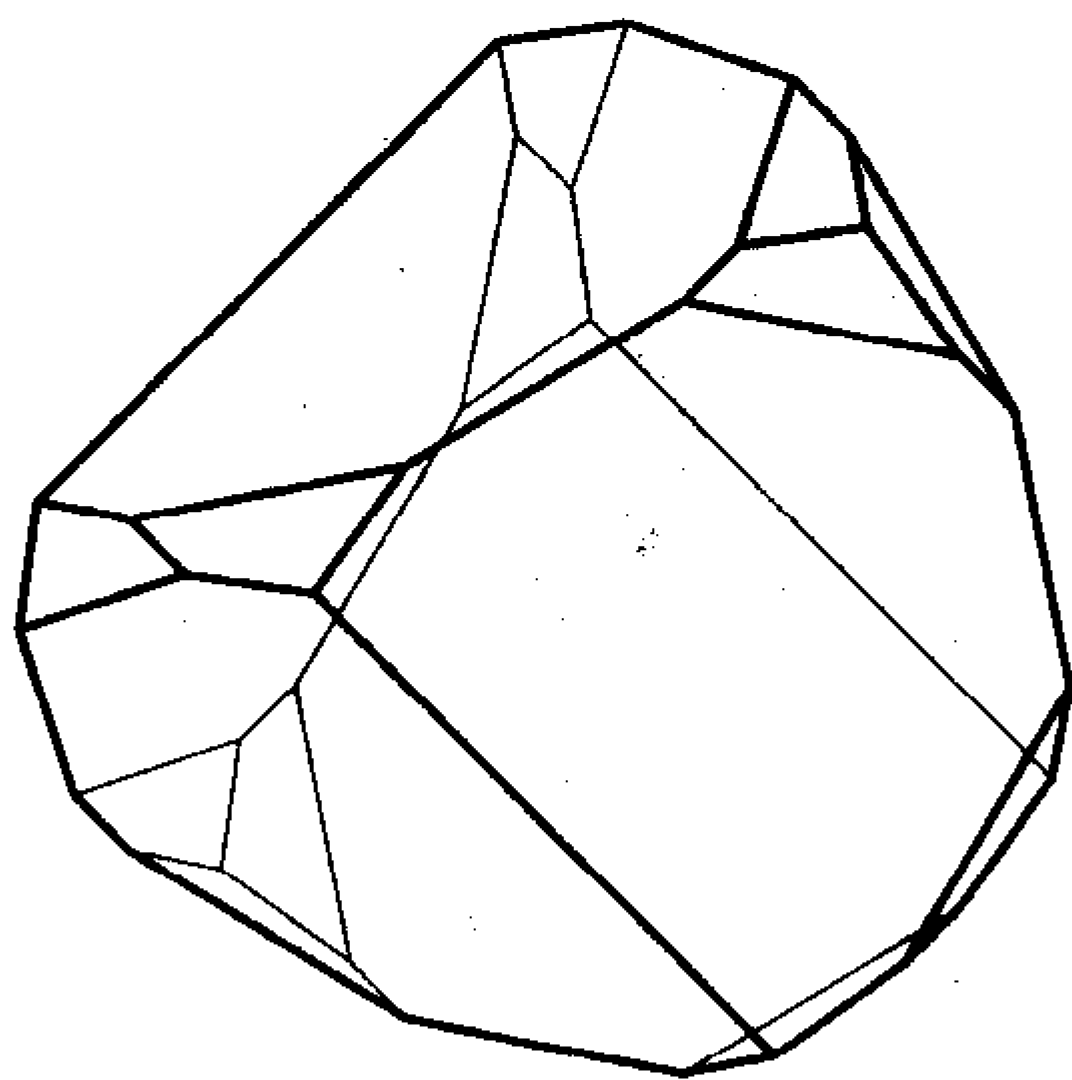


被斜截掉角的正四面体能填满整个空间这一点是很不明显的. 1914 年浮泊尔(Föppl)发现由正四面体和截头正四面体的一个组合能填满整个空间. 连接每个正四面体的中心和各顶点，把原正四面体分成四个相同的较扁的三棱锥，然后把这些三棱锥粘贴到相邻的被斜截掉棱的正四面体上.



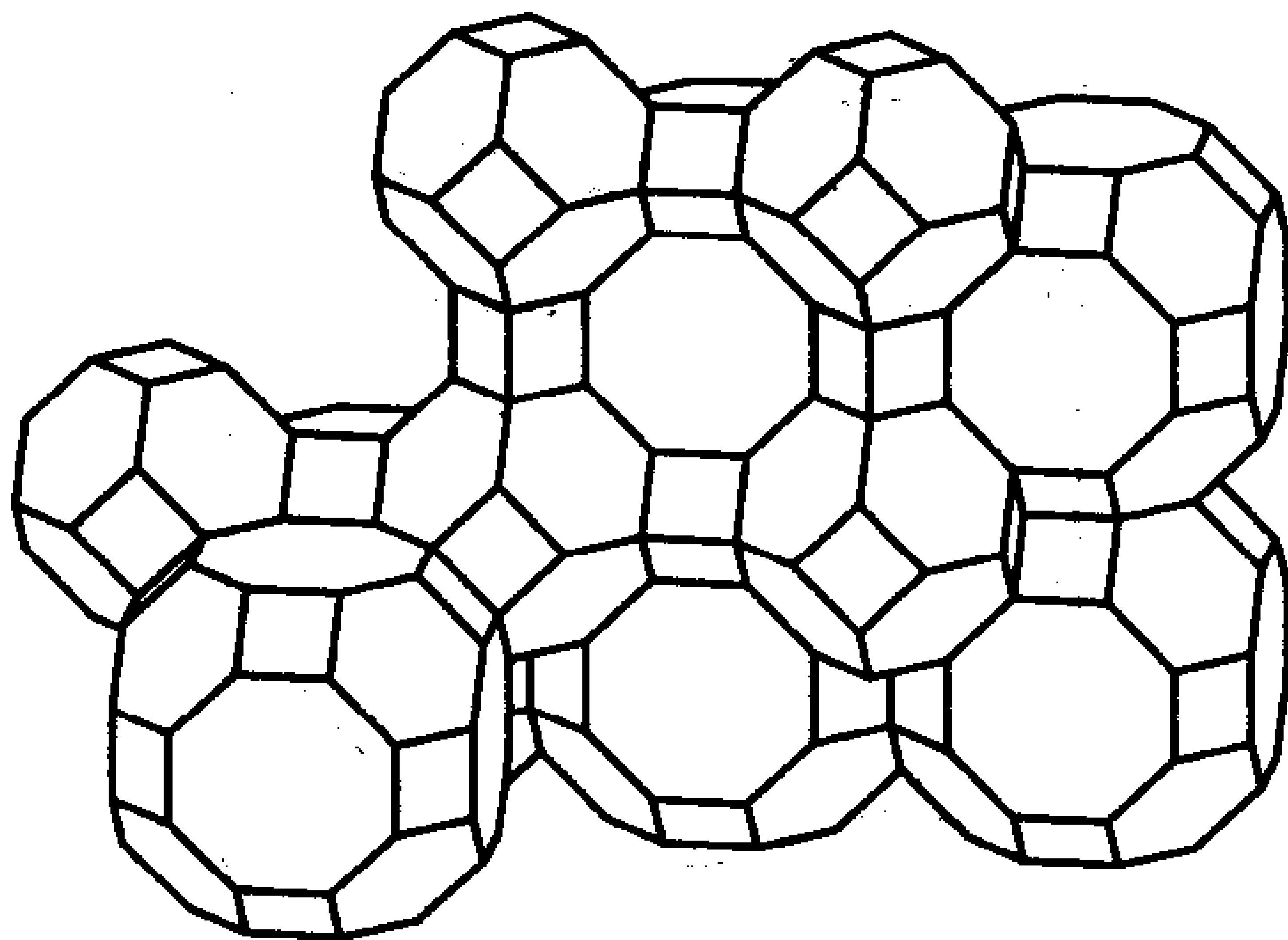
这些情况表面上看似乎填满空间的仅仅是一些至少具有正四面体的对称性的立体图形. 如果不要求对称性，那么一种能填满空间的凸图形可能有很多个面，多达 38 个面. 1980 年 P·恩

格尔(P. Engel)发现了这种立体图形. 下图是一个具有 18 个面，且有一条三重旋转对称轴的立体图形.

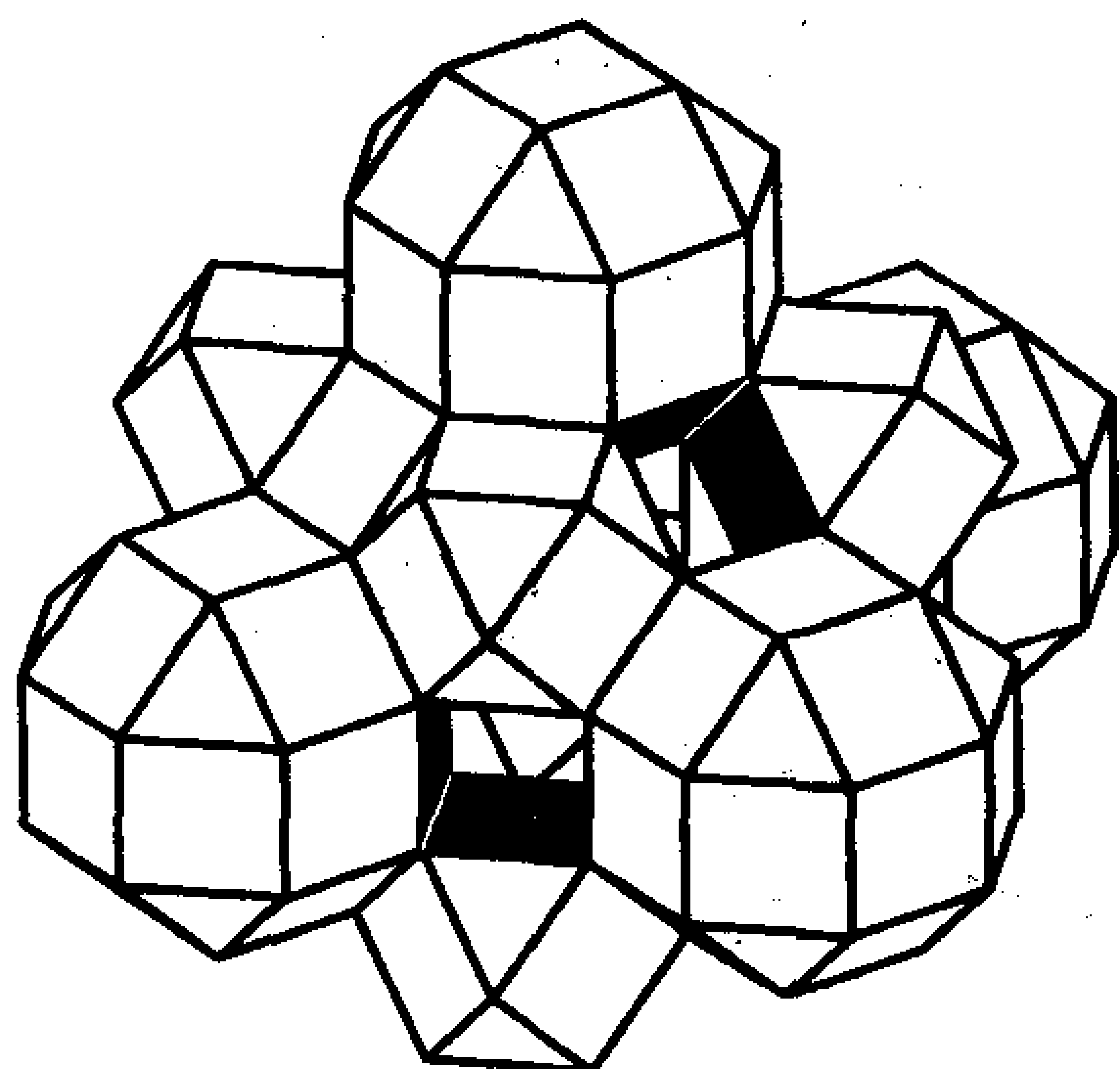


用两种或更多种不同的多面体填满空间的其他可能性就更多了. 截头正方体和正八面体能填满空间，上面提到的截头正四面体和正四面体也能填满空间.

下图是用截头八面体、截头正方八面体和正方体组成的空间铺砌，它们的个数的比是 1∶1∶3.



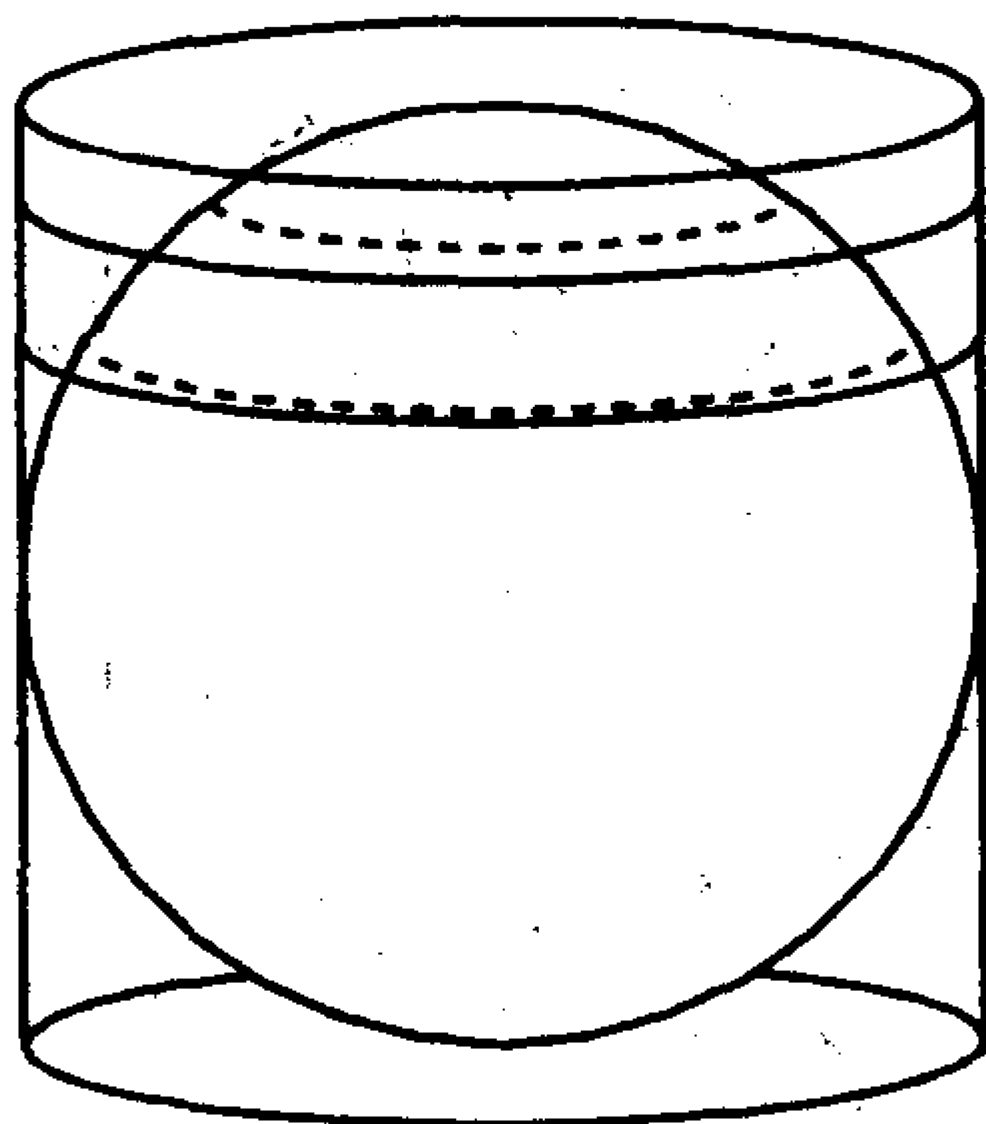
从空间铺砌中取出一些多面体可以形成一个三维迷宫. 下图就是用截头立方八面体，截头八面体和正方体构成的空间铺砌中取出了所有的正方体.



参考书：P. PEARCE, *Structure in Nature as a strategy for design*, MIT Press, Cambridge, MA, 1978.

sphere in a cylinder　内切于圆柱的球

阿基米德发现球的体积是有同一直径和高的圆柱的体积的 $\frac{2}{3}$，表面积等于同一圆柱的曲面的侧面积.

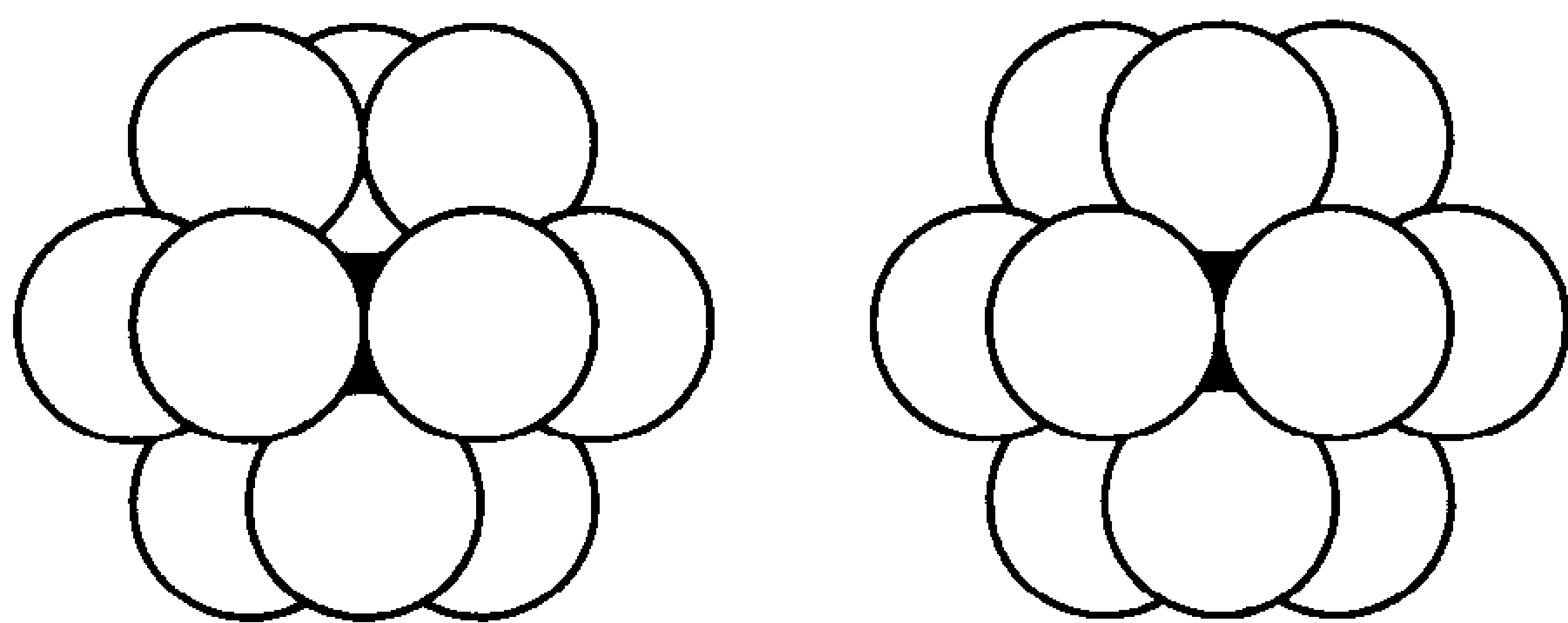


更一般地说，如果球和包含球的圆柱被两个垂直于轴的平面所截，那么在球面上和圆柱面上截得的区域的面积相等. 阿基米德嘱咐，在自己的墓碑上刻上这个图形. 许多年以后，西塞罗

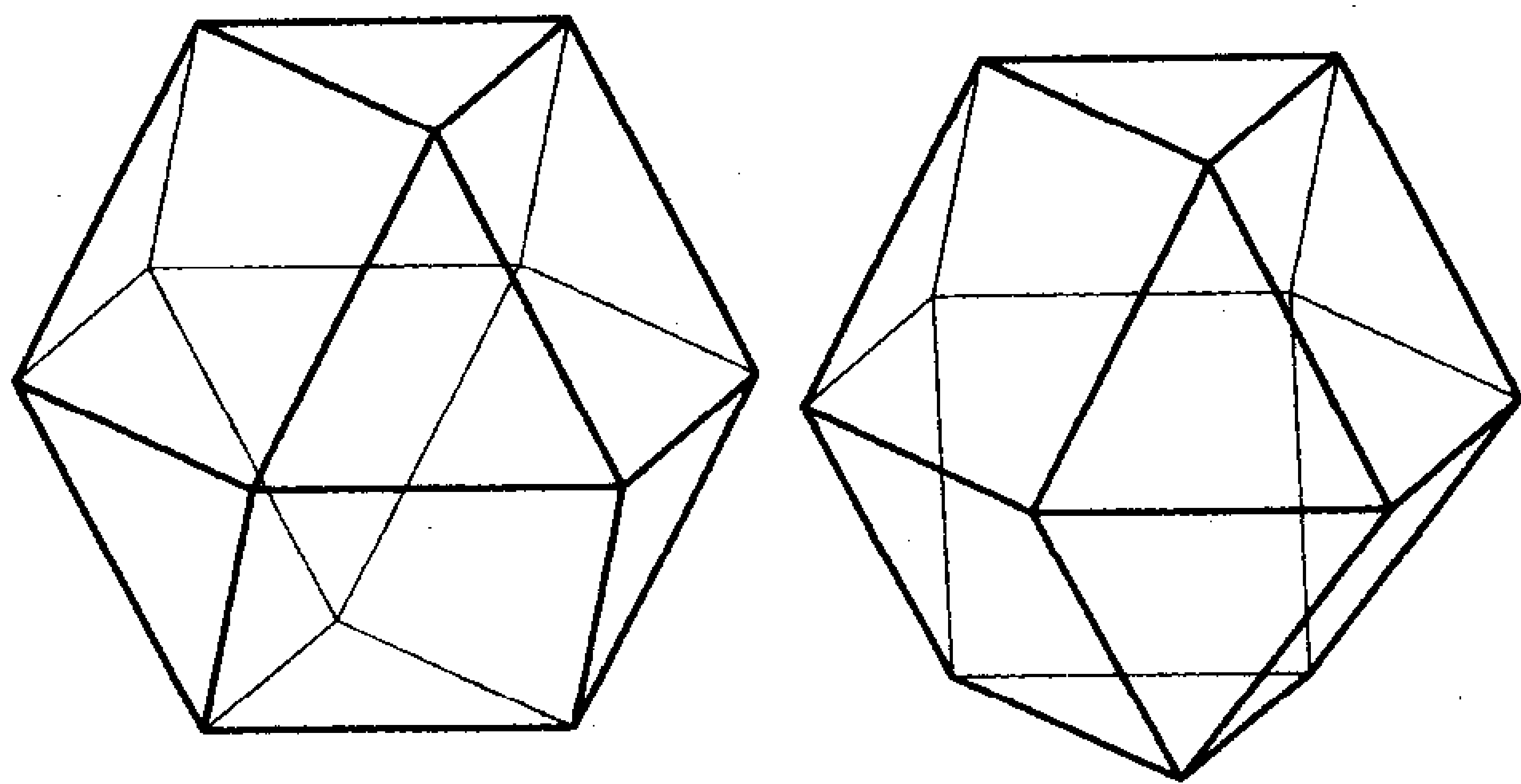
(Cicero)探究了阿基米德的坟墓，确有碑文图形，完好无损.

sphere packing　装球

把一层相同的球放在平面上，然后上面再放一层，使第一层每一个凹穴上都有一个新球. 继续这样加上去，结果得到这些相同的球的已知的最密的装法：球占整个空间的$\frac{\pi}{3\sqrt{2}}$，近似于0.7403.



在放第三层时是有选择的. 球可以放在一些凹穴中，使它们在第一层球的正上方，也可以把它们放在第一层球的凹穴的正上方，这些凹穴是第二层球空出的.



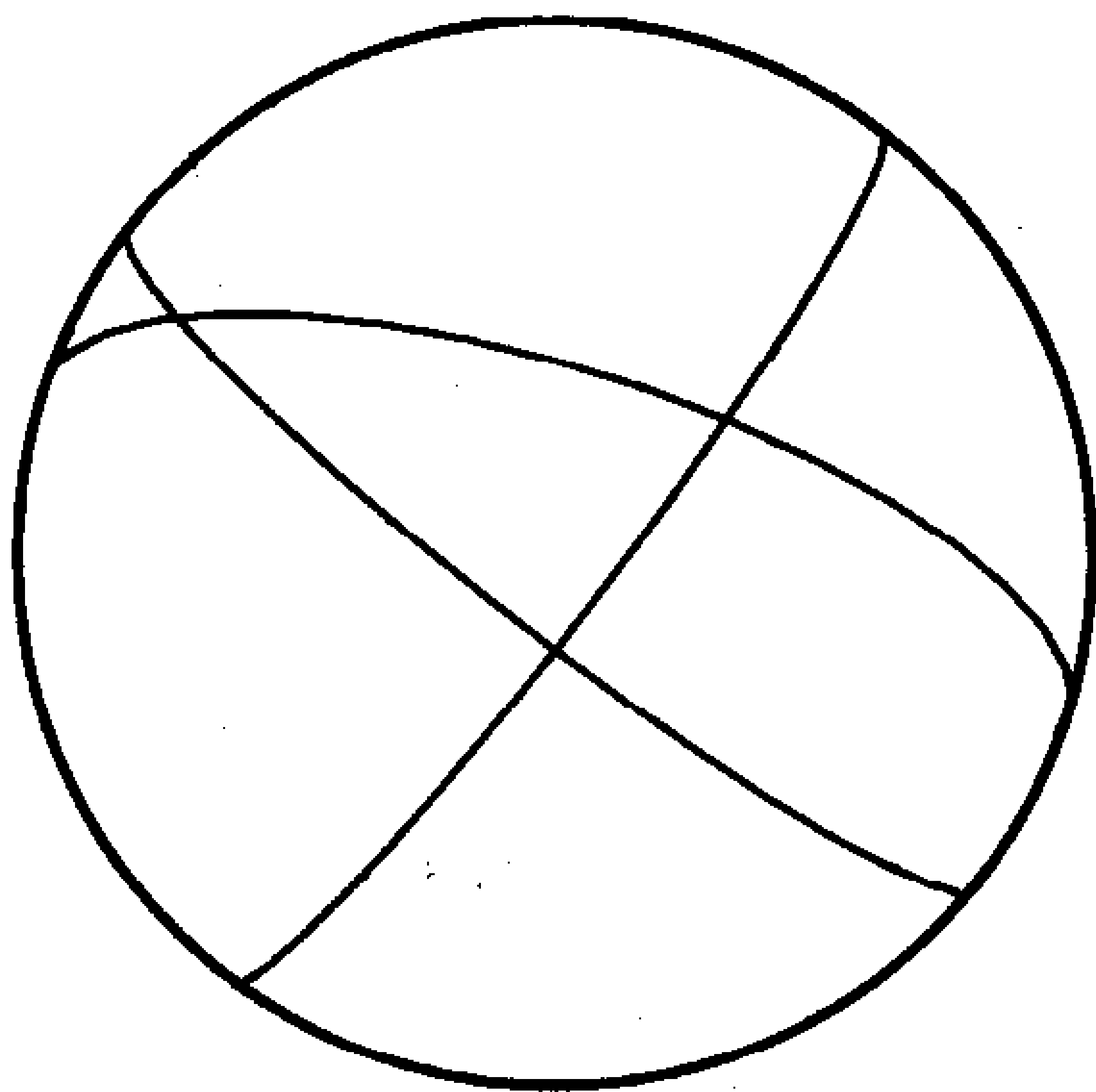
无论是哪一种情况，第二层中的一个球都与其他十二个球相切. 第一种放法是最对称的，周围十二个球的中心形成一个立方八面体. 第二种情况下，在赤道处切开立方八面体，再将其中

的一半转半圈后就得到第二种多面体.

由于我们在每放新的一层时都有两种选择,所以有无穷多种方法放球,使密度全相同.

spherical geometry　球面几何

球面几何是非欧几何的一种形式,在这种几何中,曲率是正的常数.



球面几何中,直线是大圆.任何两条直线都相交于两点,没有平行线.两点之间的距离是经过这两点的大圆弧的长.两条直线的夹角是相应的大圆的夹角.与双曲几何一样,三角形由角定义,没有相似三角形.三角形的内角和大于 π,内角和与 π 的差是面积(与双曲几何一样).上图中,如果中间的球面三角形的角是 $\frac{\pi}{2}$,$\frac{2\pi}{5}$和$\frac{\pi}{6}$,那么它的面积是 $R^2\times\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{5}+\frac{\pi}{6}-\pi\right)=\frac{\pi}{15}R^2$.

具有讽刺意义的是球面三角中最古老的结论都可追溯到古希腊,而现在却成为这种非欧几何中的正确公式!

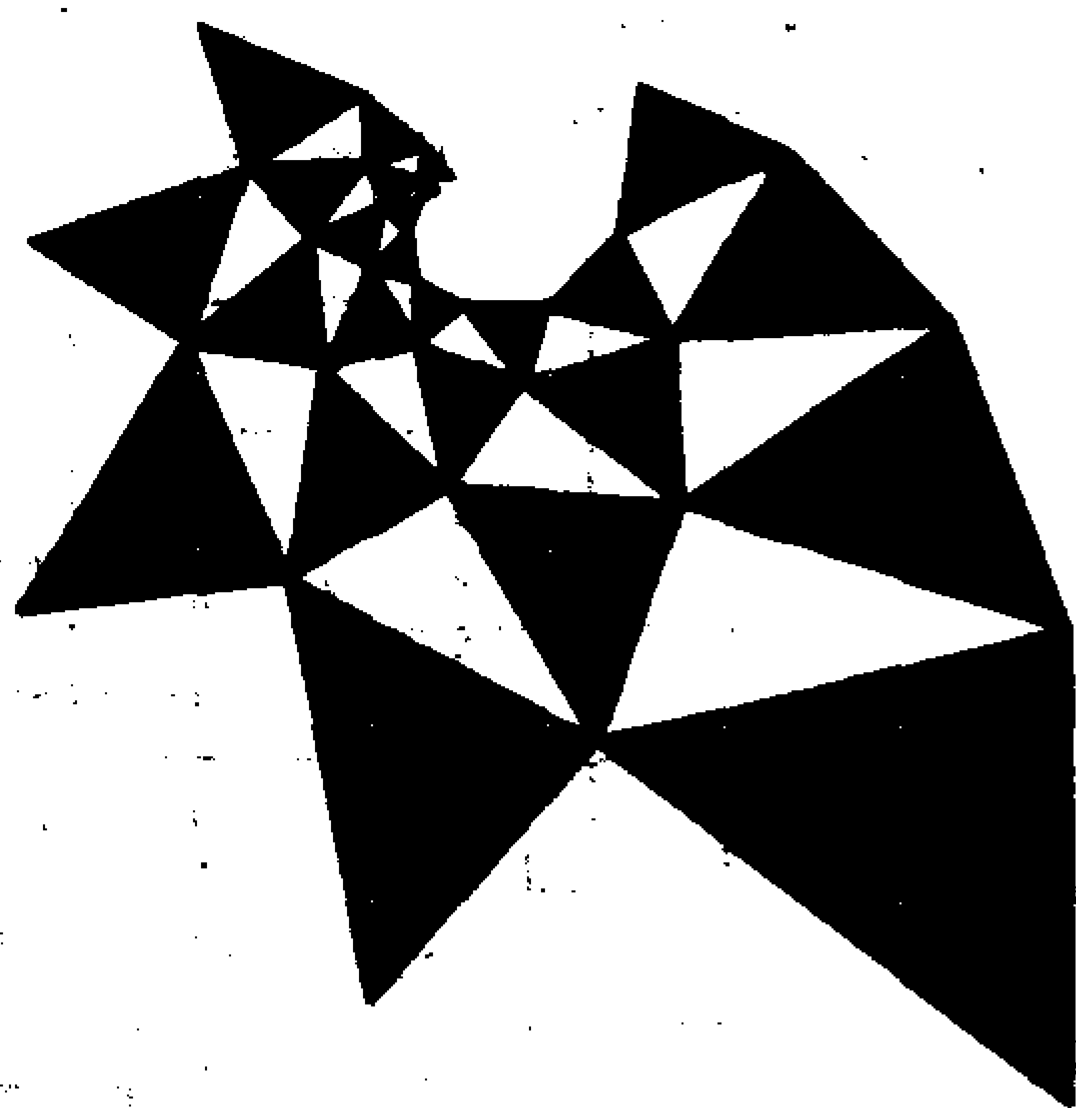
spiral-similarity tessellation　螺旋相似镶嵌

将只考虑用同一种铺块的镶嵌进行推广的一种方法是允许

铺块有不同的大小，但保持形状不变.

下图是一个用两种形状的三角形的镶嵌. 有三种不同的方法可对相邻的三角形配对，其中任何一种都可以看作是相似四边形的镶嵌.

这种镶嵌中的任何一组对应点都位于一条等边螺线上，所有这些螺线都有相同的极或极限点. 镶嵌绕这个极限点旋转无穷多次，因此就重叠无穷多次.



任何普通的镶嵌都能变换成这种螺线型镶嵌. 例如，看上图中的有共同的顶点的六个三角形，三个有阴影，三个没有阴影，它们形成一个六边形，整个镶嵌可以看作是六边形的镶嵌.

spirolaterals 螺线多边形

弗兰克·奥尔茨（Frannk Olds）推导出一个对一些简单的指示进行多次重复的简单规则. 选取一个出发点和一个方向，根据以下指令：

进 1 步

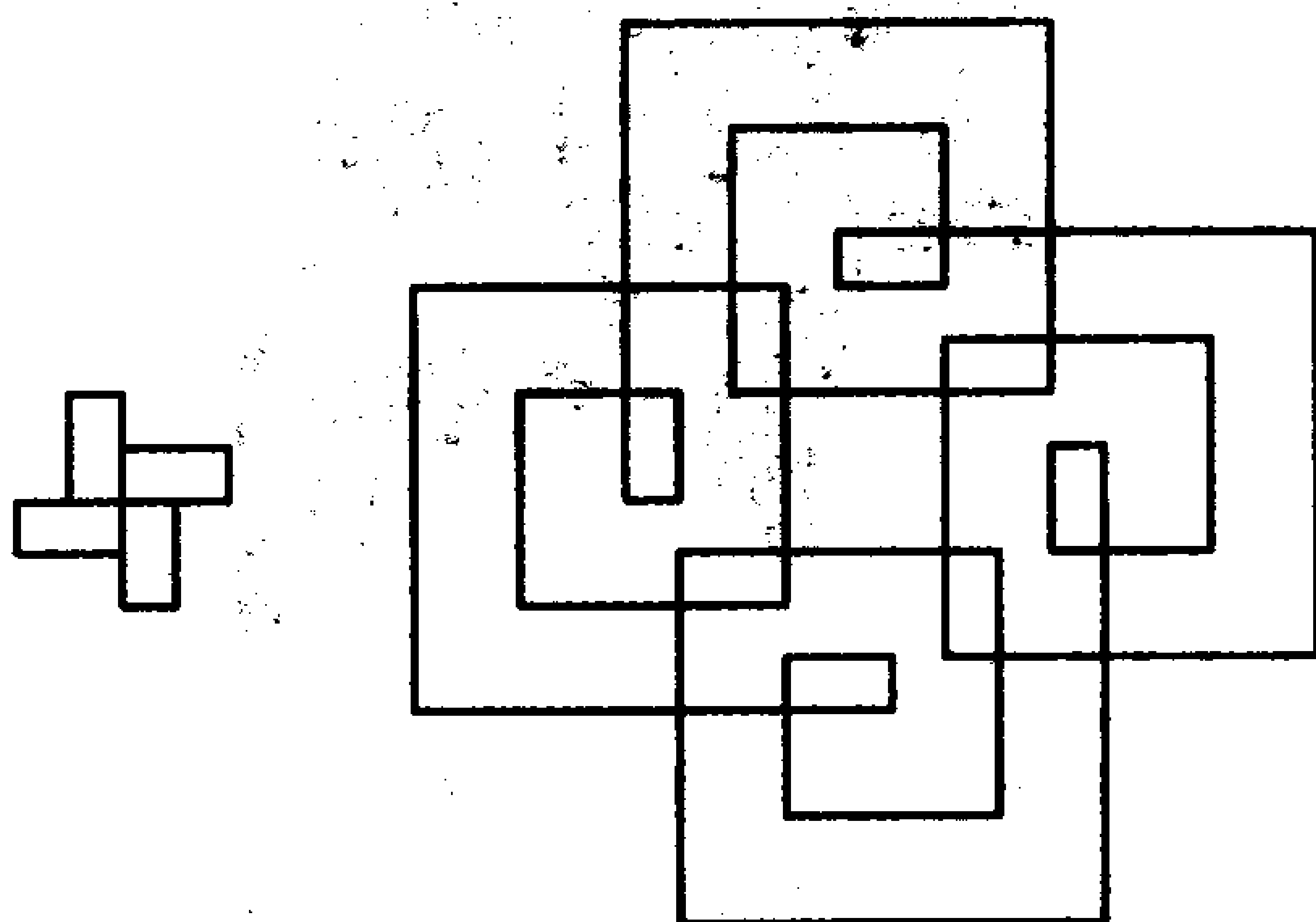
左转

进 2 步

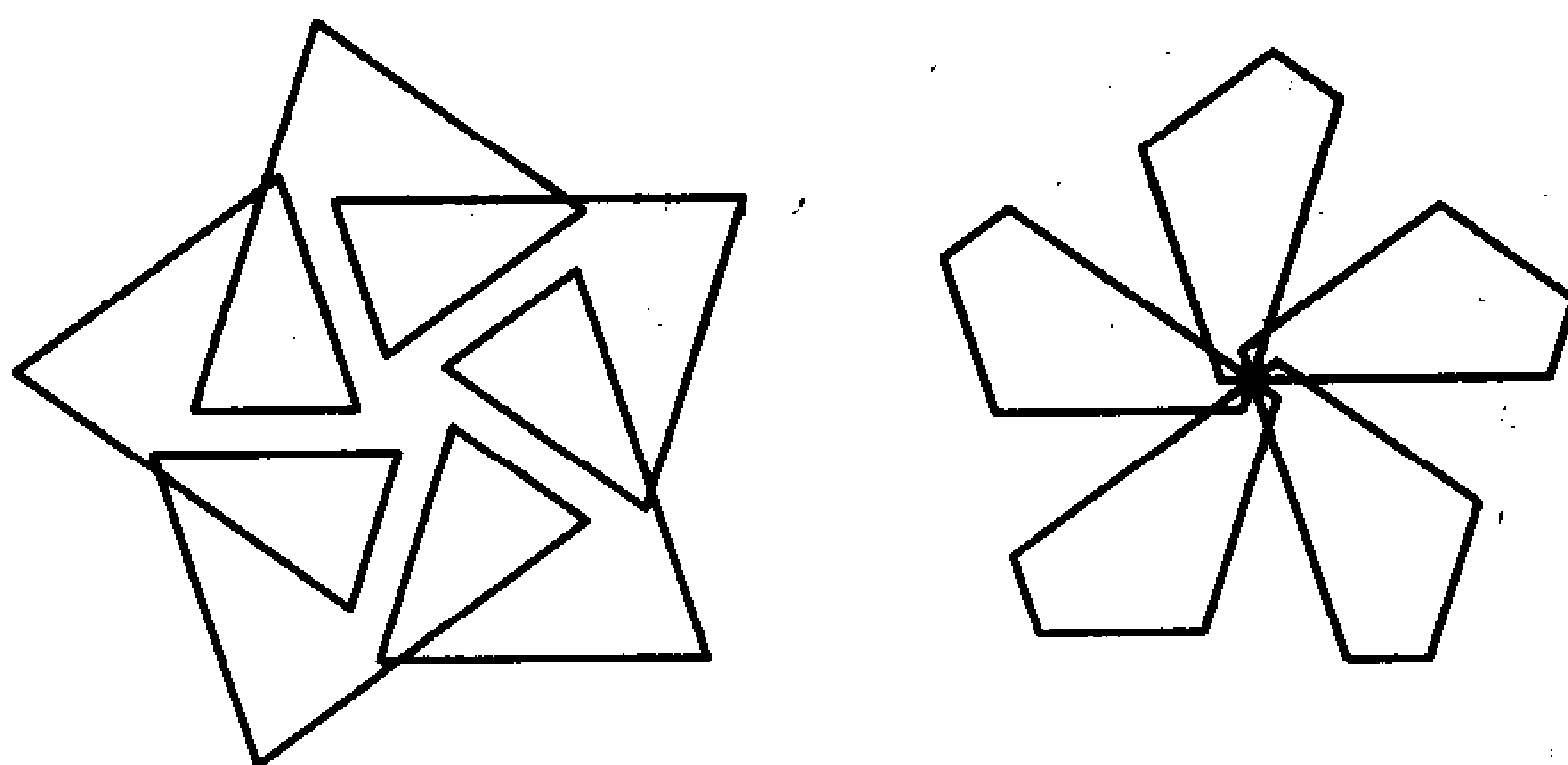
左转
进 3 步
左转

重复

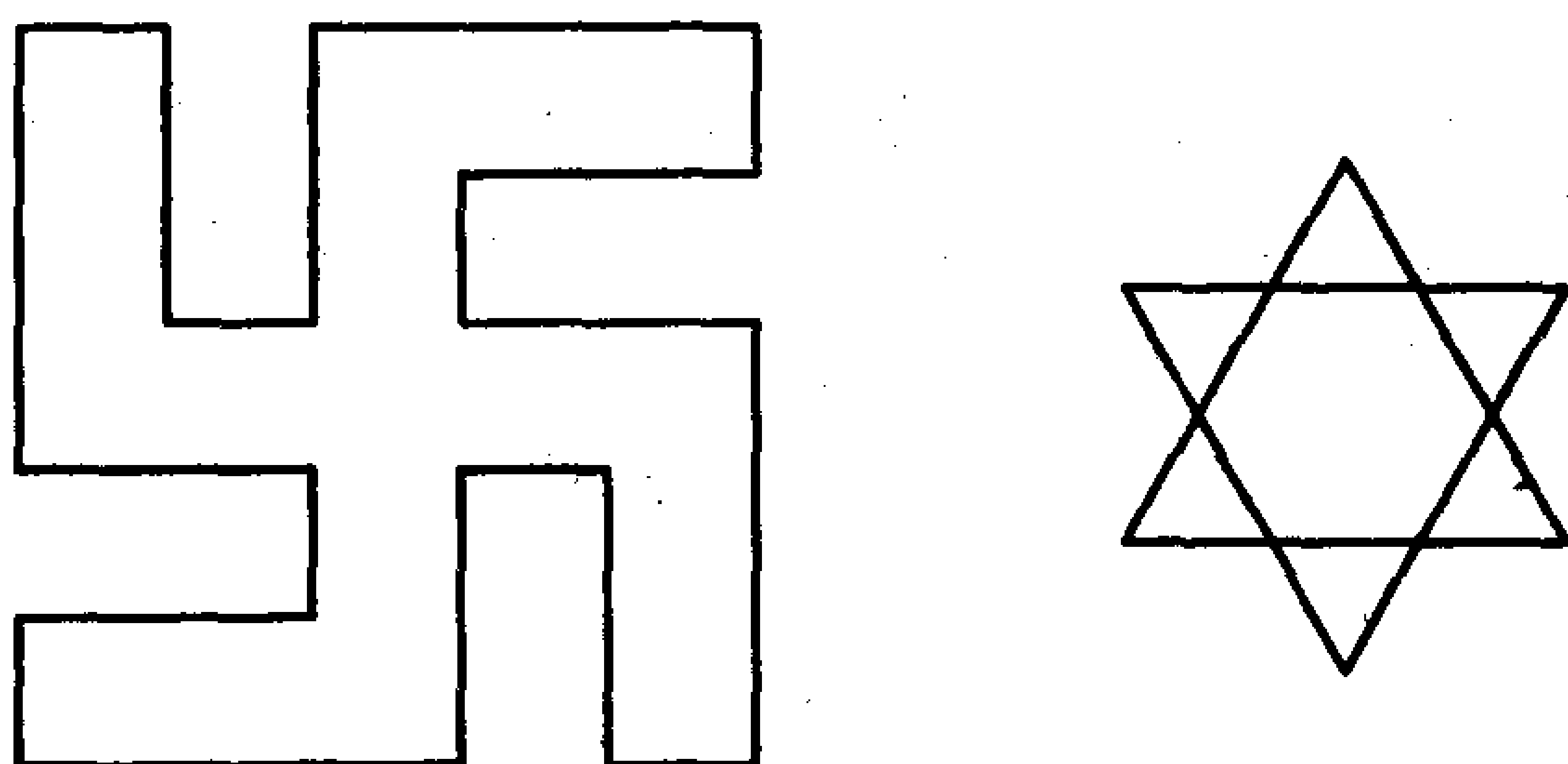
绕这个圈四次以后，就回到了出发点，同时画出左图. 由于转角是 90°，所以该图可以写成(90°:1,2,3). 要得到右图，只要用同样的记号，如(90°:1,2,3,4,5,6,7,8,9)形成上面描述的螺线多边形，这里的记号表示该名称的来源.



运动的距离可以是后退(写成负数)转角无须 90°. 下面两个图分别由(72°:1,2,3,4,5)和(108°:1,2,3,4)生成.



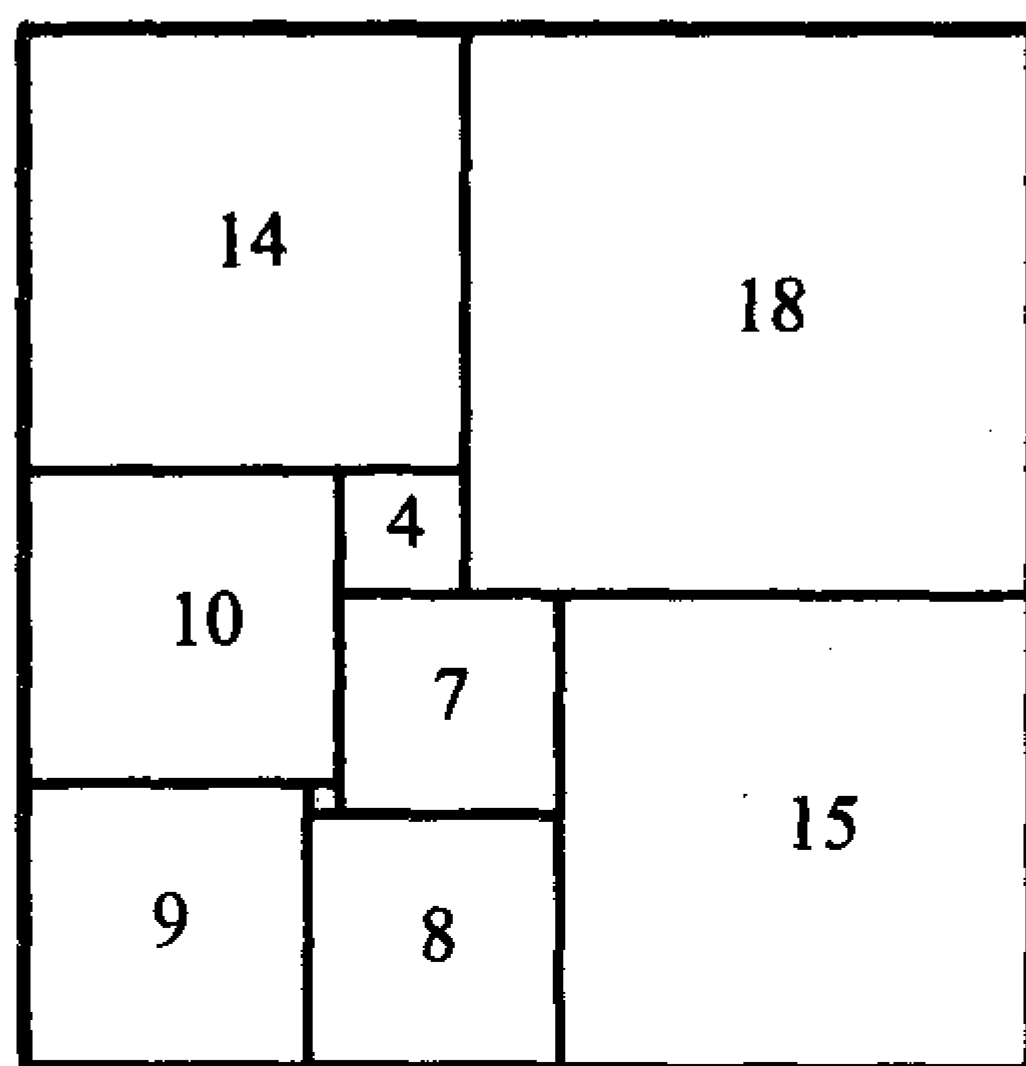
螺线多边形包括这样一些几何图形，它们与数字学家所喜爱的奇怪的巧合极为接近．下面两个图除了转角不同以外都相同．它们分别是(90°：1，3，2，－1，－2)和(60°：1，3，2，－1，－2)：



参考书：MARTIN GARDNER，'Fantanstic patterns traced by programmed "worms"'，Scientific American，November，1973.

squared rectangles　能分割成不同的正方形的矩形

1925 年 Z・莫隆(Z. Morón)成了第一个把矩形分割成不同的正方形的人．这一问题是 S・罗基维茨(S. Ruziewicz)提给他的，当时作为第 59 个问题出现在《苏格兰问题集》(*The Scottish Book*)上．



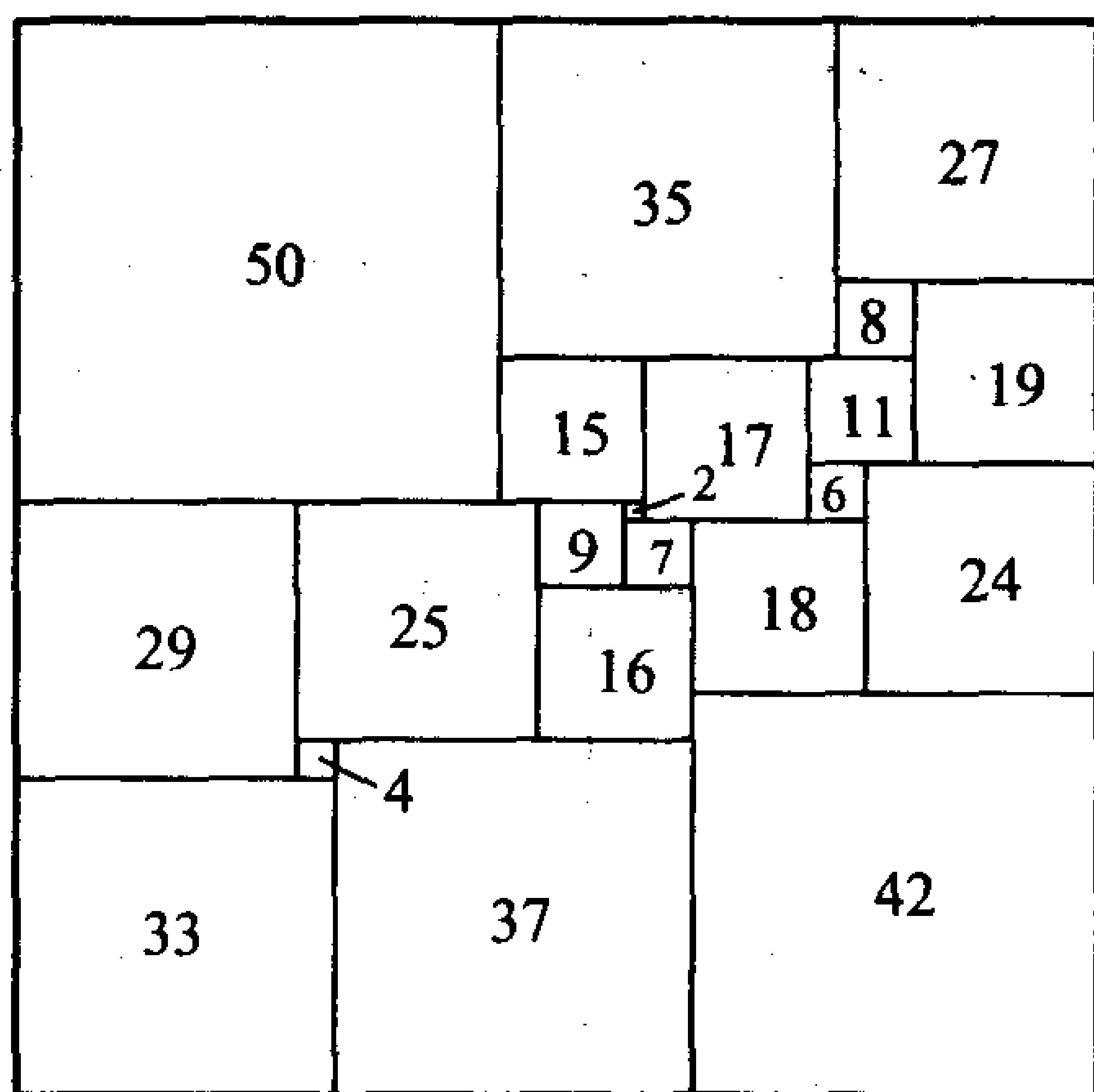
凑巧的是第一次发表的由不同的正方形拼成的矩形是 32×33，十分接近正方形，这是很难做到的.

参考书：R. D. MAULDIN(ed.) *The Scottish Book*, Birkhäuser Boston, 1981.

squared squares　能分割成不同的正方形的正方形

俄罗斯数学家卢辛(Lusin)曾声称把一个正方形分割成若干个不同的正方形是不可能的. 在 1939 年洛兰·斯普拉格(Roland Sprague)第一次公布了分割成若干个不同的正方形的正方形. 它由 55 个正方形组成.

1978 年，地奇凡斯弟金(A. J. W. Duijvestijn)发现了唯一的，最小的，简单而完美的由不同的正方形拼成的正方形，它由 21 个正方形组成. 之所以说它完美是因为所有的正方形都不相同，之所以说它简单是因为它的任何子集都不是矩形.

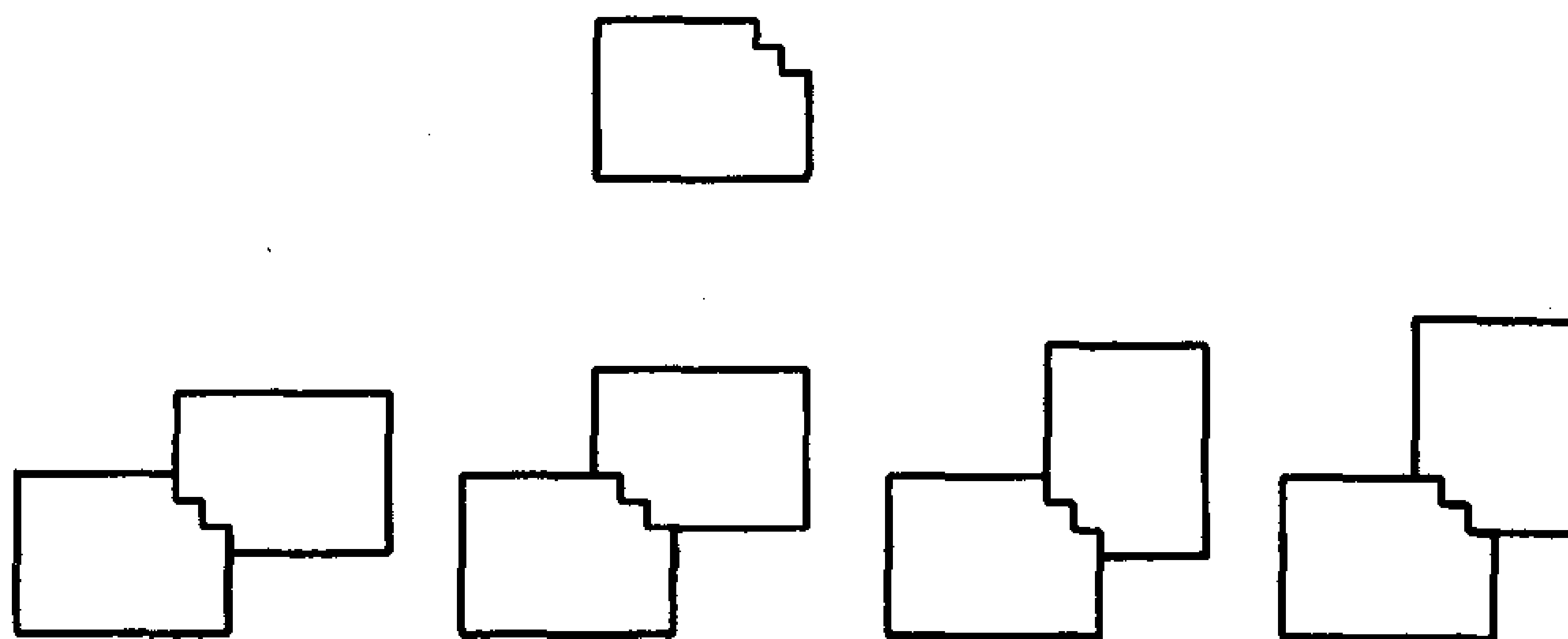


参考书：R. D. MAULDIN(ed.) *The Scottish Book*, Birkhäuser Boston, 1981.

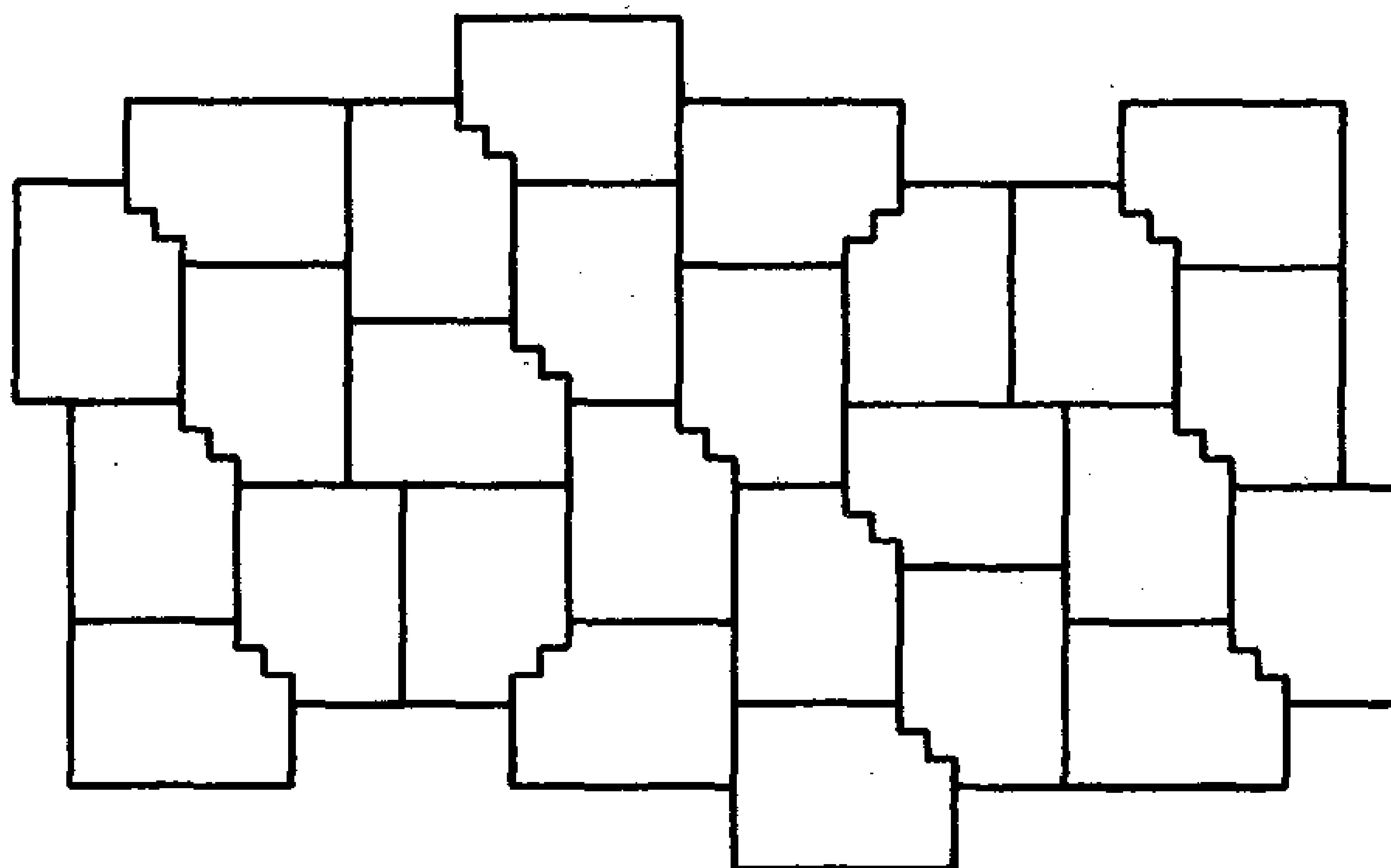


staircase tilings　阶梯状铺砌

去掉矩形的一个"阶梯"所形成的铺块能铺砌平面，首先要将锯齿状棱配对. 可以用下面四种方法配对：

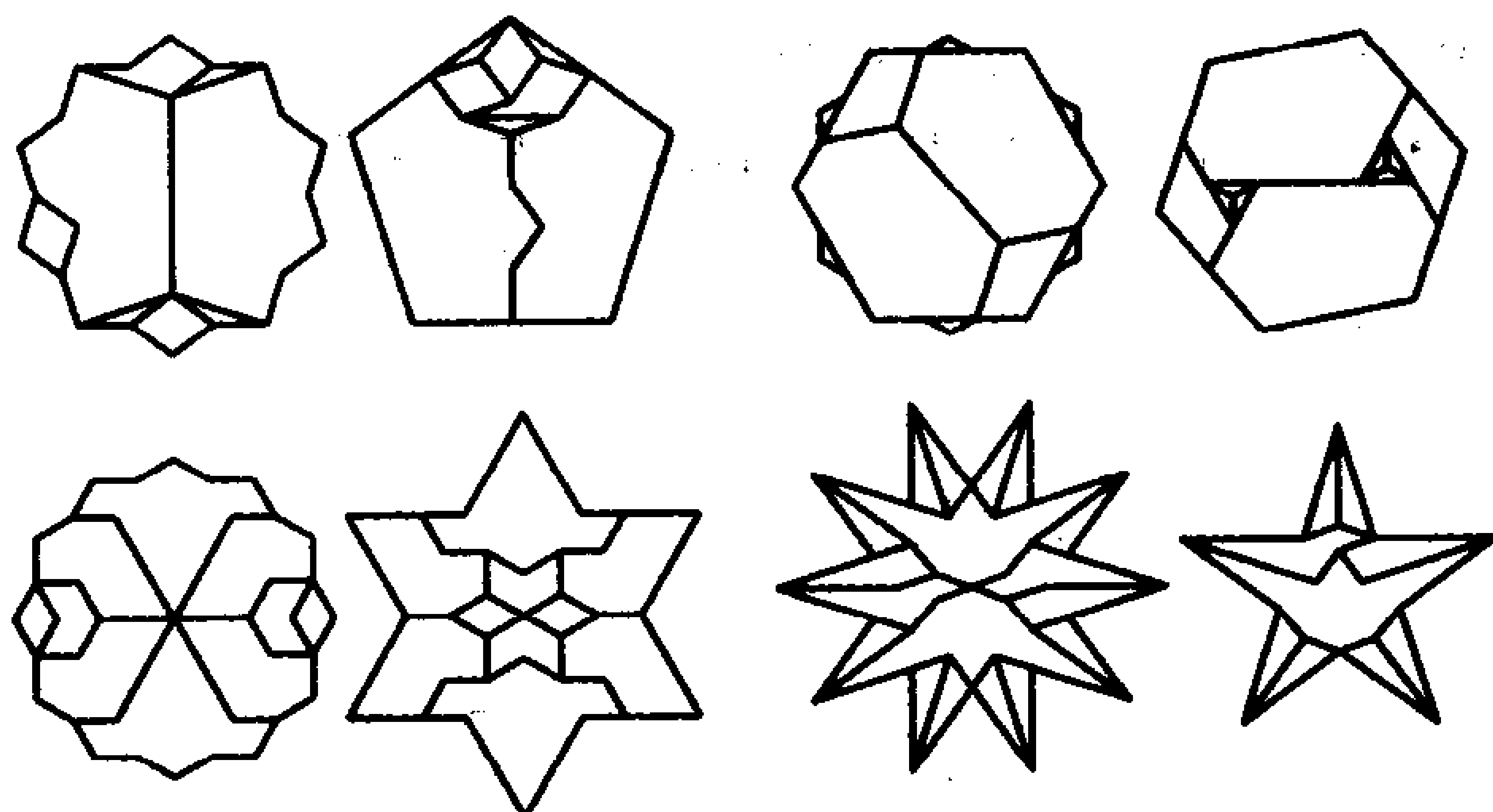


于是存在许多种用这种成对的铺块铺砌平面的方法，其中之一(用截去45°角的矩形同样能铺砌平面)如下：



stars into polygons, stars into stars　星状图形拼成多边形，星状图形拼成星状图形

哈里·林德格伦(Harry Lindgren)和格莱格·弗里德里克生(Greg Frederikson)一直从事一些极为奇特而美妙的分割. 下面两个图表示他们的四个成果(最后一个分割成两个同样的星状图形)：

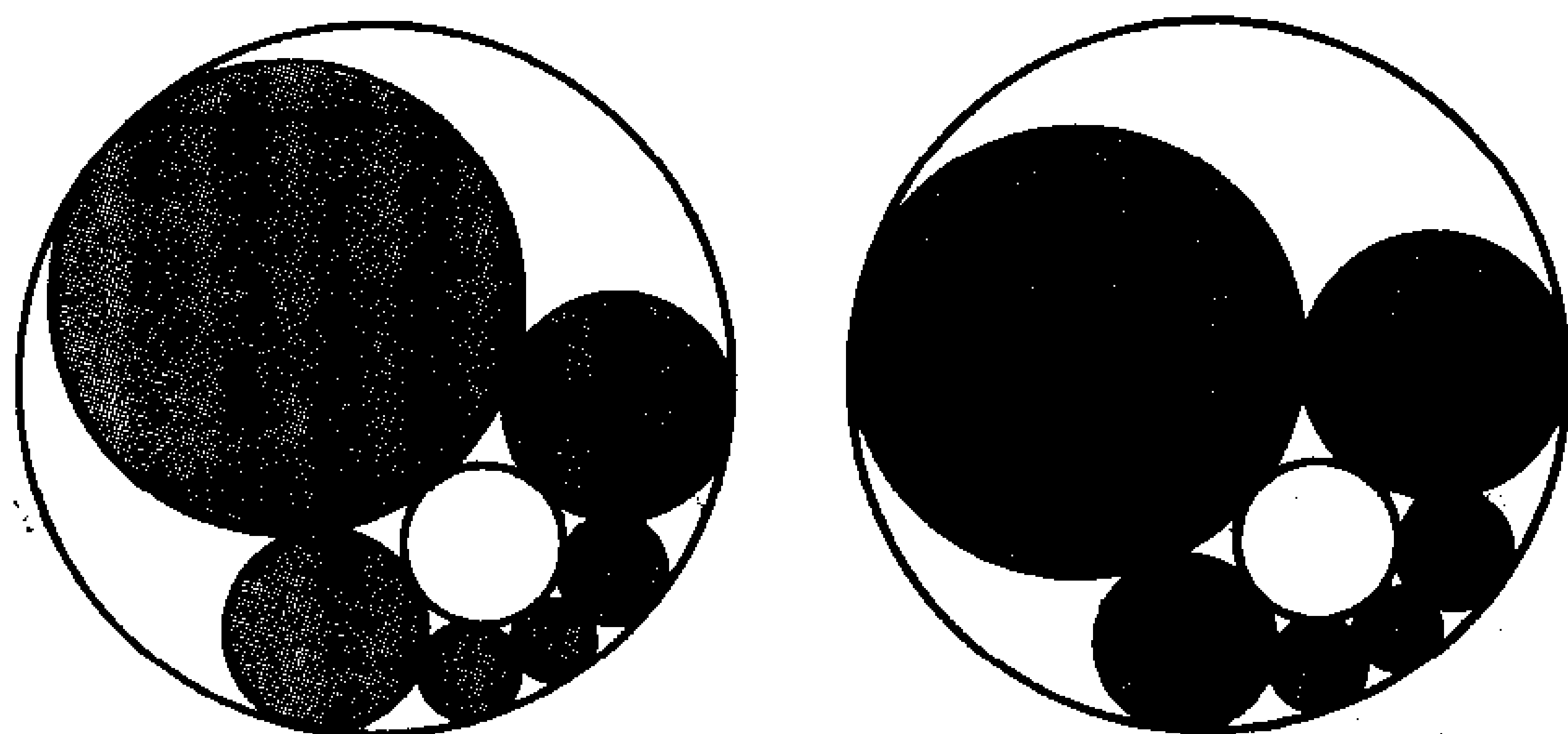


对于解难题的行家，分割的最重要的特色是只用少量铺块．对于数学家来说，对每一个多边形进行自然的几何的探索无疑是重要的．这些分割既新颖，对称，也很奇特．

参考书：H. LINDGREN, *Recreational Problems in Geometric dissections and How to Solve Them*, revised and enlarged by G. Frederikson, Dover, New York 1972.

Steiner chains of circles　斯坦纳圆链

先把一个圆放入另一个圆中，然后这样作一个圆链：每一个圆都和圆链中的前一个圆以及最初的两个圆相切．在一般情况下，这个链最终必将重叠．



斯坦纳的定理是说：如果这个圆链是闭合的，此时最后一个圆与第一个圆相切，那么无论第一个圆怎么画这个圆链都是闭

合的.

第一个链是闭合的. 还是从这两个圆出发,任意放一个圆,使它与这两个圆相切,那么得到的圆链仍是闭合的,如上面的第二个图. 圆链中的所有的圆的圆心都位于一个椭圆上,不管圆链闭合与否.

该圆链在第一圈时可能不闭合,但转几圈以后必闭合. 这一定理仍然成立:如果一个圆链在转若干圈,比如说三圈以后闭合,那么任意圆链必在三圈以后闭合.

在一般情况下,从给出的一对圆出发,作出夹在这两个圆中的闭合圆链这一问题或者无解或者有无穷多个解. 因此这是一个不确定的问题.

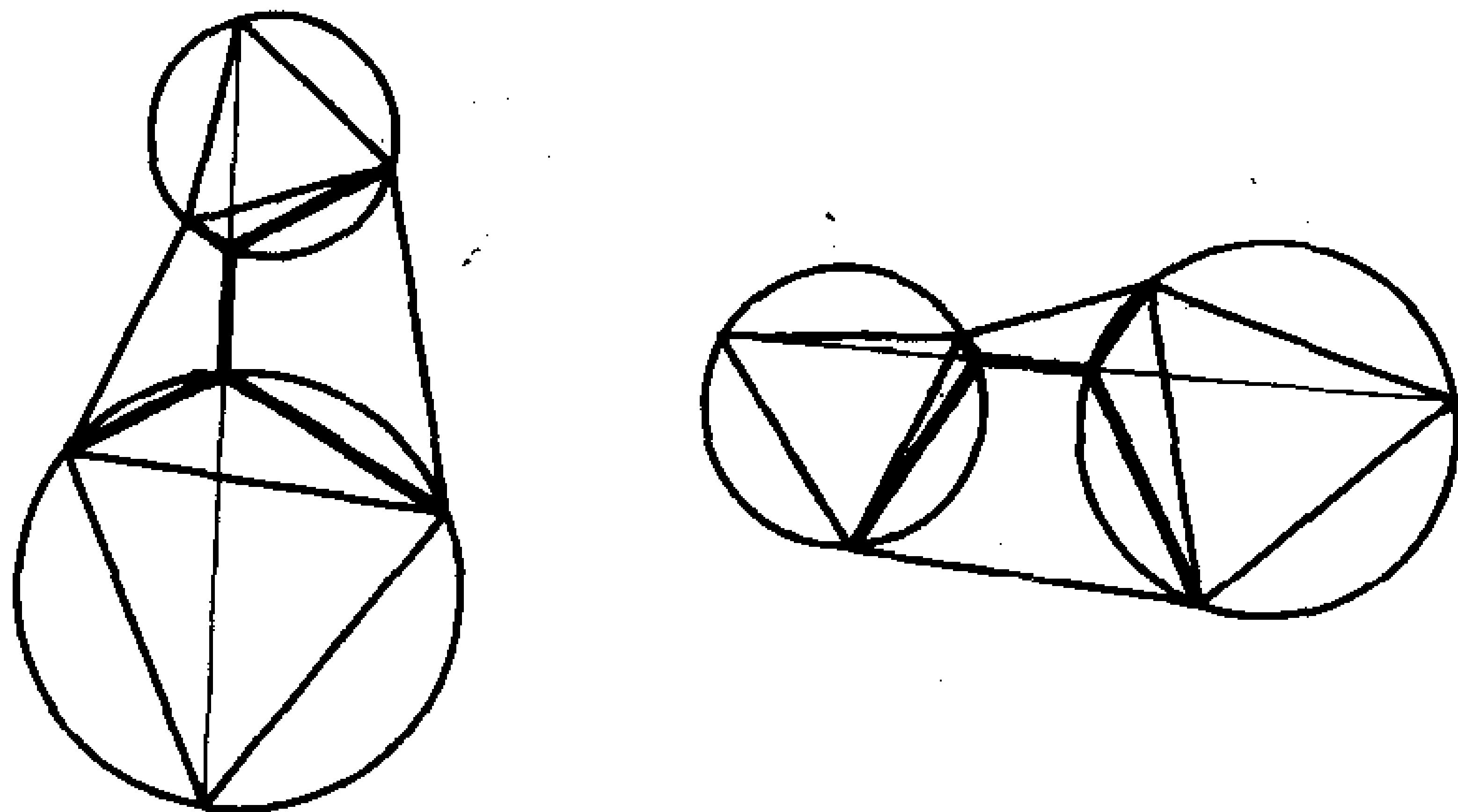
斯坦纳在 1826 年证明了这一定理. 但是日本数学家足间直上(Ajima Chokuyen)研究了同一图形后于 1784 年得到了类似的结论.

该图形还有一些附带的性质. 过圆链中依次相切的圆的切点的切线和连接圆链中每一个圆与内外两圆的切点的直线都经过同一点.

Steiner networks 斯坦纳网络

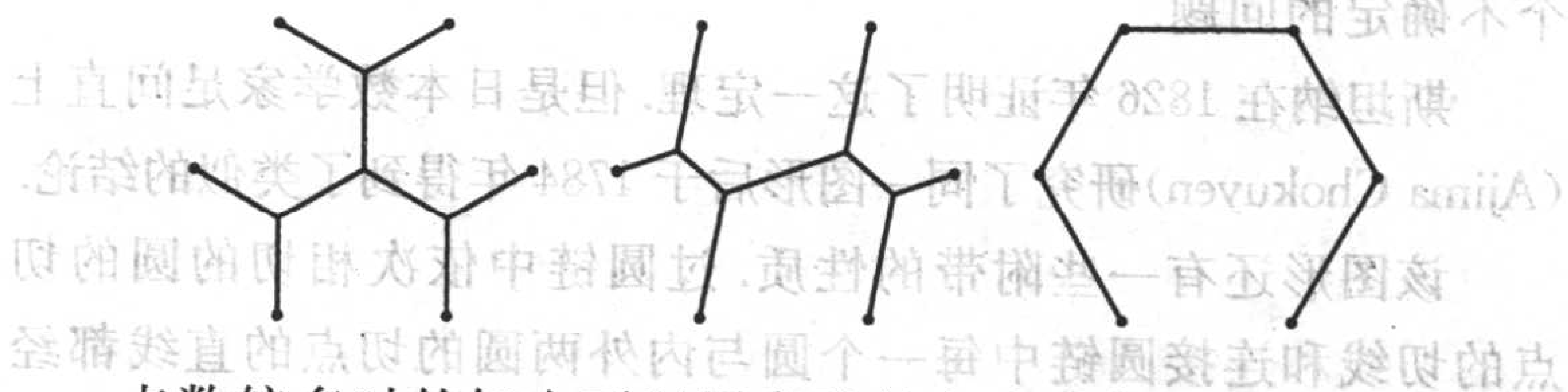
斯坦纳把费尔马点推广到四点或更多点的情况,并回答了连接所有这些点的最短线的问题.

对于适当取的四点的解可以在四边形的一组对边上作等边三角形得到.

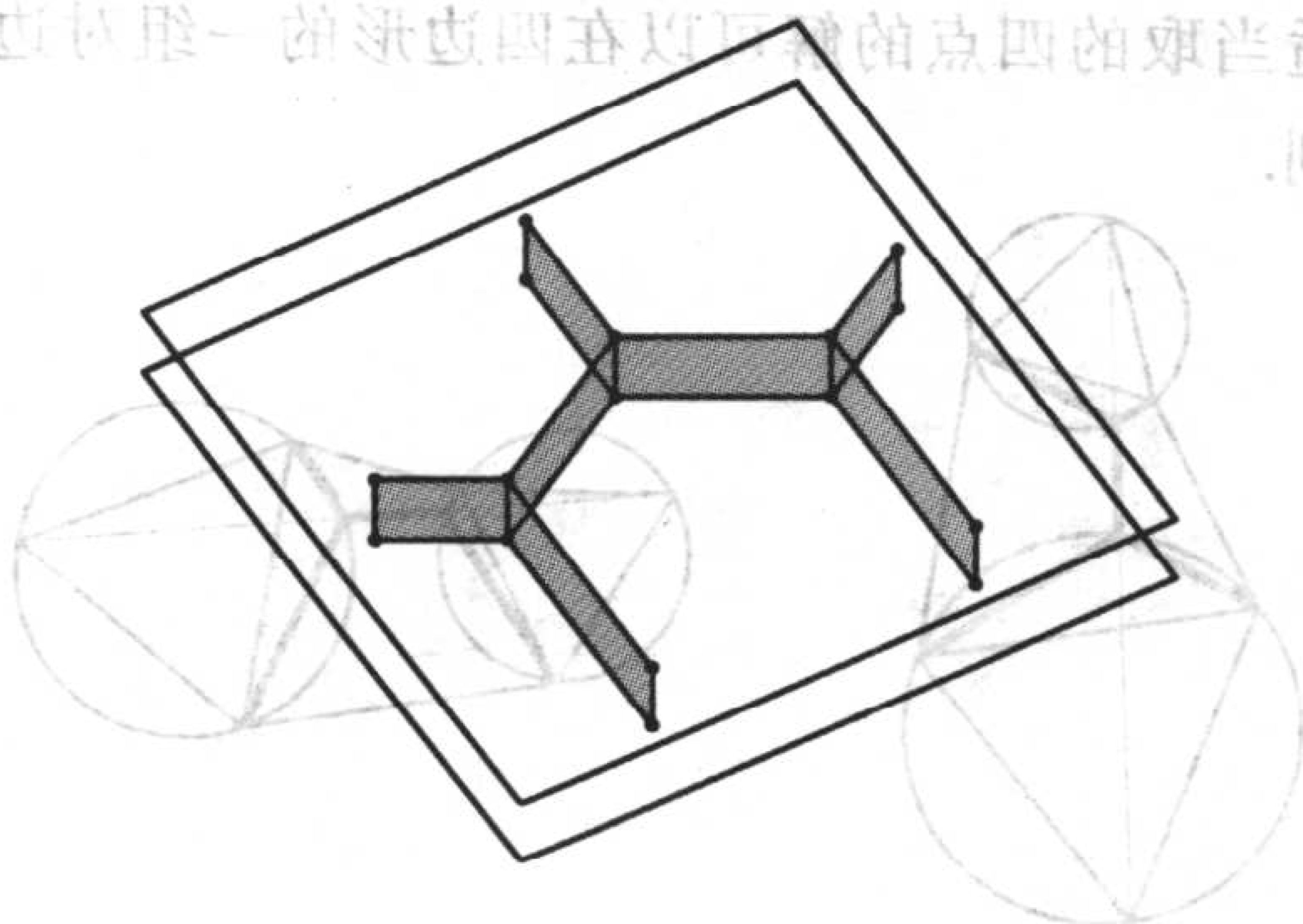


连接新的顶点和另两个交点生成一个网络(如上面两个图),在这个网络中,相邻两线段的夹角是120°,(这一结构中的最近的点是选择画夹角为60°的等边三角形,我们就能保证如果对角出现的话就是120°,这是因为圆内接四边形的对角之和是180°.)每一个这样的解都是局部最小值,稍稍改变一点就会长一点.但是,它仍是正确的,因为一个这样的解一般地说比任何其他解都短,所以是绝对最小值.

对于六点是边长为1的正六边形的顶点,下图表示三种可能的解.总长度分别是$3\sqrt{3}$,$2\sqrt{7}$和5,注意到最无兴趣的解实际上是最短的,这真使人感到失望.



点数较多时的解也可以用实验的方法求得.取两块板,中间放一些作为出发点的小桩,然后夹紧.放在肥皂液里浸一下,在各个小桩之间形成一个肥皂薄膜.几秒钟以后,在表面张力的作用下,它就收缩成一个最小的表面,也就是各小桩之间的最短的路程.

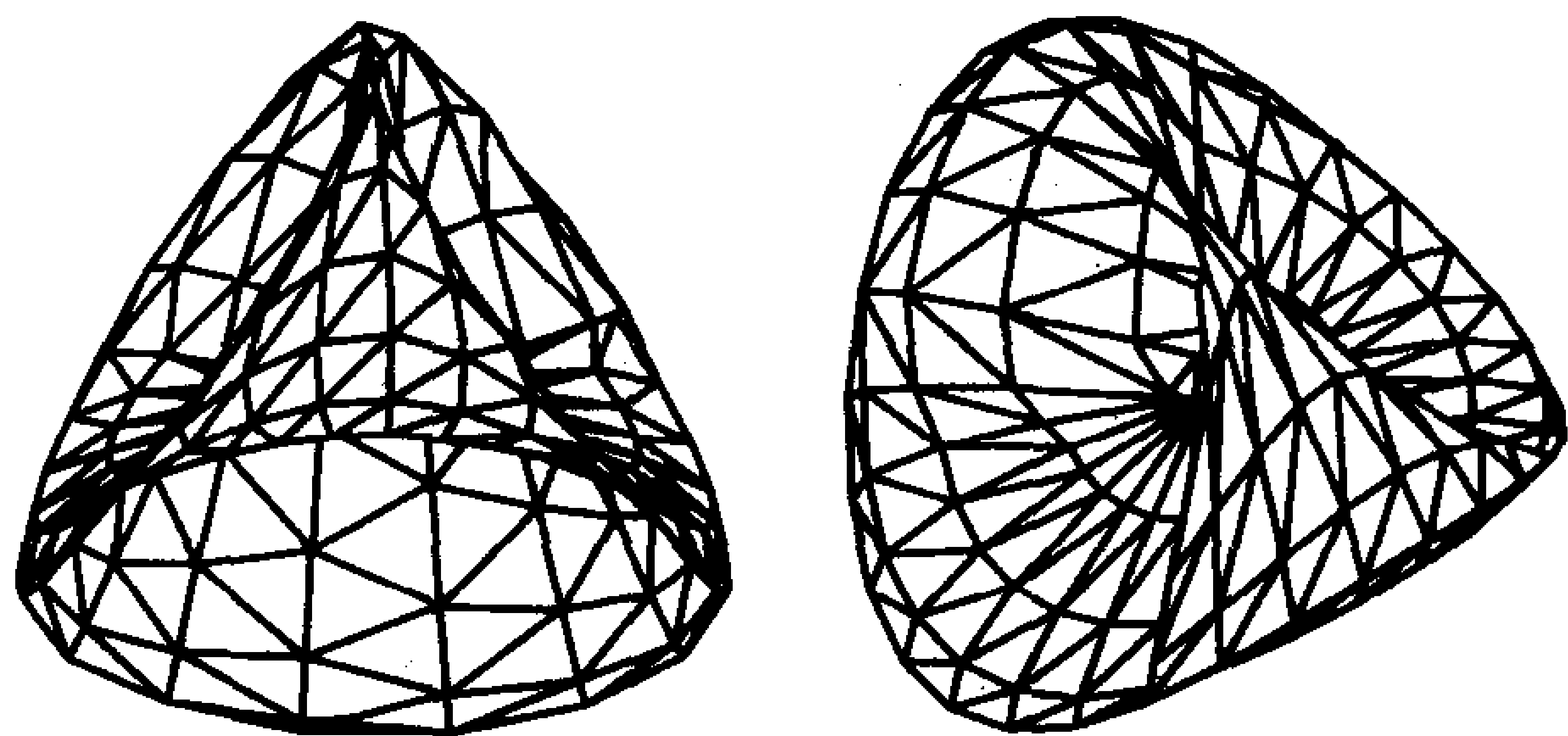


Steiner's Roman surface　斯坦纳罗马曲面

19 世纪的数学家有一种倾向：如果他们不能用代数方程定义曲面，他们就很不乐意. 斯坦纳罗马曲面是双侧曲面，其方程是

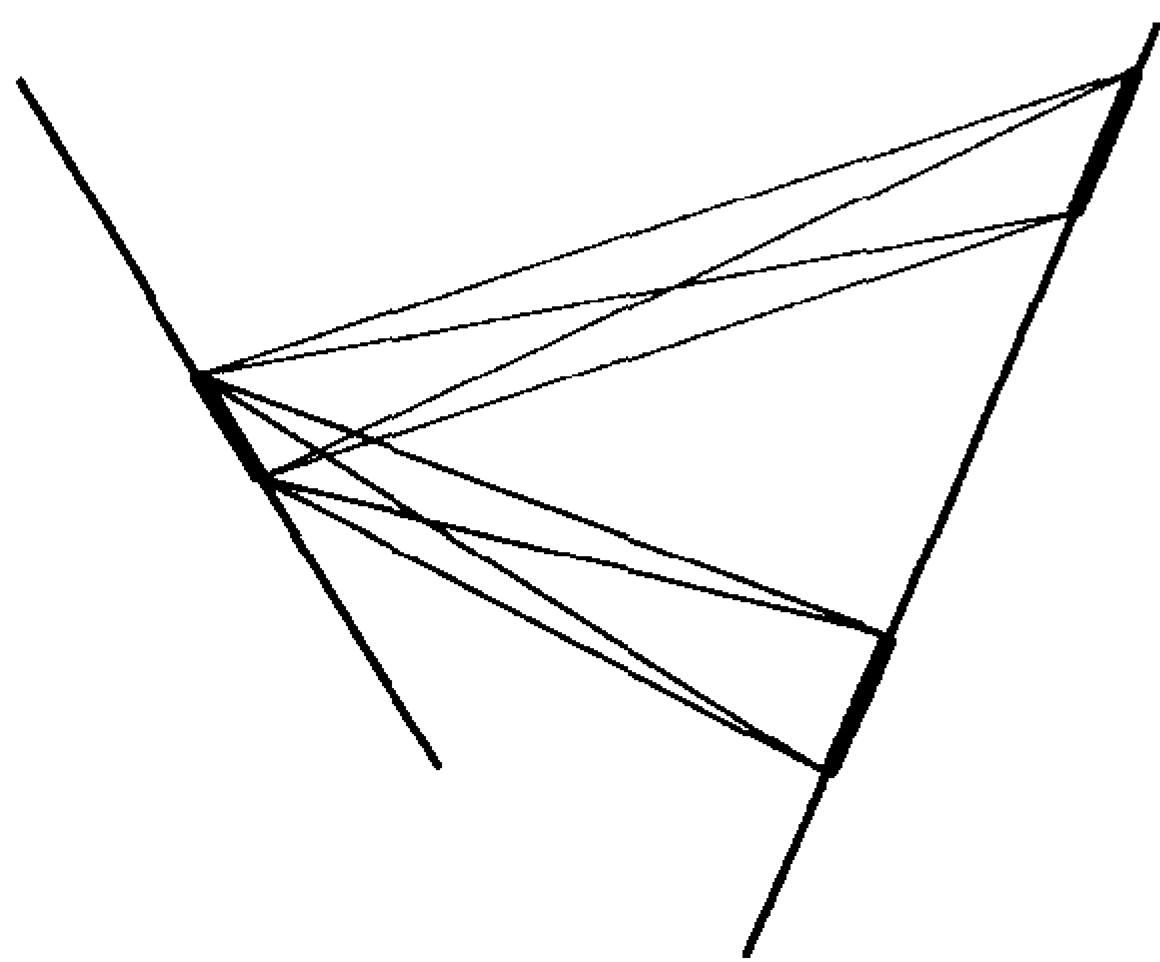
$$y^2z^2+x^2y^2+z^2x^2+xyz=0.$$

对称轴是延长到离作为原点的中心距离的$\frac{1}{2}$处的"收缩点"的二重直线. 它与位于四个平面 $x\pm y\pm z=0$ 内的四个圆相切. 它的形状本质上与七面体相同.



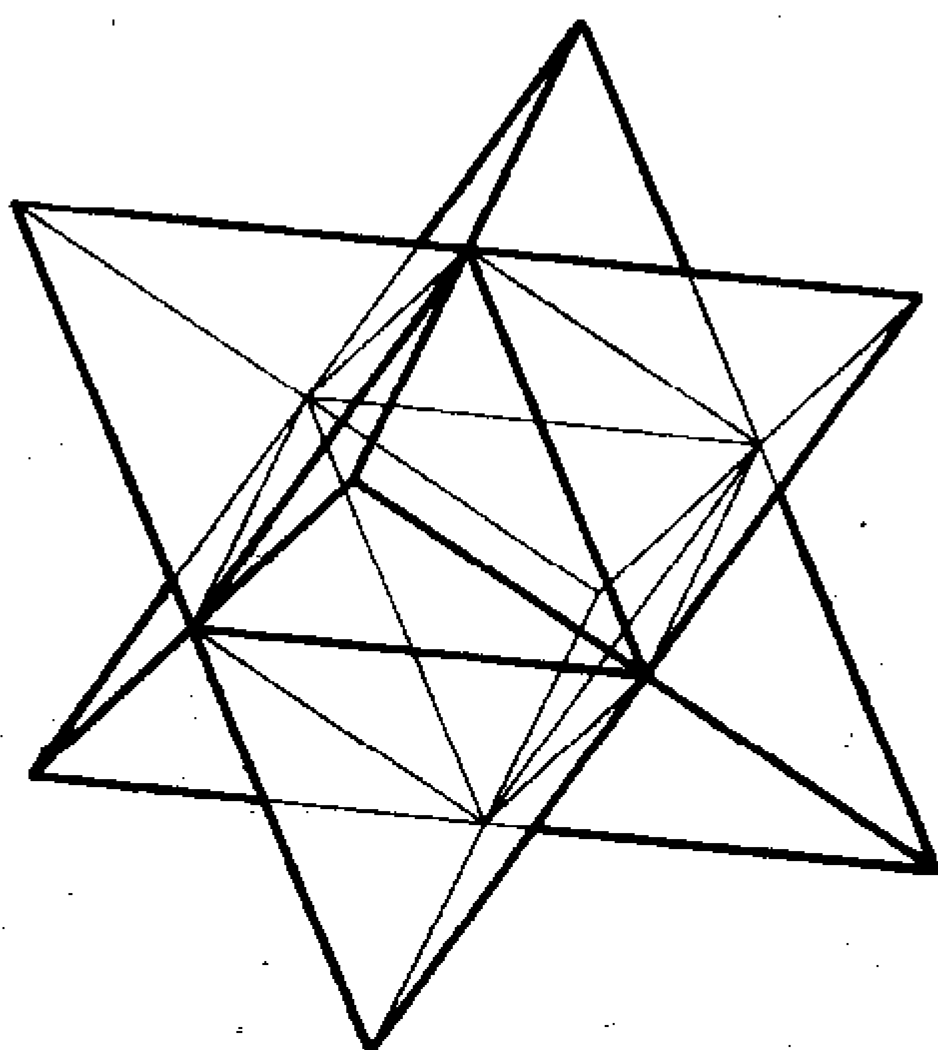
Steiner's theorem　斯坦纳定理

取两条异面直线，每一条上各取一条线段. 线段的长度固定，但可在所在直线上滑动. 连接这两条线段的端点得到一个四边体. 如果这两条线段的位置保持在本直线上滑动，那么该四面体的体积是一个常数，不会改变.



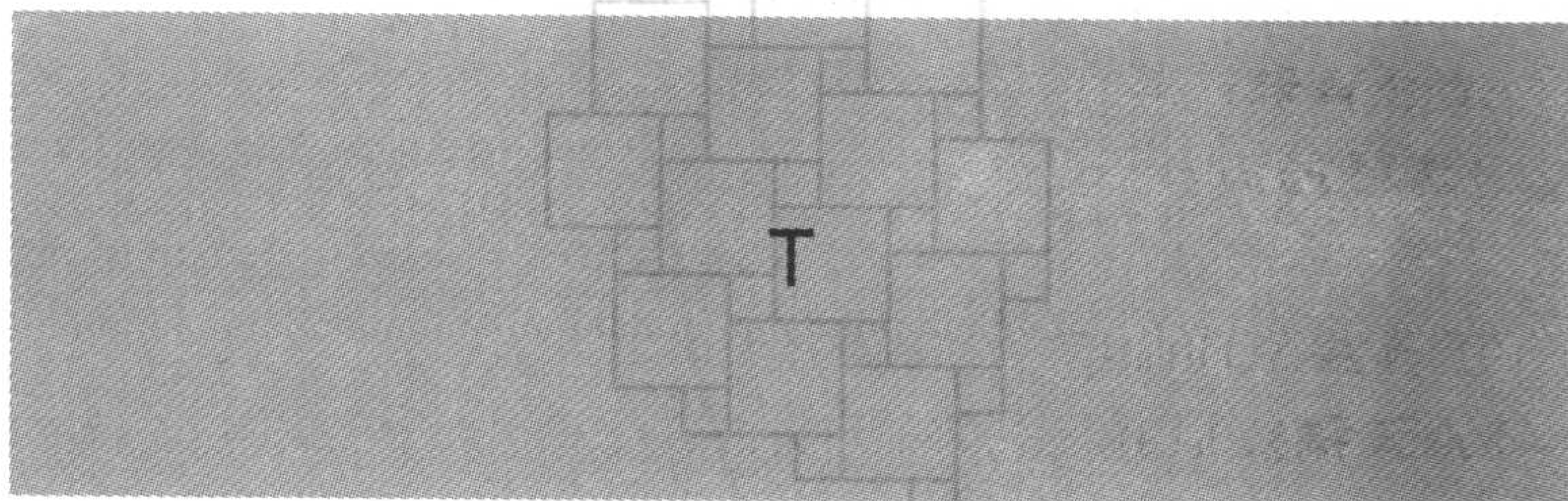
stella octangula　星状八面体

假定用一把平面锯子把一个方木块锯出一个小的正八面体，那么就得到九块木块，除了一块是正八面体以外，还有八块是从八个面上锯下来的小四面体.



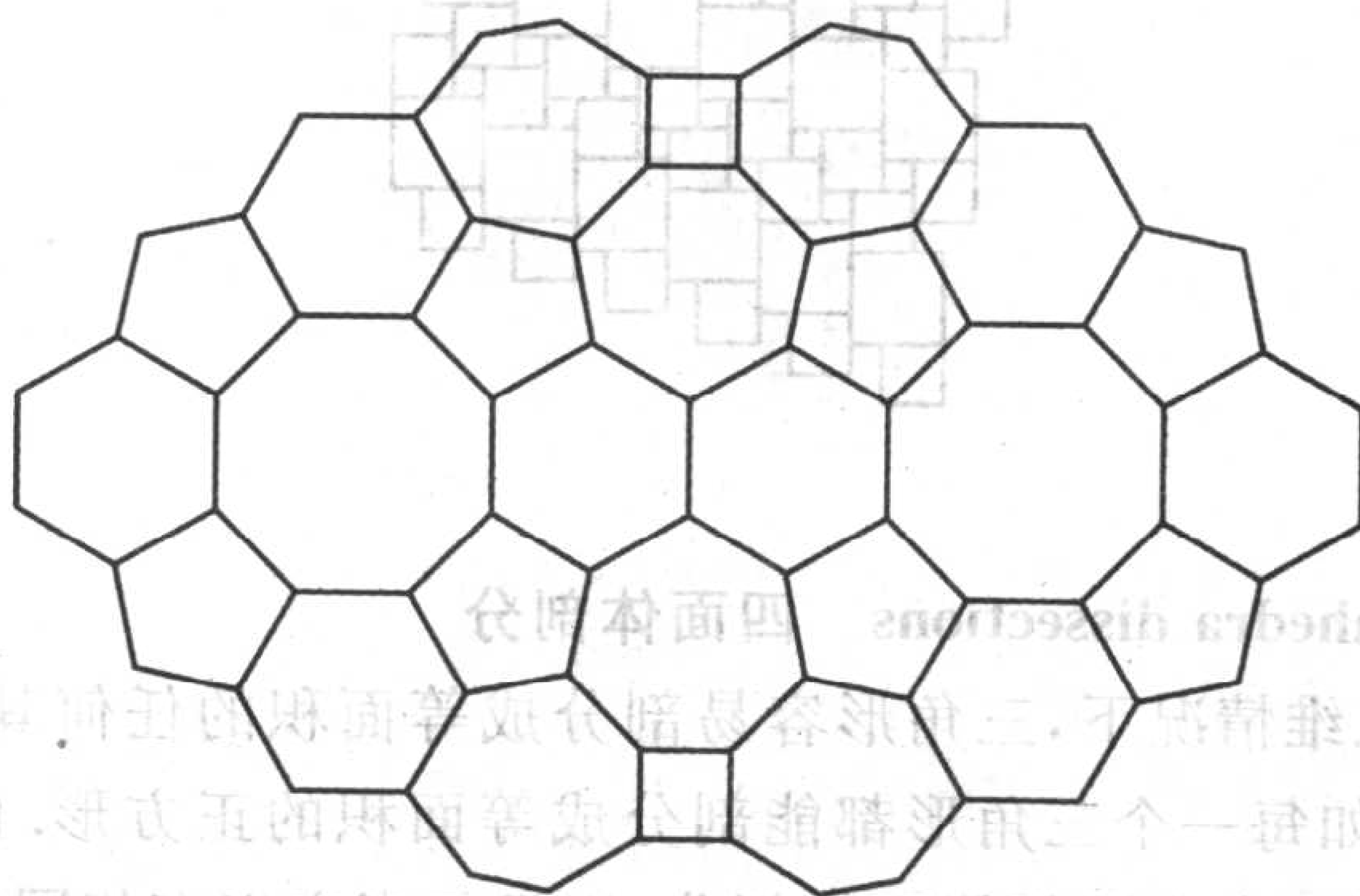
如果用这八个小四面体代替八个面，那么就得到这个唯一的星状正八面体，这是开普勒首先发现的. 也可以把星状八面体看是作延伸正八面体的面，使它们重新相交于新的棱所形成的立体图形.

星状八面体是两个正四面体的复合体，只要使这两个正四面体所选取的相对的顶点内接于一个正方体.



tessellation of almost-regular polygons　准正多边形镶嵌

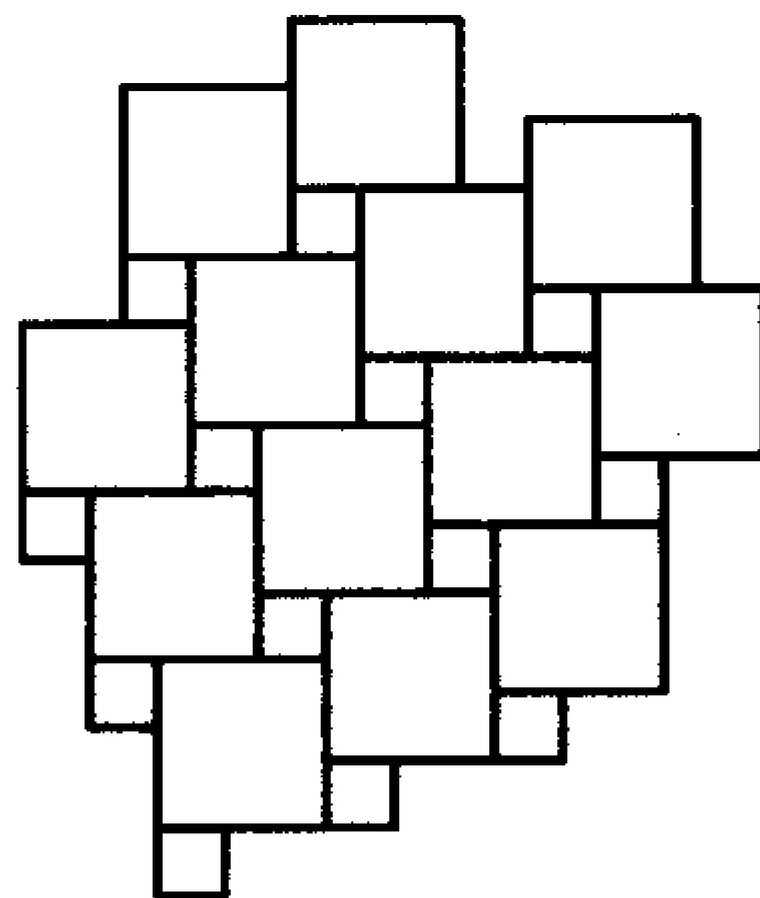
画一个由五、六、七、八边形组成的镶嵌是不可能的. 下面这个取自于具有伊斯兰风格的图形表明几乎是可能的. 若允许对镶嵌中的正多边形的角度稍作调整,那么下图中的五边形和七边形就不是很正的了.



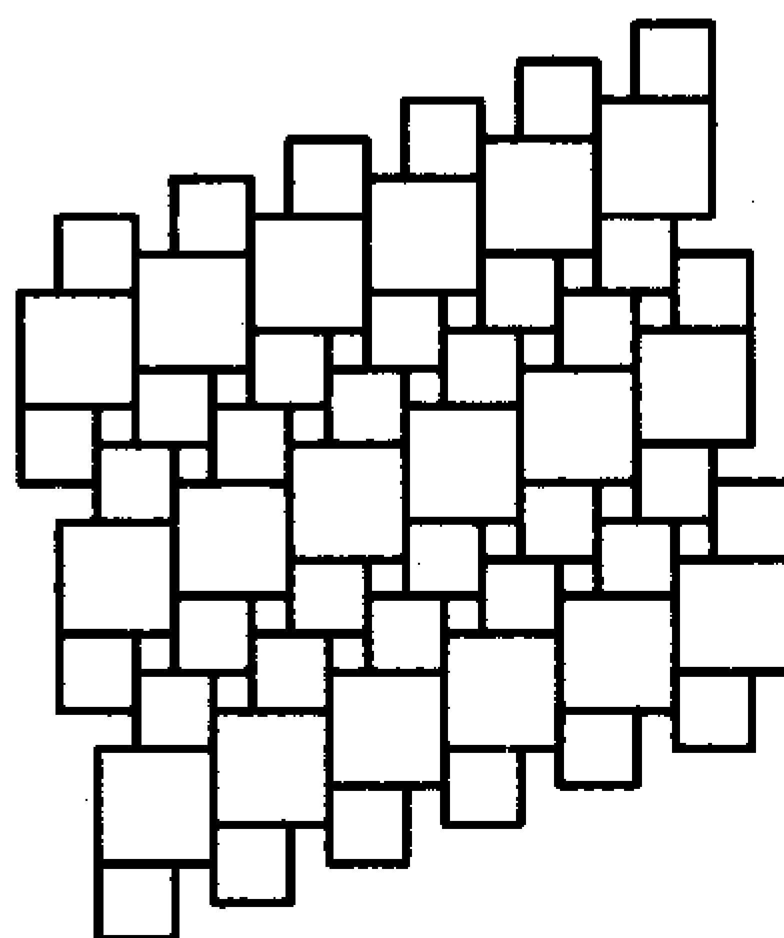
tessellations of several squares　若干种大小不同的正方形的镶嵌

取一个标准的正方形网格,并允许正方形在平行于其棱的两个方向上移开;正方形之间的空隙变成正方形,其大小可任意选取. 结果就形成两种大小的正方形镶嵌.





许多种不同大小的正方形的镶嵌也是可能的.下图就包括三种不同大小的正方形：

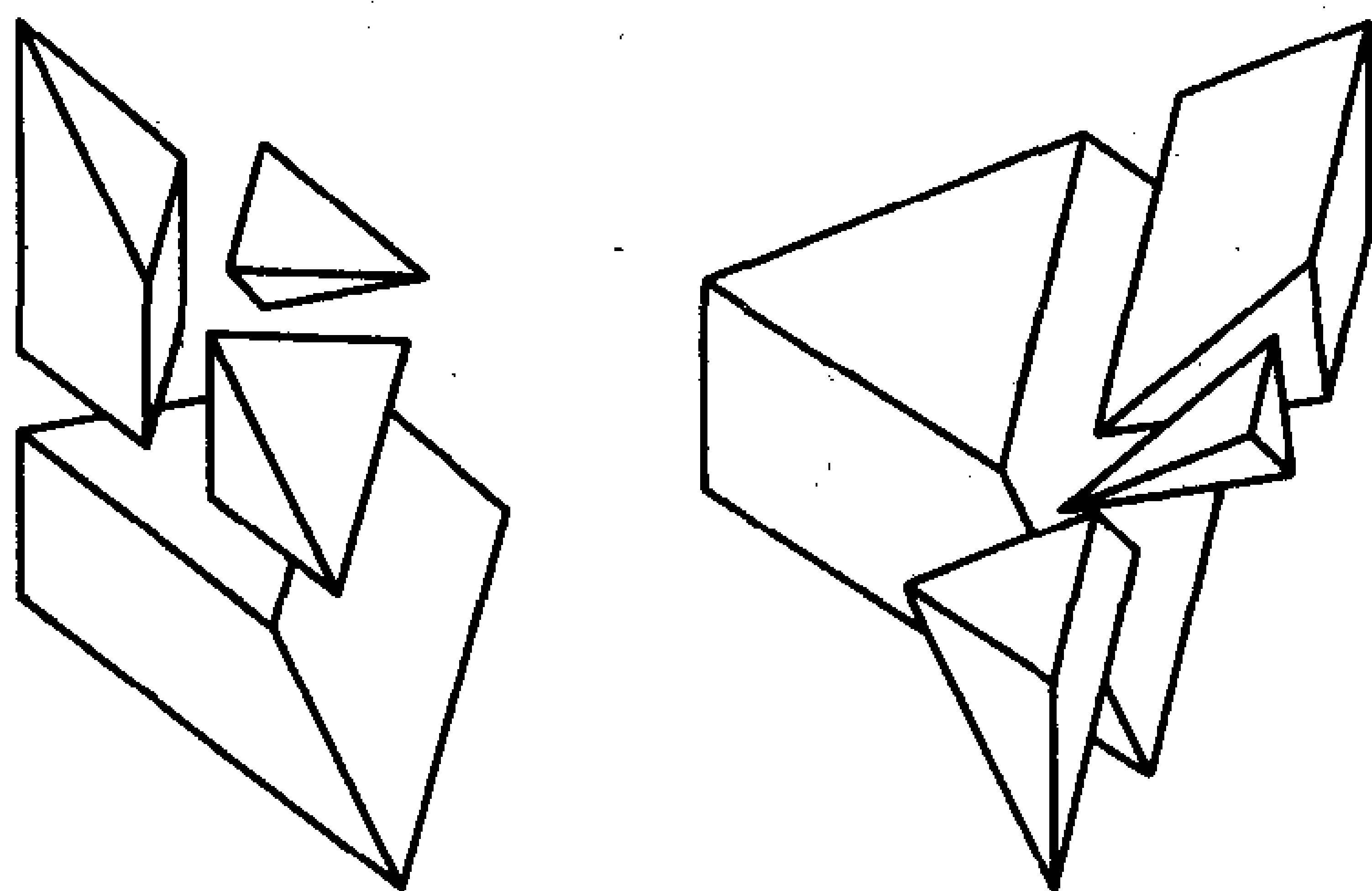


tetrahedra dissections　四面体剖分

在二维情况下，三角形容易剖分成等面积的任何其他的三角形，例如每一个三角形都能剖分成等面积的正方形.的确，任何两个平面多边形都能互相剖分，当且仅当它们有相同的面积.两个等体积的四面体一般说来是不能互相剖分的.在三维情况下，两个等体积的多面体一般说来是不能互相剖分的.1900 年希尔伯特(David Hilbert)在巴黎国际数学家大会上的发言中提出他的著名的“二十三个问题”，他猜想这是不可能的.（困难产生于任何奇数维的欧氏空间中.）

把一个四面体剖分后拼成一个三棱柱是希尔(M. J. M. Hill)

的发现之一,并发表于 1896 年. 该棱锥底面的一条看不见的棱垂直于右面的水平方向的棱和左面的竖直方向的棱. 所有这些棱的长都相等. 第一刀沿水平方向截,截到向上三分之一处,第二刀竖直方向截,截到离从左面的棱到第一刀截得的棱一半的地方.

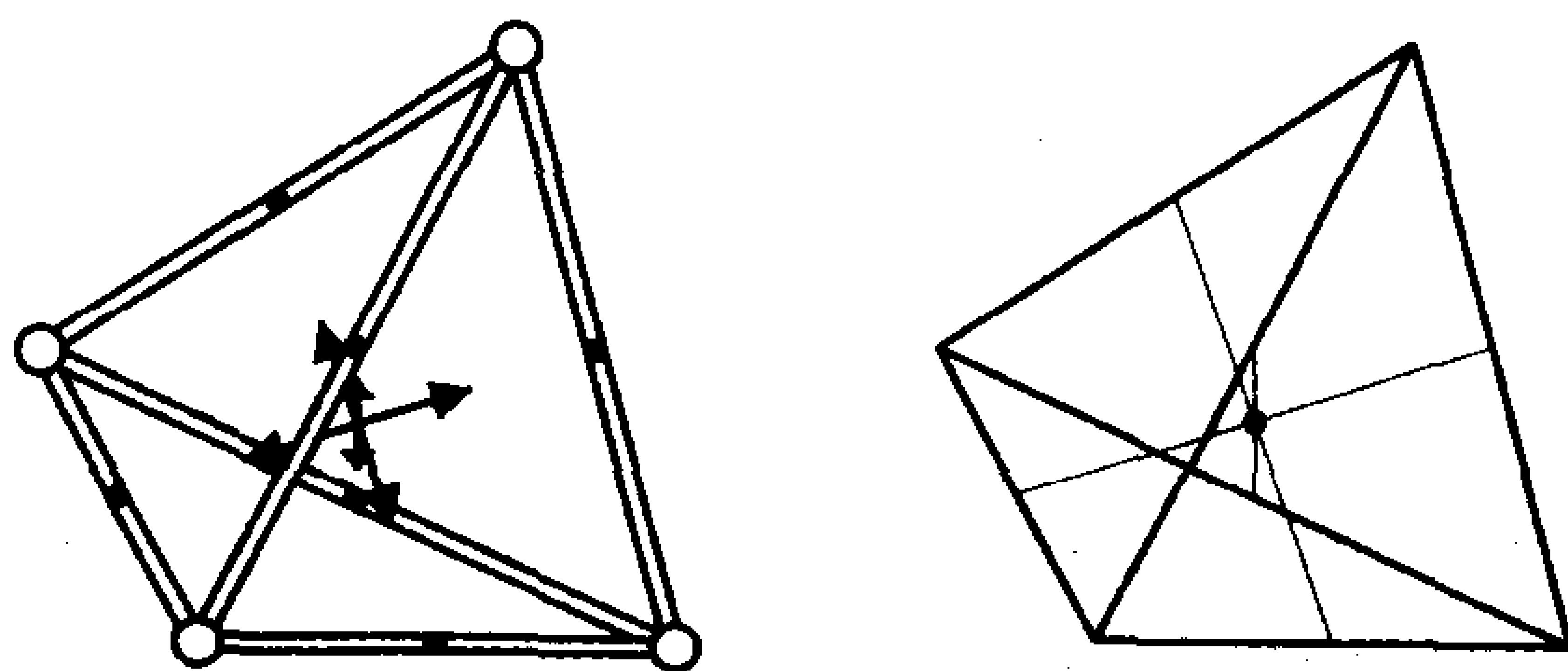


第二个图中的棱柱一旦形成,就变为平行六面体,然后再割成正方体.

参考书:V. C. BOLTYANSKII, *Hilbert's Third problem*, Wiley, New York, 1978.

tetrahedron　四面体

四面体的顶点处的等重砝码的重心可以这样求得:先把它们分成两对,再取连接每一对砝码的线段的中点. 这两点就是连接一组对边中点的线段的中点,重心就是连接这两个中点的线段的中点.



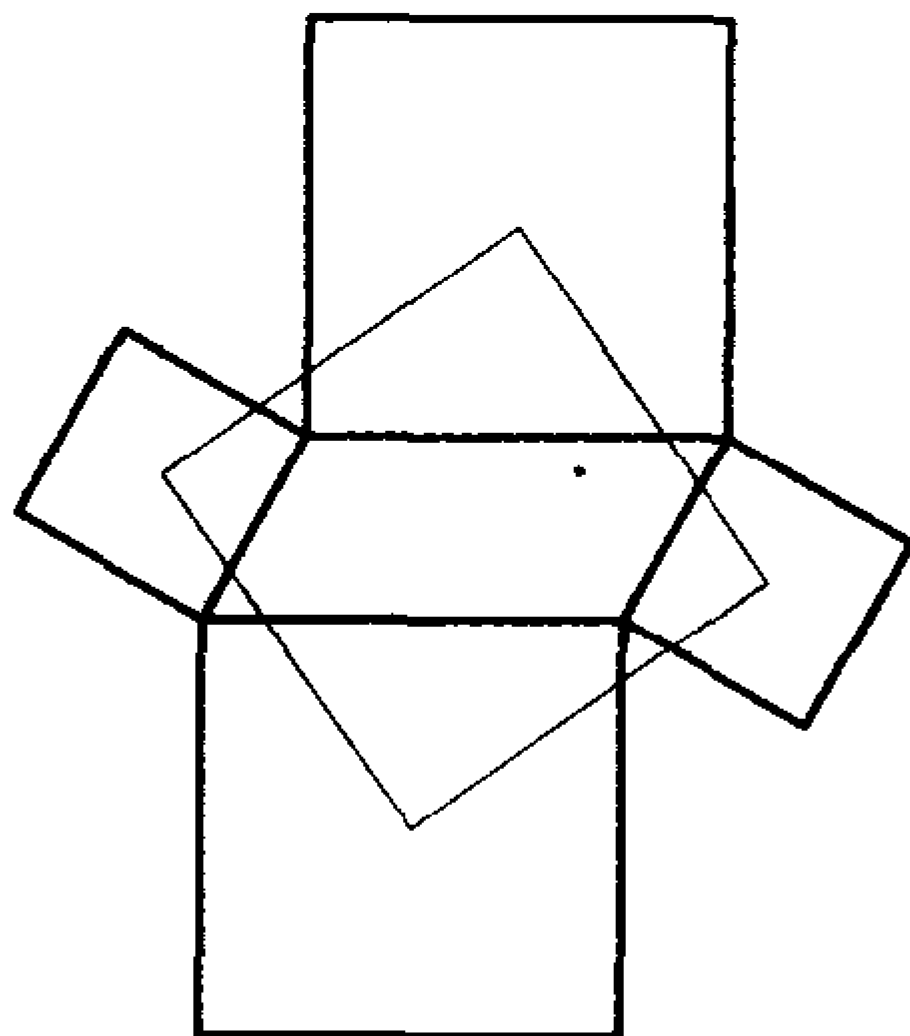
由于每一组对边有三种选择，所以可以推得：连接每一组对边中点的线段共点. 此外，第二个图形暗示，将一个四面体射影到一个平面时，将得到一个关于四边形的边和对角线的中点的定理.

有八个球与一个一般四面体的四个面相切，其中一个内切，七个旁切. 对于正四面体而言，有三个旁切球的球心在无穷远.

一般四面体的高不共点. 如果对棱互相垂直，那么高就相交. 如果一对高相交，那么另一对高也相交，如果三条高共点，那么第四条高也共点. 这可以从斯坦纳在 1827 年发表的漂亮的结果推出，这一结果就是：与一般四面体的三条高相交的直线必与第四条高相交.

Thébault's theorem　台包定理

著名的行家但不是初等几何的行家维克多·台包(Victor Thébault)在 1937 年发表了他的结果：在任何平行四边形的边上各画一个正方形，那么它们的中心组成一个正方形.

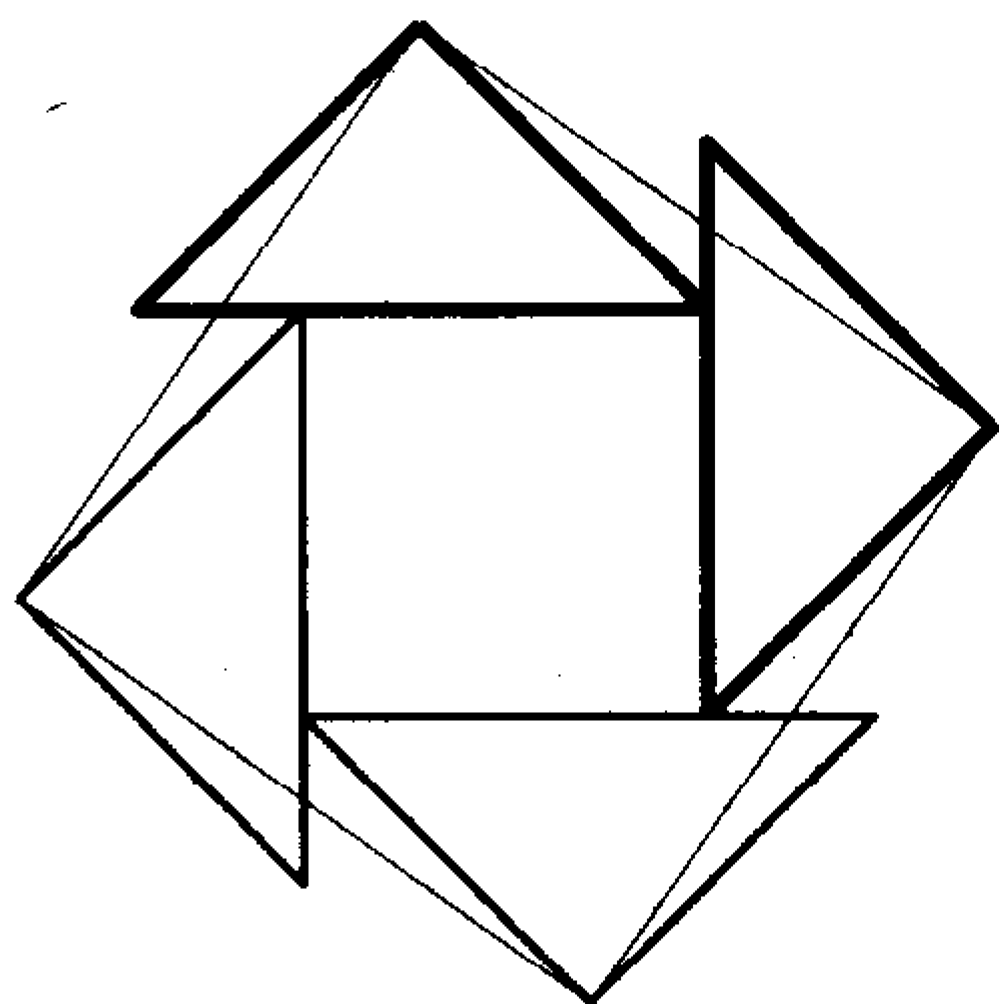


three squares into one　把三个正方形合为一个正方形

关于剖分的第一篇论文是阿布尔·维法(Muhamuued Abu'l-Wefa)写的. 下图是他把三个同样的正方形剖分后拼成

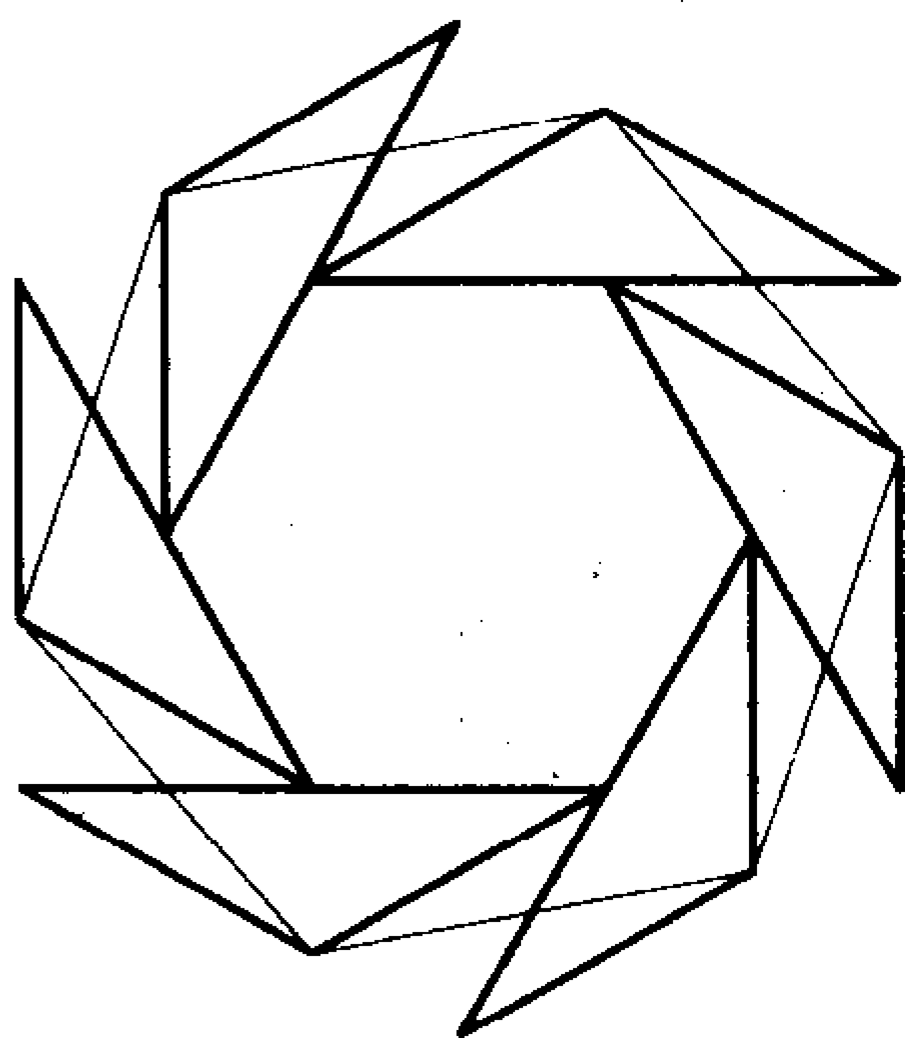
一个正方形的方法.

如果外面几个半个正方形与里面的正方形的大小不同，那么同样的结论也成立.它们也可以看作是一个大正方形的四分之一，在这种情况下，原来的剖分是对这样的两个正方形进行的，其中一个的面积是另一个的两倍，然后合成一个正方形.

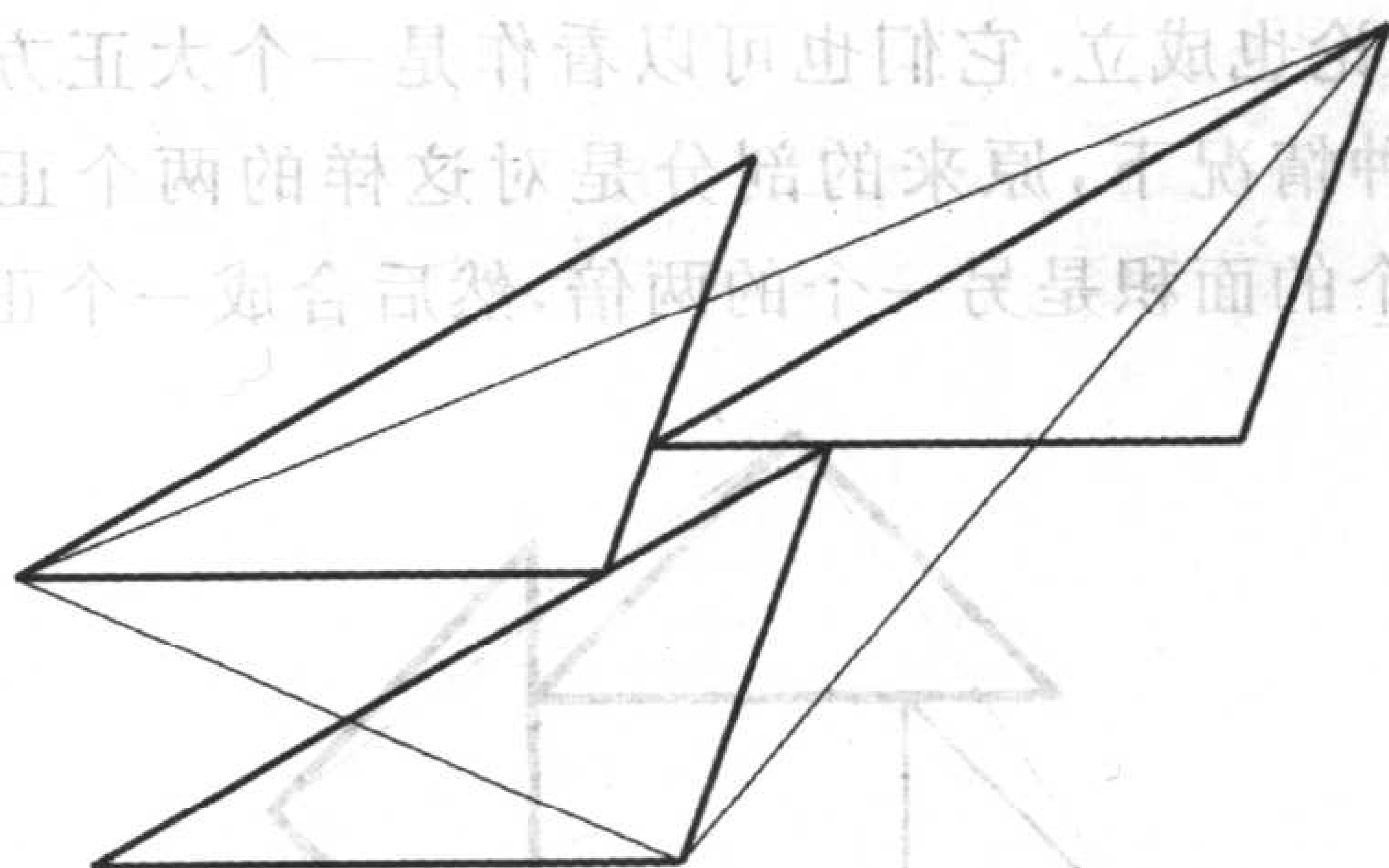


所有这些变式都与两种大小的正方形镶嵌有关.就拿这样一种镶嵌来说，在其内部取一个较小的正方形，它周围的四个大正方形各取四分之一.

阿布尔·维法的问题有两种变式.第一种把一个正六边形分成六个120°的等腰三角形，放在另一个六边形的周围.这样就能把任何两个不同大小的正六边形剖分后合为一个正六边形.



在第二种变式中，把三个全等的三角形和一个相似的三角形剖分后合成一个与原三角形相似的大三角形.



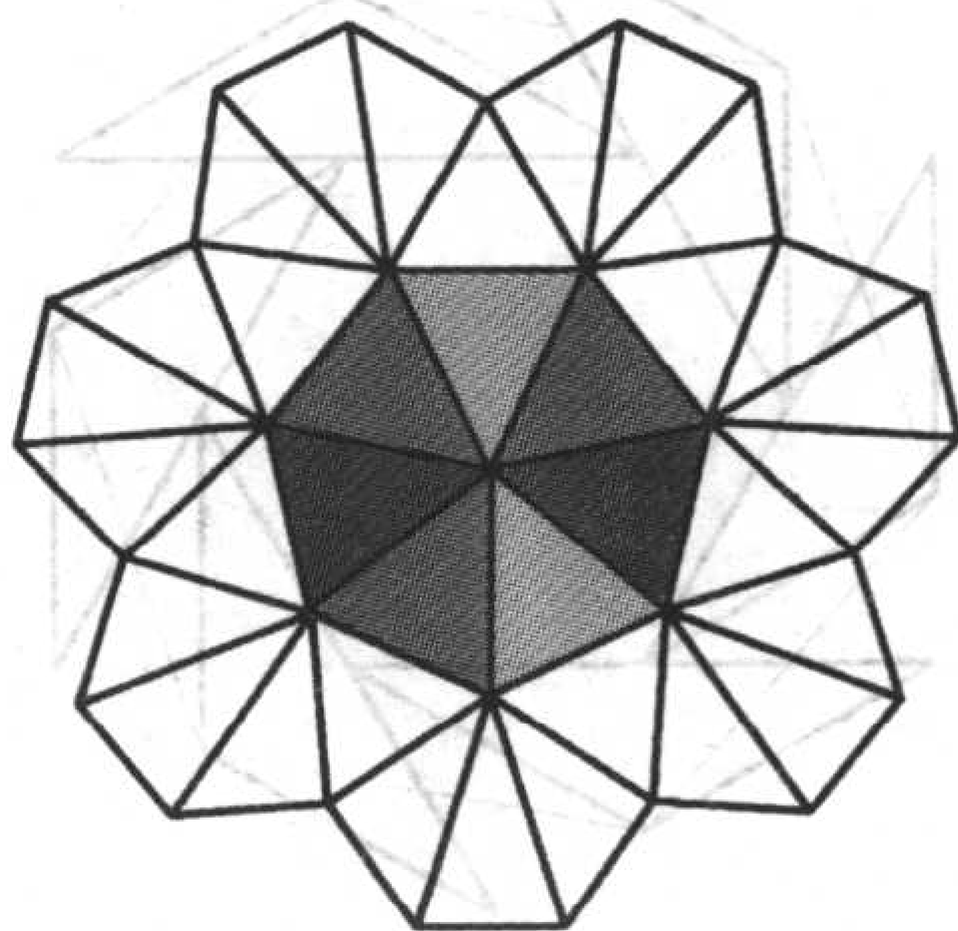
然而，另一个关于同一问题的变式是剖分一个希腊十字架后合成一个正方形，只要连接每第三个顶点即可.

参考书：DAVID WELLS, On gems and generalisations, *Games and Puzzles*, *june* 1975.

Thurston's hyperbolic paper　舍斯屯双曲面纸

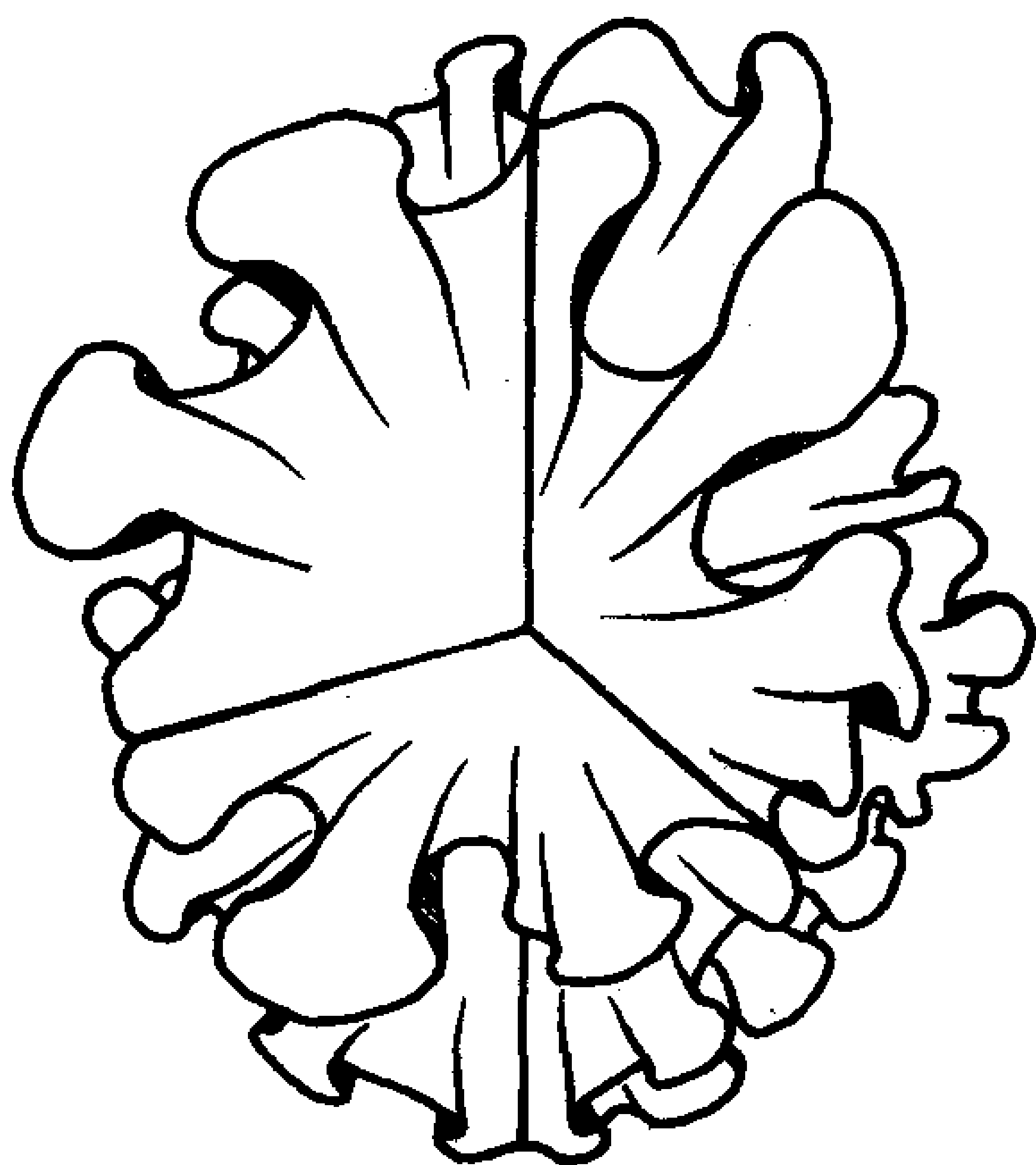
为了对普通空间和双曲几何空间的差别有一些直观的认识，威廉·舍斯屯(William Thuston)提出了这一模型.

在每一点的周围放七个等边三角形，将这些等边三角形做成一个曲面. 这个曲面较为松散，如果一直在每一个顶点处放七个等边三角形，曲面越扩大，曲面就越松散.



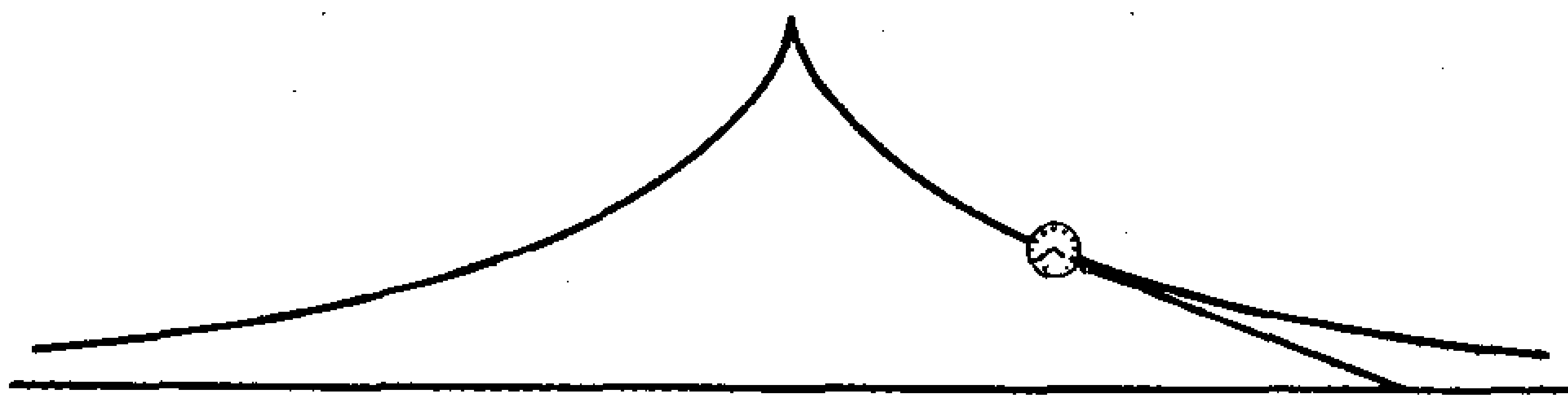
在一点周围的双曲空间比欧几里得空间“多”，如果把这一双曲空间的模型压扁，它就会变皱或者重叠. 这就与球面的情况相反，如果把球面压扁，那么球面就会被撕裂，在球面的情况下，离出发点越远，球面本身就收得越紧.

下面的图形表示三条互相垂直的轴及经过轴的互相垂直的三个平面. 这些‘平面’并不是完全平的，甚至在原点附近也不平，越远离原点越皱.



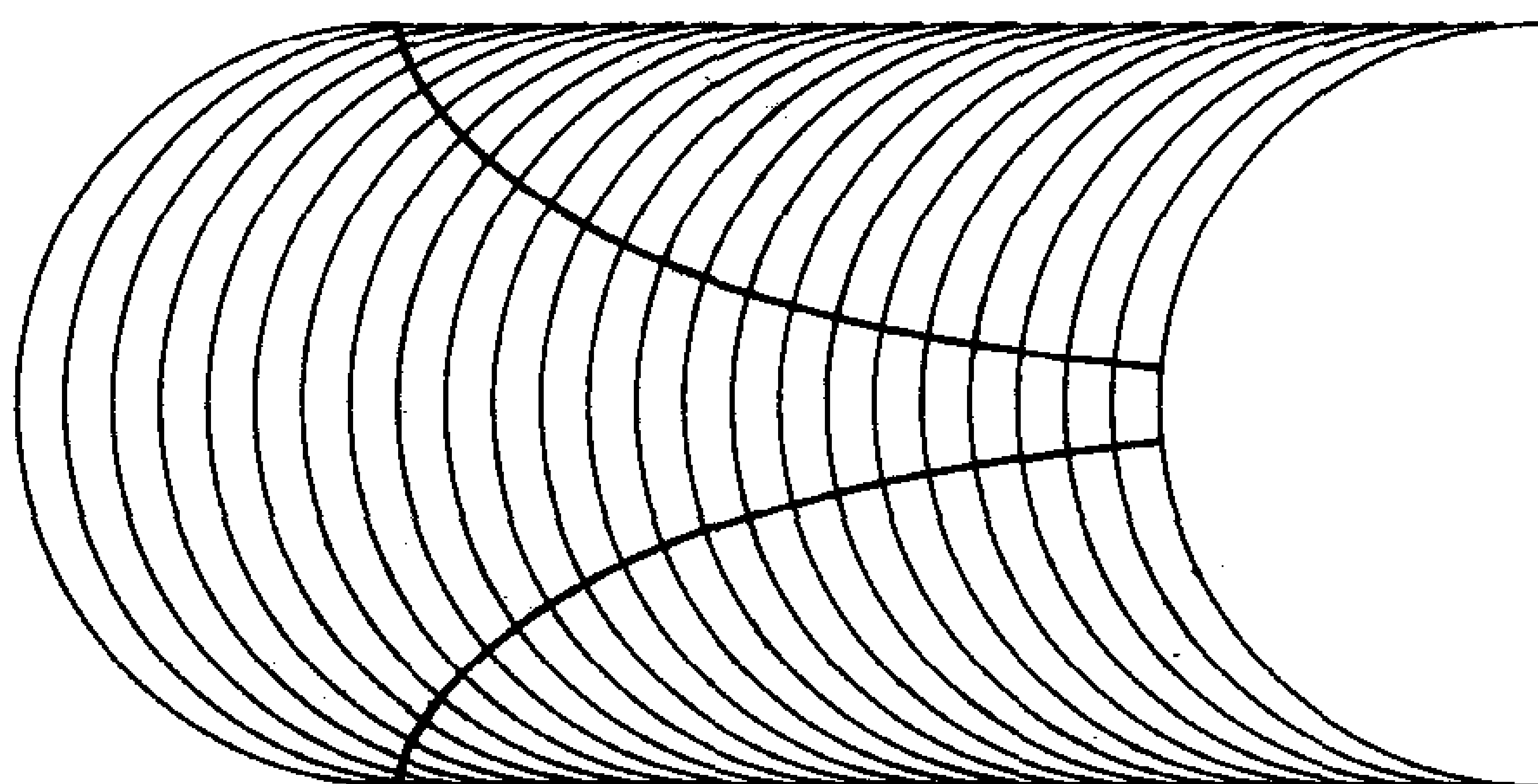
tractrix　曳物线

桌上放一个老式怀表，把怀表的链条靠在桌子的边缘. 沿桌子的边缘拉链条，那么怀表形成的路线就是一条曳物线，或者说是这条曳物线的一半. 桌子的边缘是曳物线的渐近线. 如果绕渐近线旋转，那么所得到的曲面就是伪球面.



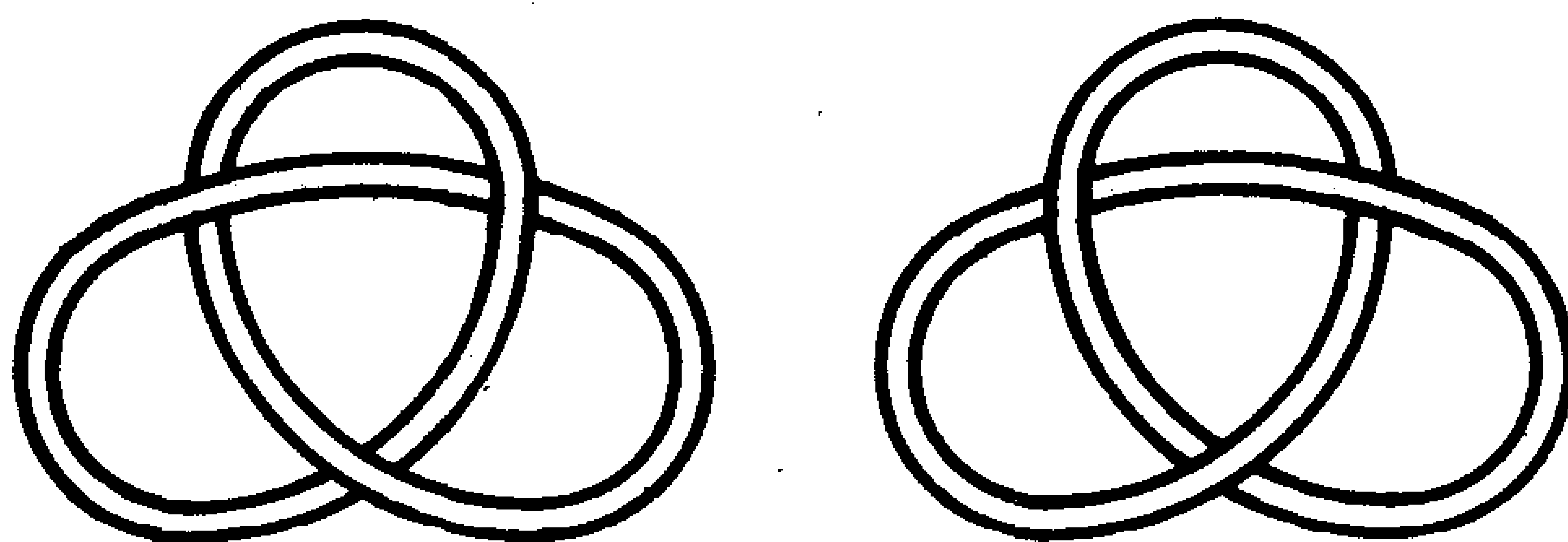
曳物线是悬链线的渐伸线.用一条线绕在半条悬链线上,线的一端固定在顶点上,把线绷紧后拉开,那么线的一头形成的路线就是一条曳物线,尽管曳物线是无限长的,但曲线和渐近线之间的面积却是一个有限值$\frac{\pi a^2}{2}$,这里 a 是顶点到渐近线的距离.

现在考虑圆心在同一直线上的无穷多个等圆.与此同时所有的圆相交成直角的曲线(圆心线除外)是曳物线.



trefoil knot　三交叉结

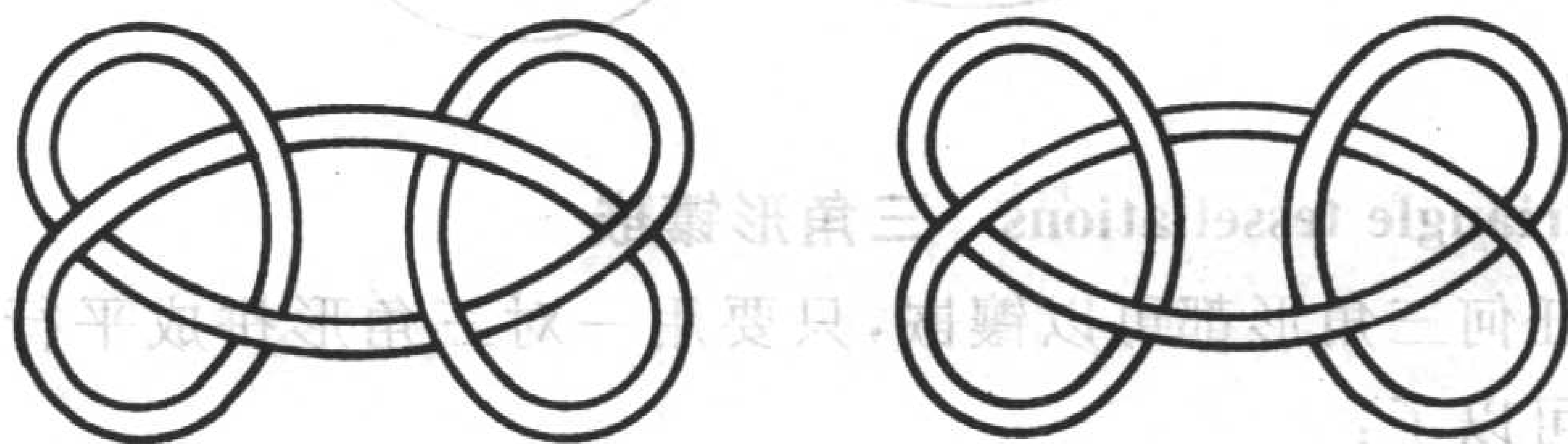
下面的图是所有正规结中最简单的,它只有三次交叉.它有左旋和右旋两种不同的情况.在四维空间中,每一种形式都可以变换为另一种形式,莫比乌斯在 1827 年就认识到这一点了.



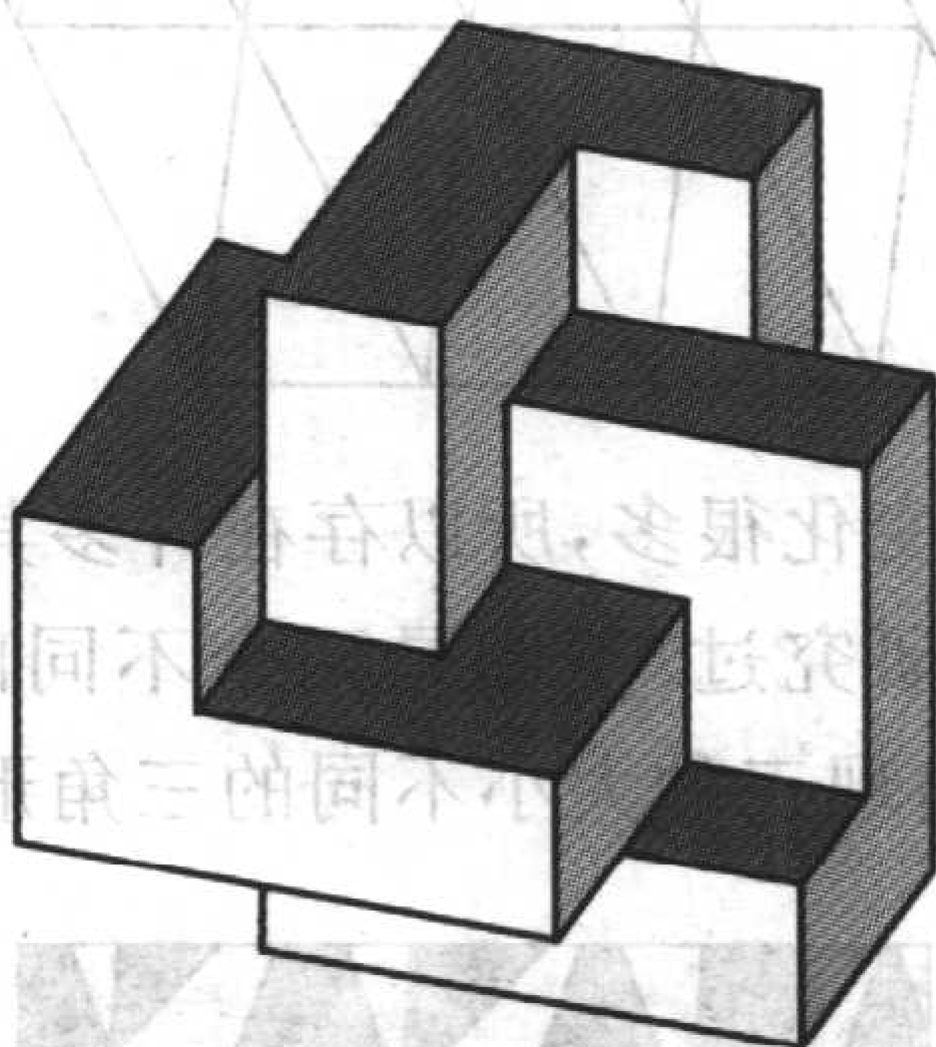
第二张图表示三交叉结的三重对称性.它等价于右图中连通纸条的边缘.



两个同向的三交叉结构成一个姥姥结，一对反向结（互为镜对称）构成一个缩帆结：

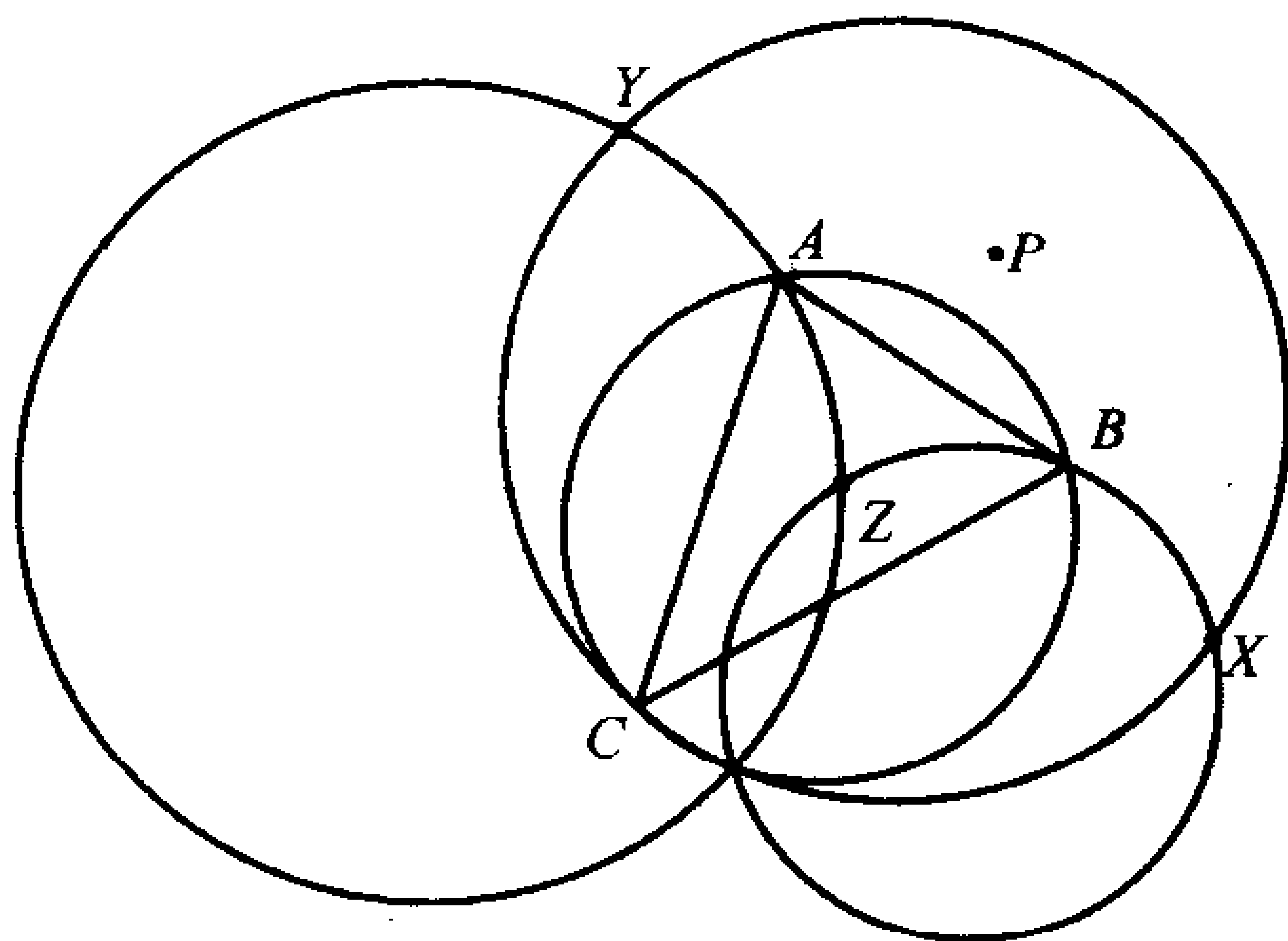


下图是一个最短的三交叉结，它的带子是一连串面对面的正方体“结成”的：



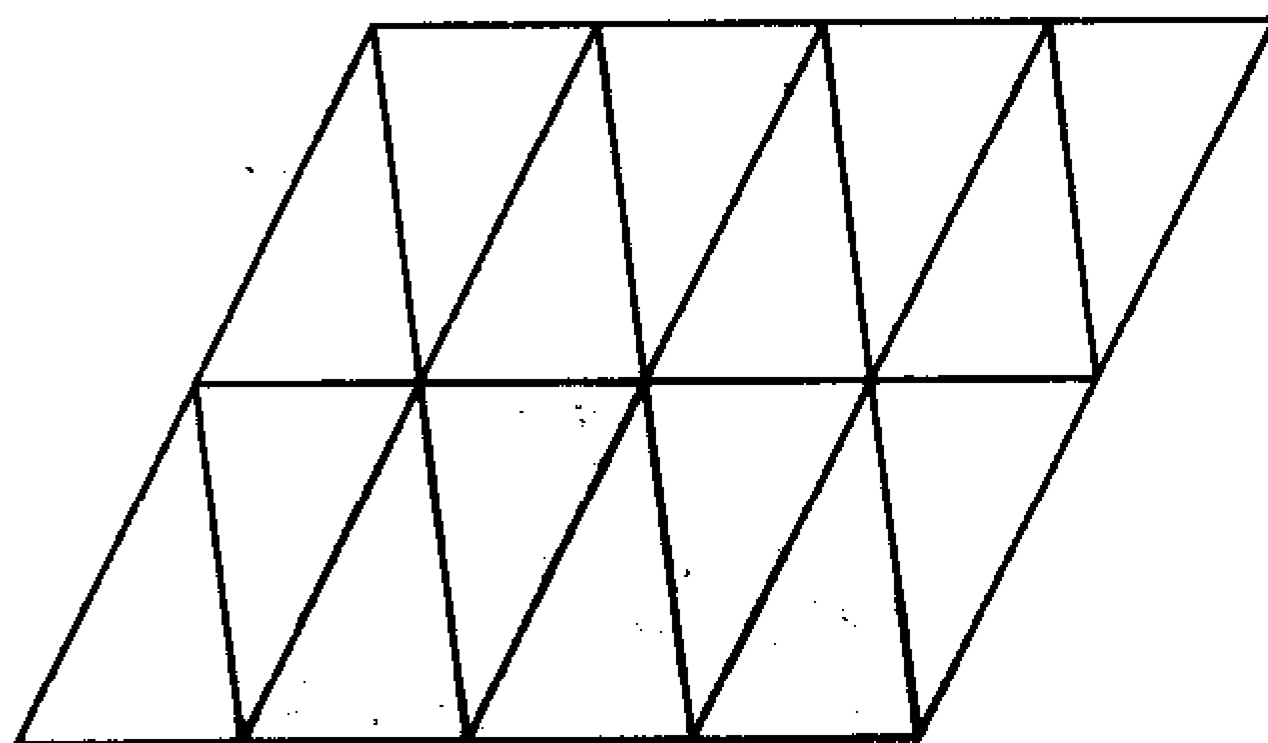
triangle reflections　三角形反射

画一个三角形 ABC，再任取一点 P. 设 P 关于三角形的三边的反射点分别是 X,Y,Z. 于是圆 XYC，YZA，ZXB 和圆 ABC 本身共点.

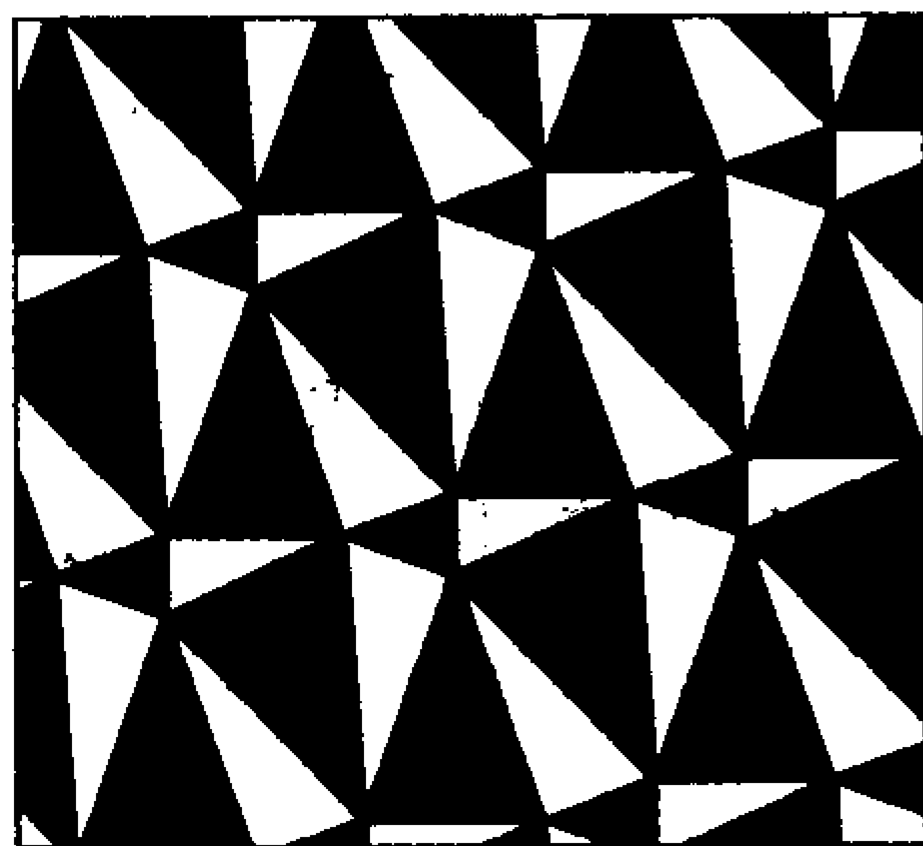


triangle tessellations　三角形镶嵌

任何三角形都可以镶嵌，只要用一对三角形拼成平行四边形就可以了：

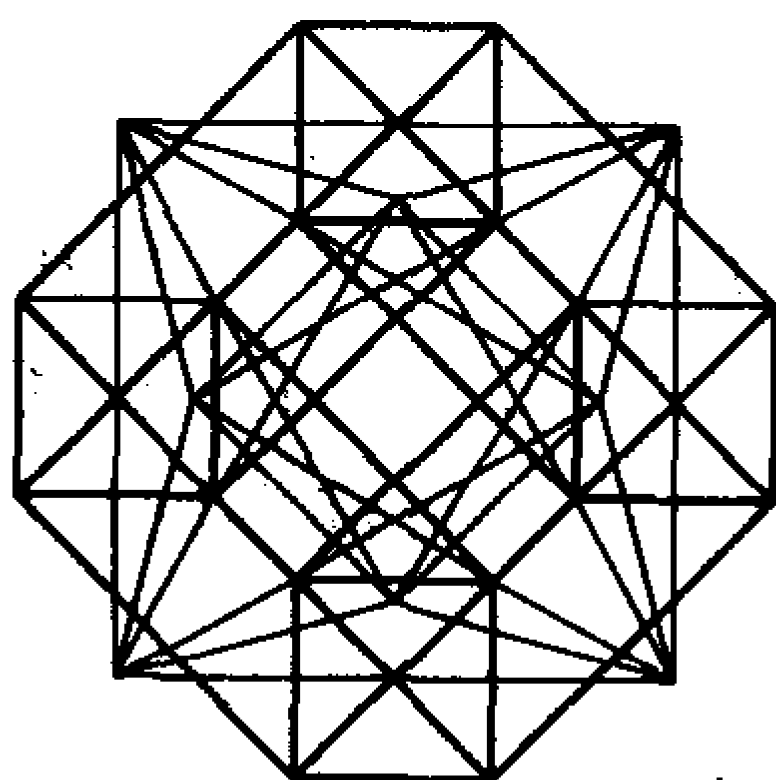


由于三角形的变化很多，所以存在许多其他的可能的镶嵌，这些镶嵌几乎未曾研究过．下图是两个不同的三角形的一个镶嵌，每一种镶嵌都出现三种大小不同的三角形．



twenty-four cell　二十四胞腔

这一四维单体是自对偶的，它有 24 个胞腔和 24 个顶点，96 条棱和 96 个面. 24 个胞腔中的每一个都是一个正八面体. 每一个正八面体都有 8 个等边三角形的面，每一个面都属于 2 个八面体：因此有 96 个面.

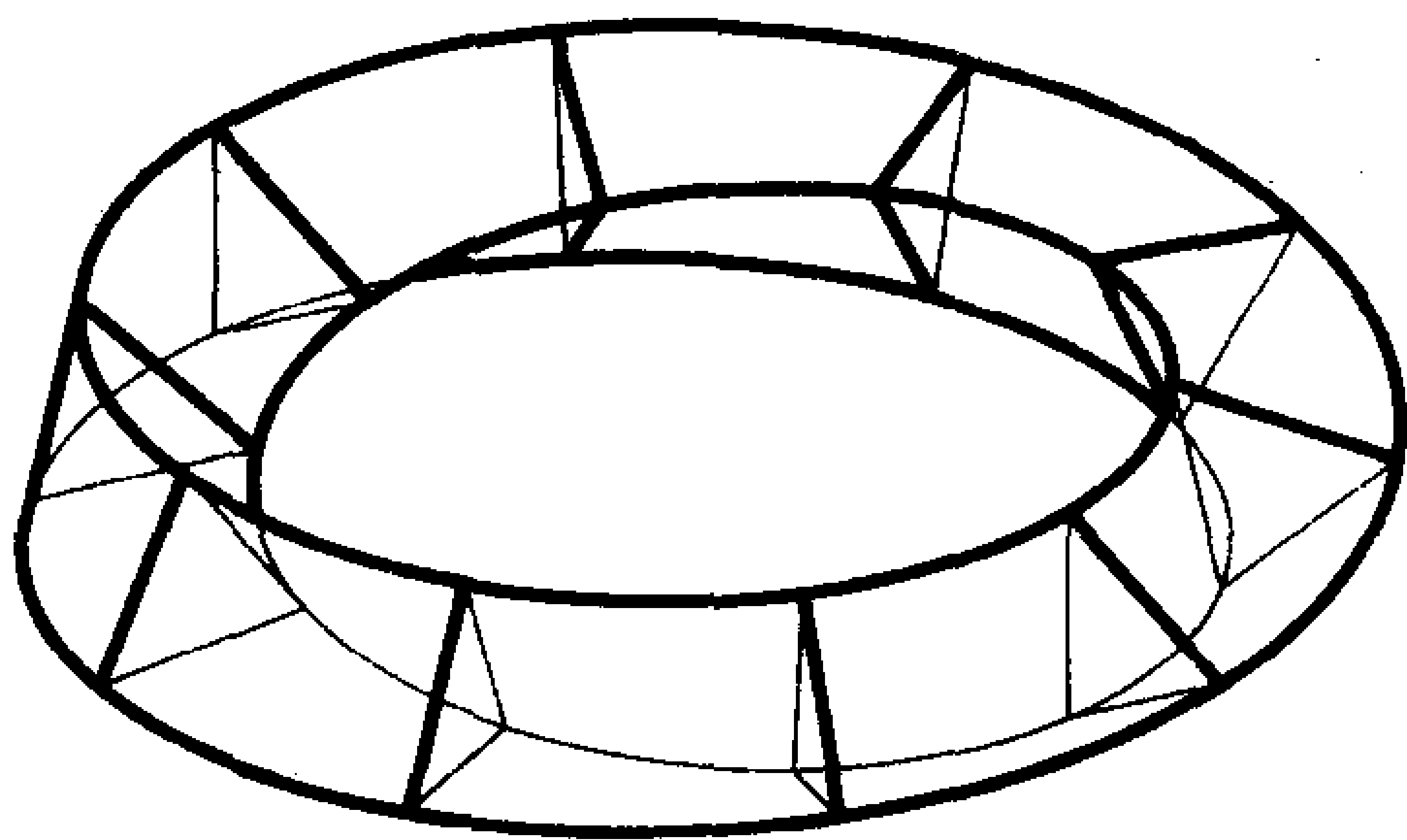


这个 24 胞腔是 16 胞腔截得的. 像超立方体一样，它可填满四维空间.

菱形十二面体可以用两个正方体构成：先连接其中一个正方体的顶点和中心，将正方体分割成六个棱锥，然后在另一个正方体的每一个面上贴一个棱锥. 类似地，24 胞腔可用两个超立方体构成：先把一个超立方体割成 8 个立方锥，然后在另一个超立方体每一个 8 胞腔上贴一个立方锥.

twinsted triangular prism　扭曲三棱柱

下图是将一个三棱柱扭曲，然后连接两头得到的. 它有两个

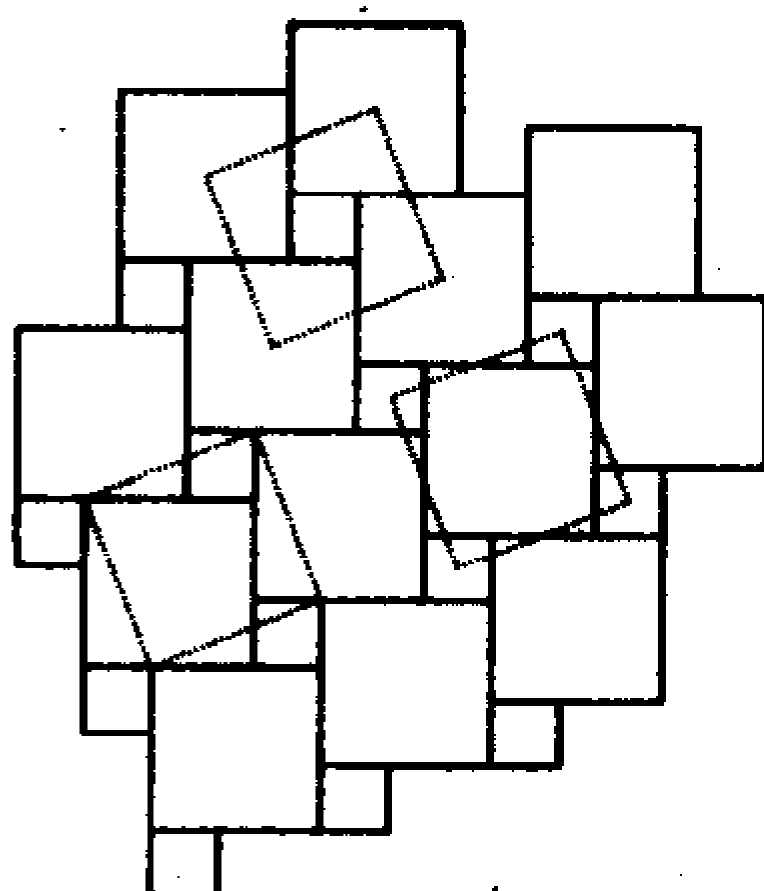


面和一条棱，等价于这样一个立体环面，一条螺线绕它转三周后回到出发点.

有一个雕塑坐落在伦敦的南方银行的地面上，一部分嵌在一个扭曲三棱柱上，其中有几块已经不见了.孩子们很喜欢在这个雕塑上玩.

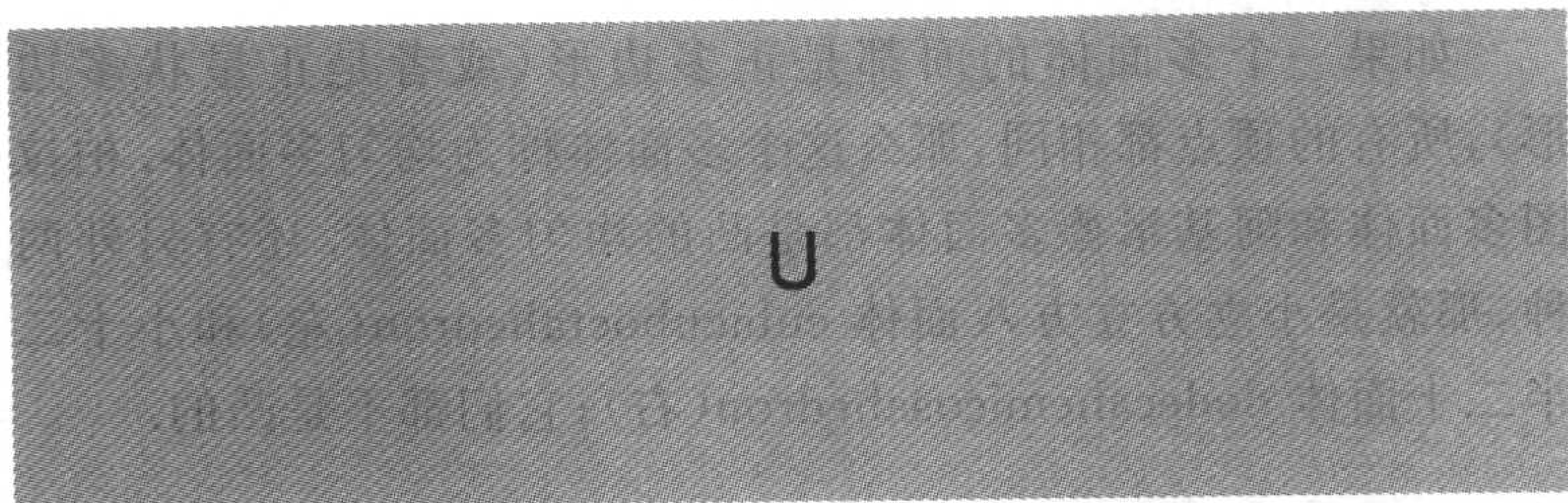
two squares tessellation　两种不同大小的正方形镶嵌

任何两种不同大小的正方形都可以用来作下面的简单的镶嵌，也可以把它看作为大正方形的镶嵌，其中每一行和每一列都被拉开同样的长度，留下一个有许多同样的小方洞的图案.



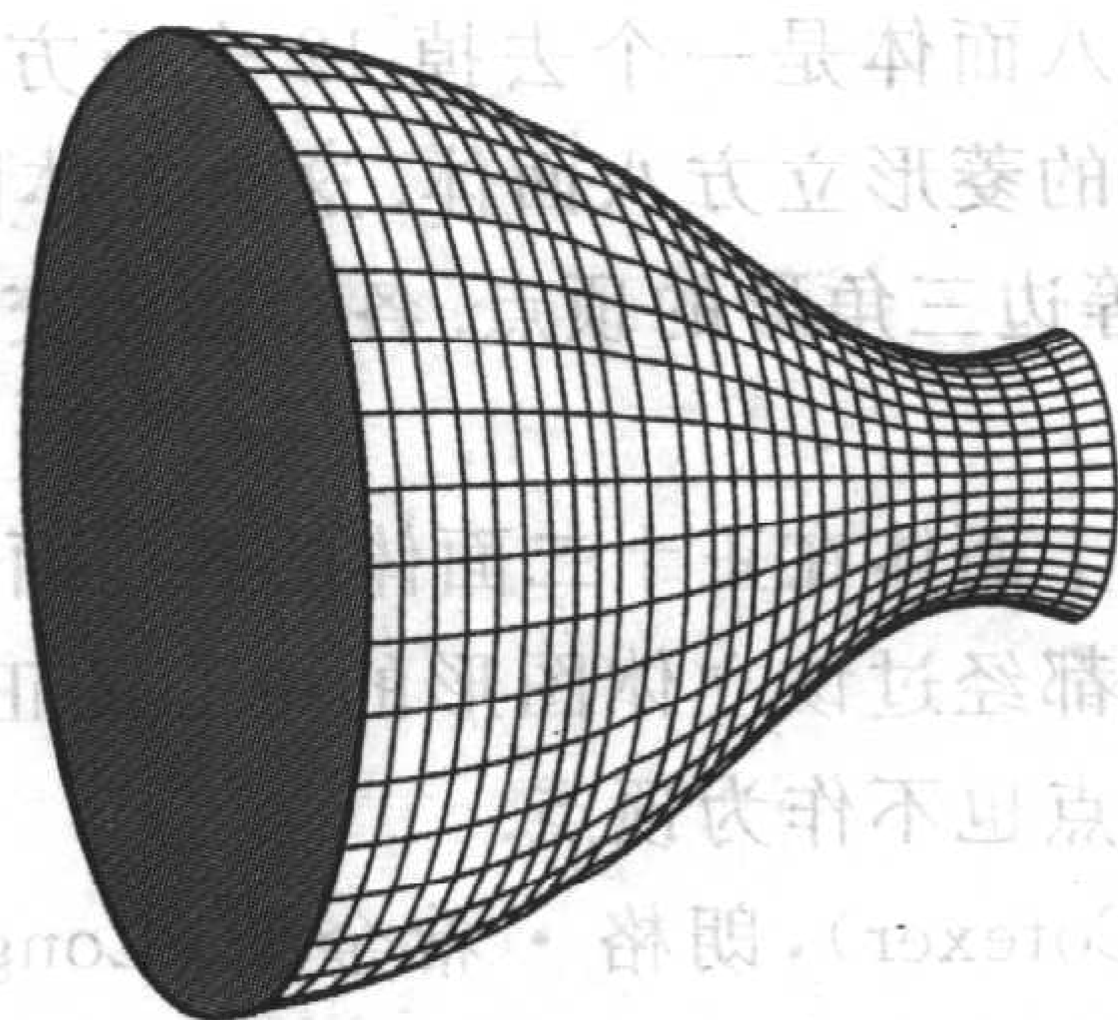
像希腊的十字镶嵌那样，适当选取任意四个相应的点，再连接这些点得到一个由原来的两个正方形合成的一个大正方形的镶嵌.由两个正方形合成一个正方形的几个最著名的剖分显然与选取的点有关，例如，取大正方形的中心，或者取小正方形的中心，或者取在正方形的角上.

所有这些剖分对证明毕达哥拉斯定理都很有效.



unduloids　波状曲面

如果把一对互相平行，并在同一条轴上的圆环浸在肥皂液里，那么除去这两个环后，形成的最小曲面称为悬链面．但是，如果用两个固定的圆盘代替圆环，使薄膜中的压力不再等于外界的压力，那么这个最小的曲面称为波状曲面．

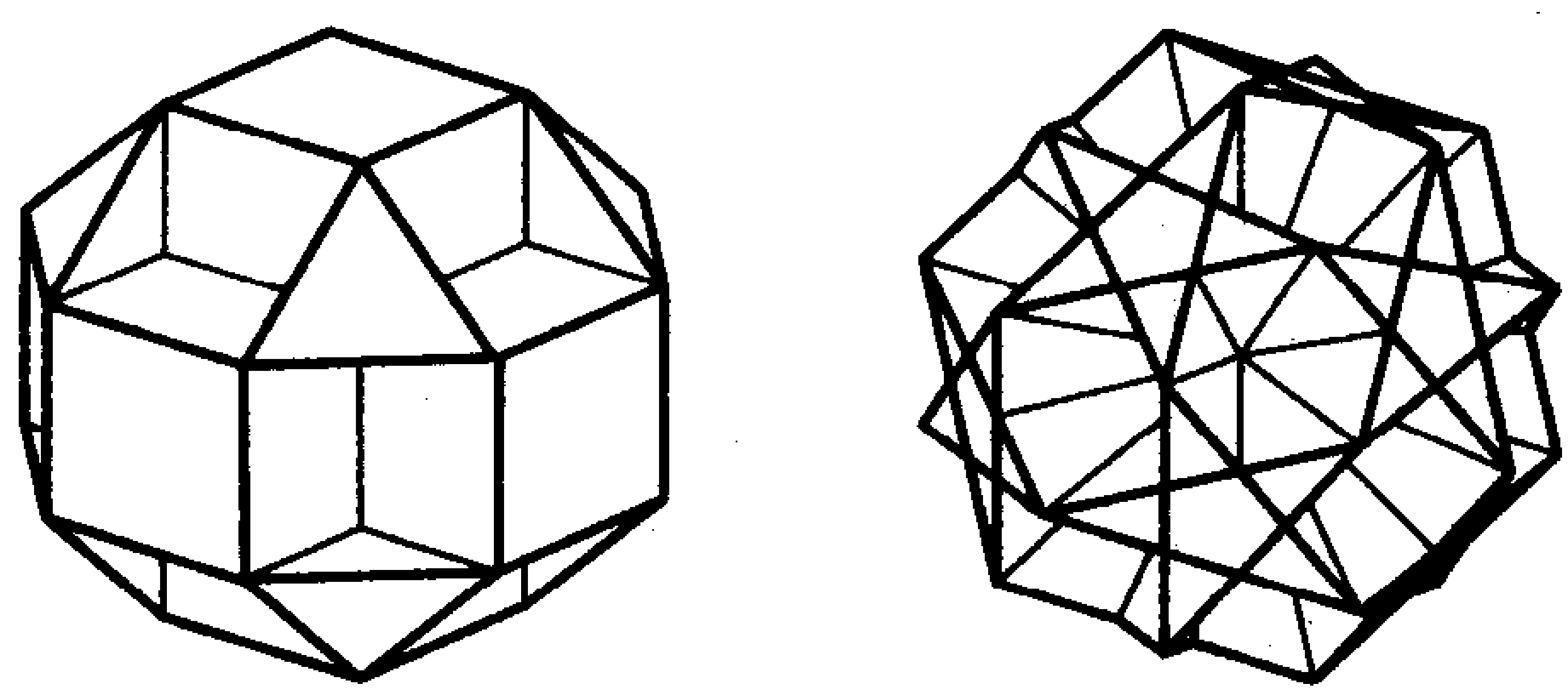


波状曲面的轮廓总是圆锥曲线在直线上滚动时焦点的轨迹的一部分．



uniform polyhedra　均匀多面体

如果一个多面体的面都是正多边形(或者是正星状多边形),所有的顶点都相同,那么这个多面体称为均匀多面体.柏拉图多面体和阿基米德多面体都是凸的均匀多面体.还有另外两种,那就是小立方立方八面体 cubicuboctahedron(左)和小十二半二十面体 dodecahemicosahedron(右);它们都不是凸的.



小立方立方八面体是一个去掉 12 个正方形的面后嵌入 6 个正八边形的面的菱形立方八面体.这个立体图形的顶点都凸在外面,且都是等边三角形的顶点.各个面相交在内部的点不作为顶点.

小十二半二十面体在正十二面体的各个面上各有一个正五角星,加上 10 个都经过该立体图形的中心的正六边形.各个面相交在内部的交点也不作为顶点.

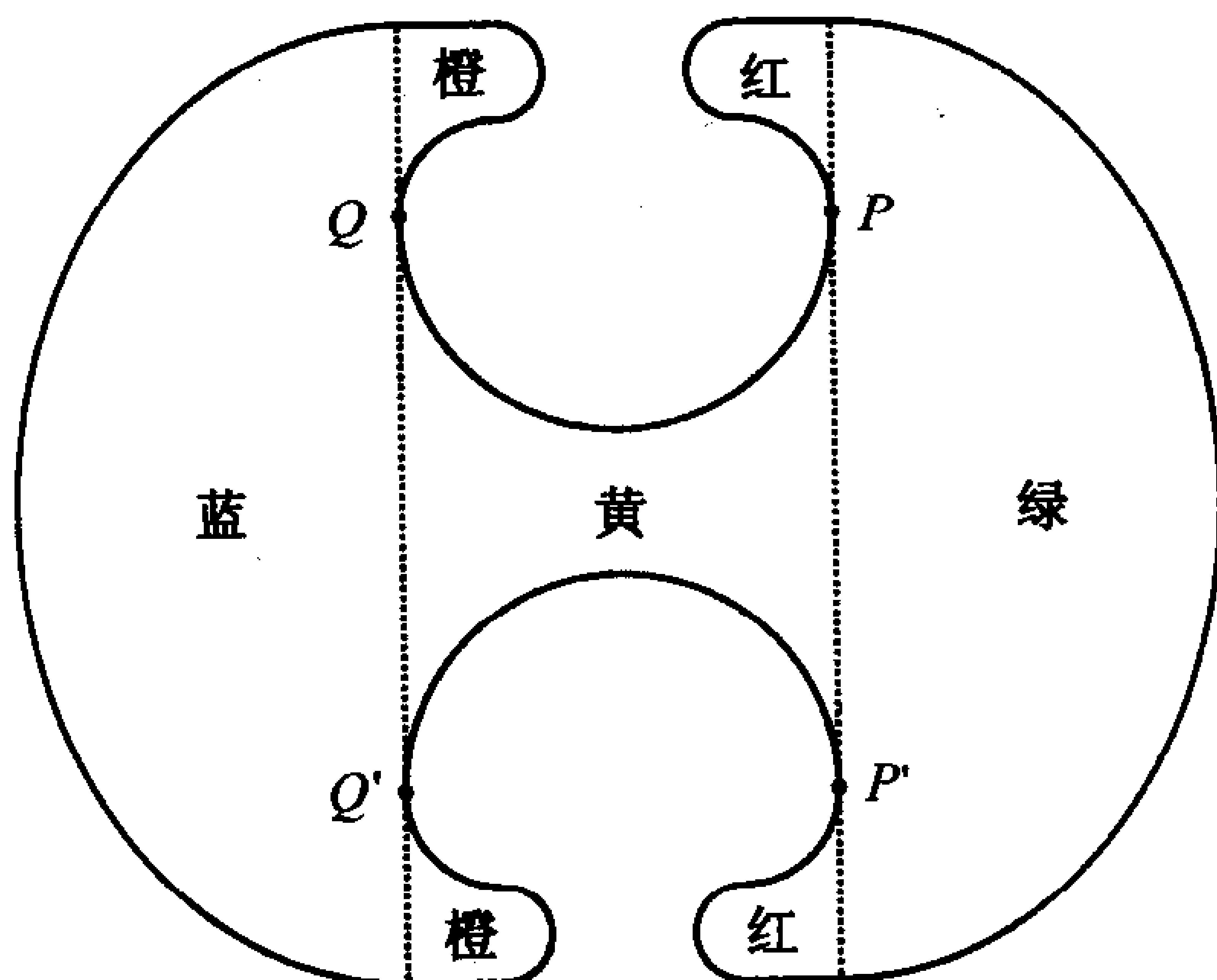
考科塞特(Cotexer),朗格·希金斯(Longuet-Higgins)和米勒(Miller)在 1954 年发表了均匀多面体的清单,除了正多面体、阿基米德多面体和开普勒-泊洼松多面体和棱柱、反棱柱以外,还加上了 53 种多面体.他们表示了这样的信念:他们的清单是完整的,但未提供证明.

unilluminableroom　光线照不到的房间

一盏灯是不能照到一间不是凸的房间内的任意一点的.但是,可以设想,如果墙完全用镜面覆盖,那么无论灯放在哪里,房

间的每一部分都能被照到.

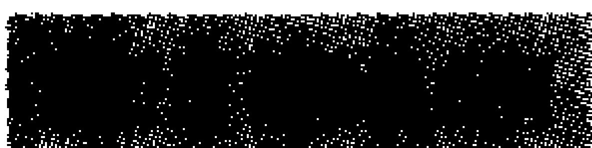
奇怪的是下图中那样的形状虽然是“镜子大厅”，但不能被其中的任意一点发出的光完全照到. 这一图形是在椭圆的基础上画的，而椭圆有以下性质：从一个焦点发出的光线将反射到另一个焦点.



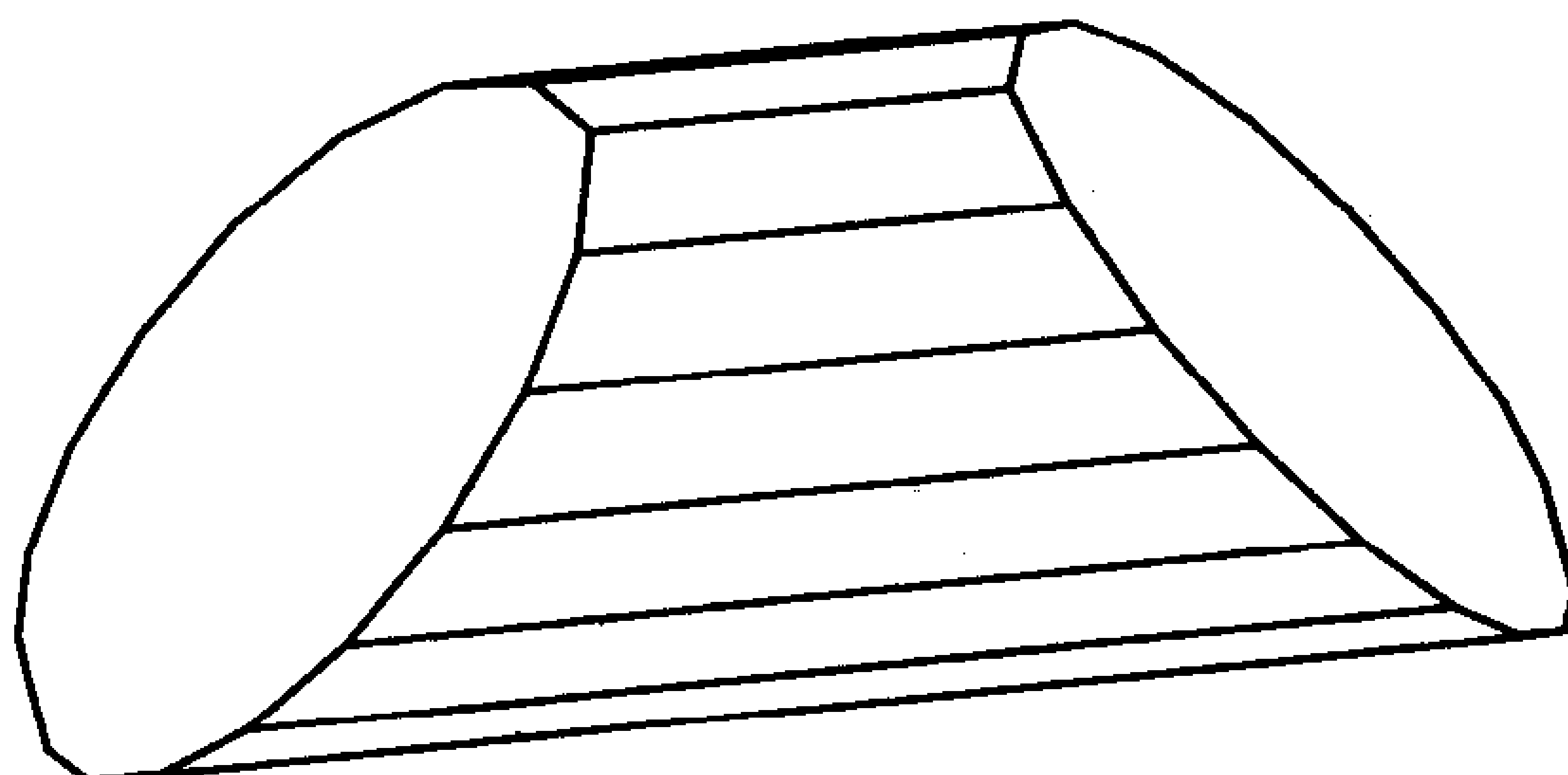
沿椭圆的长轴切割椭圆，将椭圆分成绿色和蓝色各一半. 焦点是 P, P', Q 和 Q'：形成墙的其余部分的曲线可以有多种选择，只要与长轴相切于焦点. 从一个焦点“后面”射出的光线将反射到另一焦点的后面，经过一个焦点的前面的光线将反射到另一焦点的“前面”. 因此从红色“角落”射出的光线只能照明绿色区域和另一个红色角落；从绿色或黄色区域射出的光线永远也照不到橙色角落；等等.

unistable polyhedra　不稳的多面体

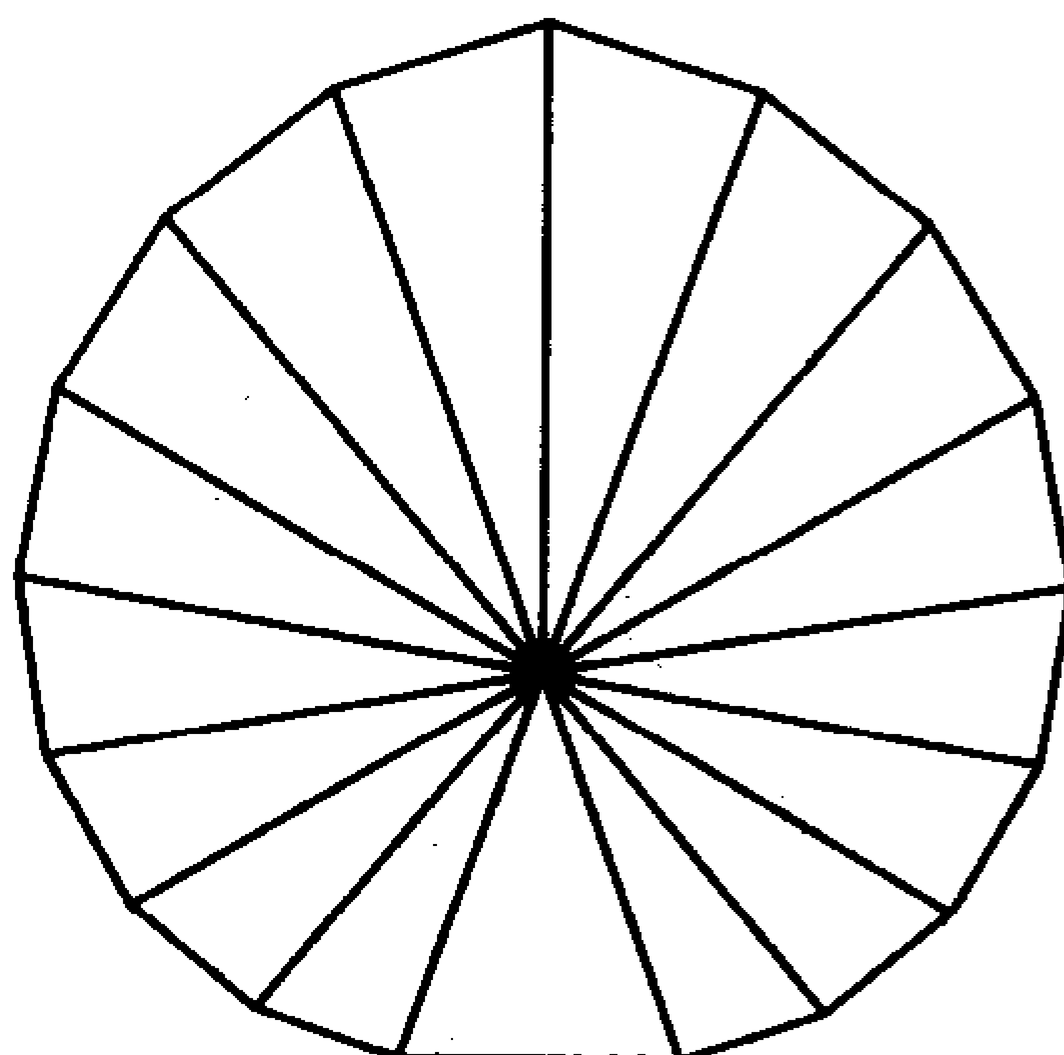
是否存在这样的多面体，它用密度均匀的材料做成，只能竖立在一个面上不滚不倒，如果放在任何其他面上，那就要滚动或倒下？理查德·盖伊(Richard Guy)证明了这样的多面体是存在的，下面这个有 17 条棱和 19 个面的棱柱是不稳的多

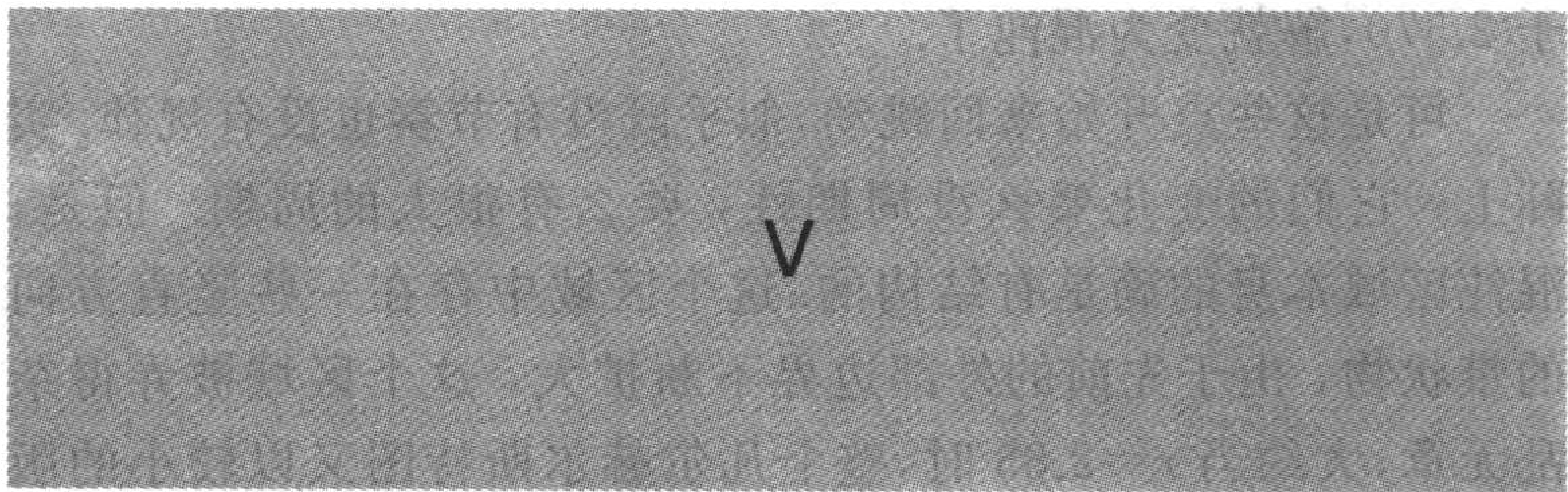


面体.



第二个图形是一个横截面,它表明该柱体是对称的.



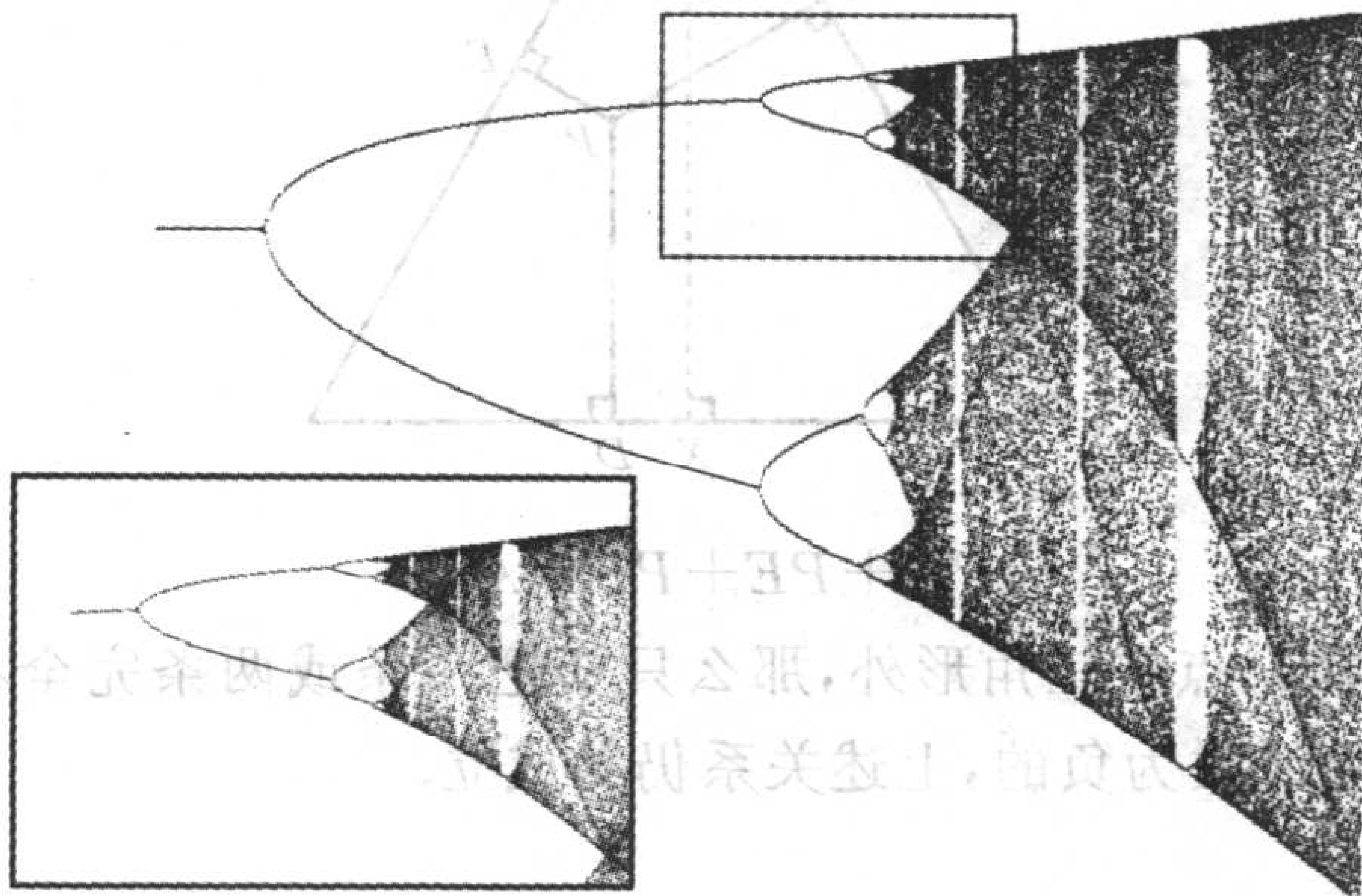


Verhulst process 凡尔赫尔斯特过程

凡尔赫尔斯特(Verhulst)是研究人口学的开创者,他在1838年提出了一个定律,这一定律与马尔萨斯的悲观主义的预言相反,认为人口的数量不会无限增加,因为使人口增长的障碍要比人口本身增长得快.

形如 $x_n+1=rx_n(1-x_n)$ 的过程是以他命名的. 凡尔赫尔斯特过程的变化在很大程度上依赖于 r 的取值. 如果 $r<2$,那么系统会很快趋向于一个稳定的值. 但是如果 $2<r<2.5$,那么人口就在两个值之间摆动. 还说这个解具有两个分支.

随着 r 在超过 2.5 以后再增加一点,解又产生两个分支,然后又产生两个分支,在八个值之间摆动,然后在十六个值之间摆



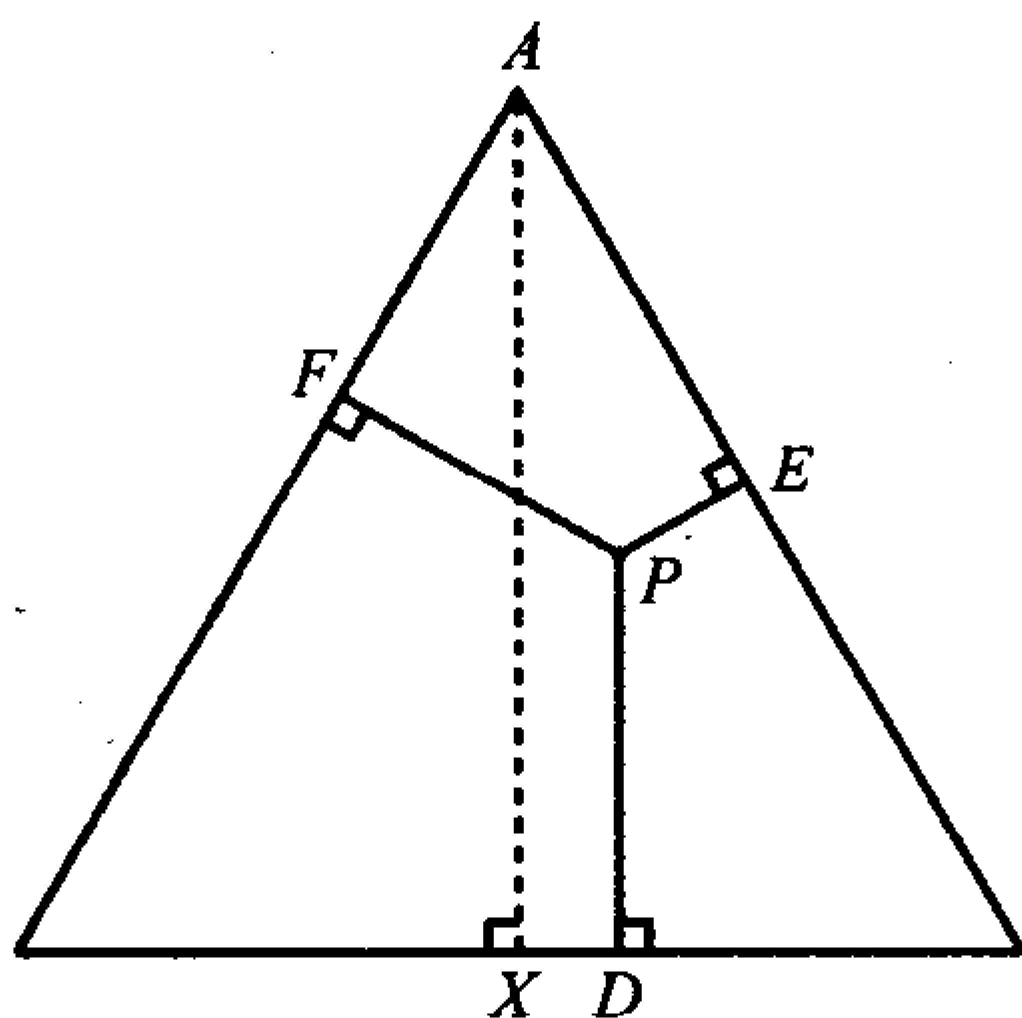
动，等等. 这些分支越来越靠近，直到无穷多次分支，此时 r 近似于 2.570，解就变为混沌了.

可是这些点开始来回跳动，似乎既没有节奏也没有规律. 实际上，它们的变化要么没周期性，要么有很大的周期. 但是，混沌区域本身的确是有结构的. 这个区域中存在一些竖直方向的带状物，由于先前的外部边界不断扩大，这个区域被弄得杂乱无章，大约当 $r=2.83$ 时，整个凡尔赫尔斯特图又以较小的版本出现了.

在有限的范围内要出现无穷多个分支，连续两个分支之间的距离必然迅速变得越来越小. 这些距离之比趋近于一个极限，这个极限以它的发现者命名，称为费根鲍姆(Feigenbaum)数，其近似值为 4.6692016609.

Viviani's theorem　维维阿尼定理

在等边三角形中，任意一个 P 到三边的垂线的和等于该三角形的高：

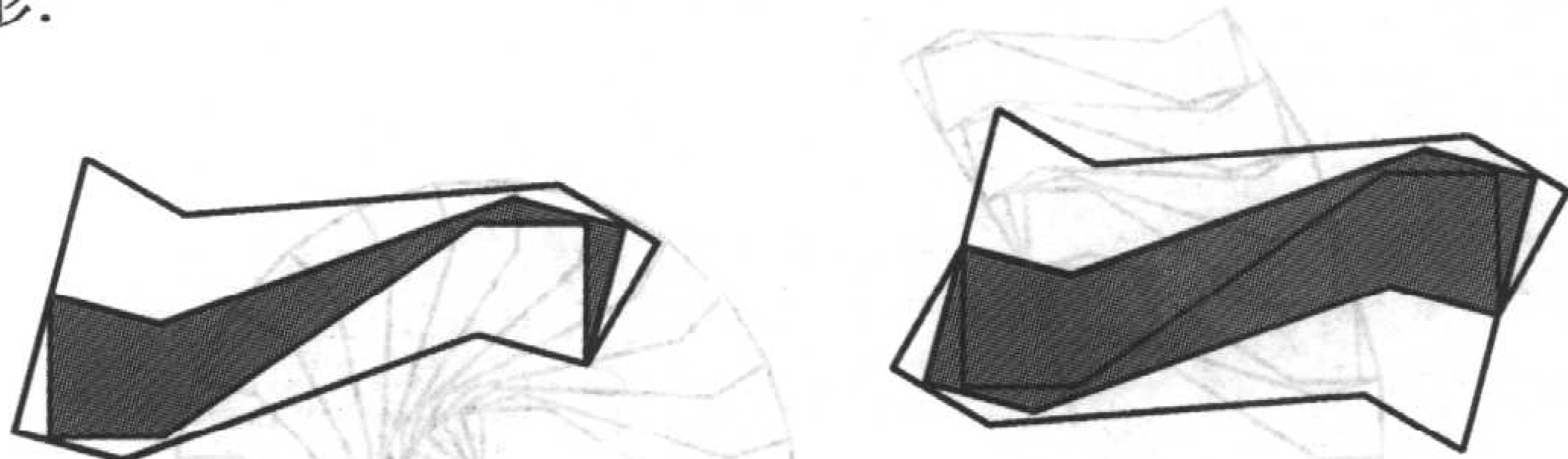


$$PD+PE+PF=AX.$$

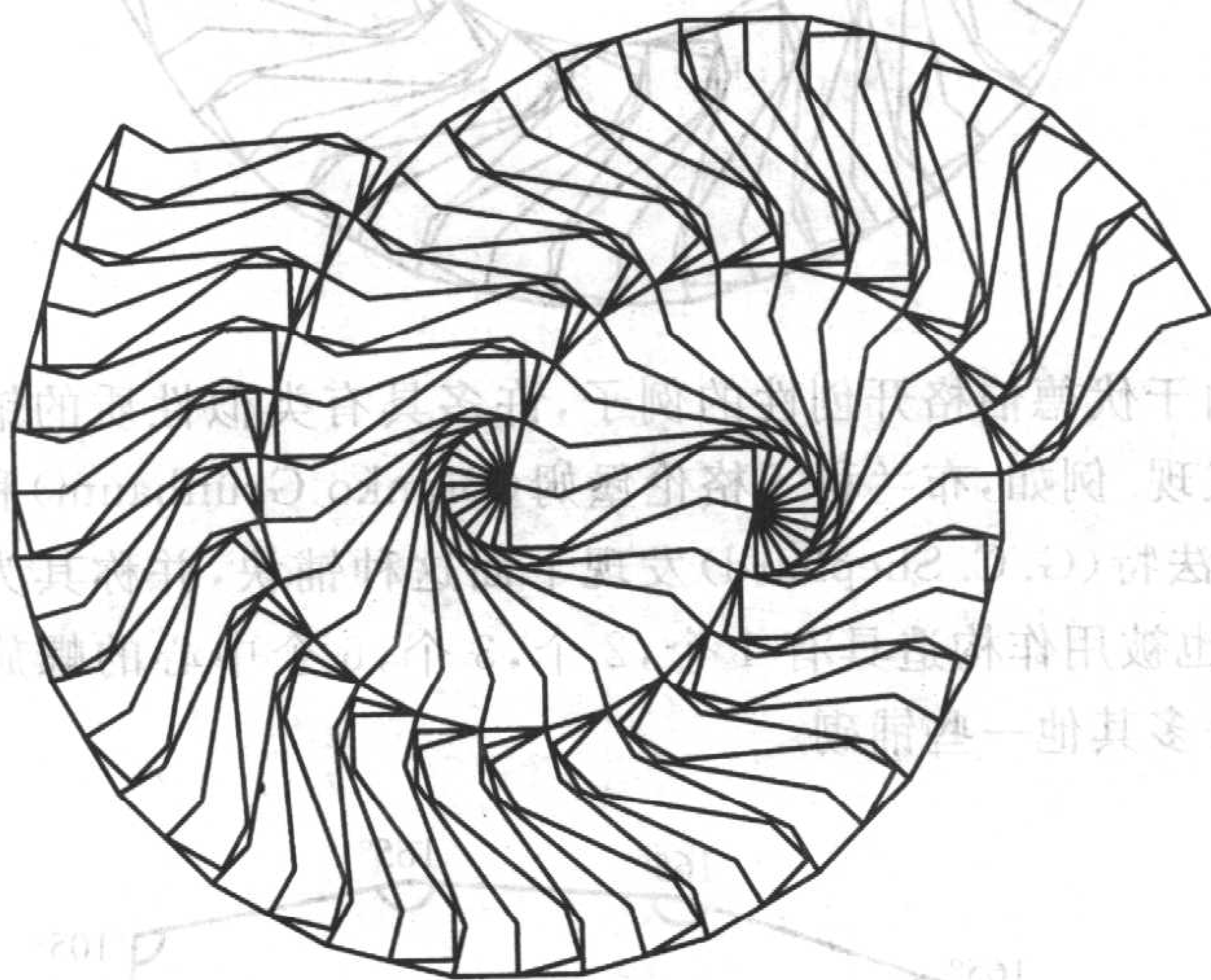
如果 P 点在三角形外，那么只要把一条或两条完全在三角形外的垂线改为负的，上述关系仍然成立.

Voderberg tilings　伏德伯格铺砌

伏德伯格(Voderberg)在1936年发表了这一著名的铺块是如何形成铺砌的. 两个铺块完全包含的不只是另一个铺块而是两个. 在第二个图中的四个铺块形成一个对边平行且相等的十边形.

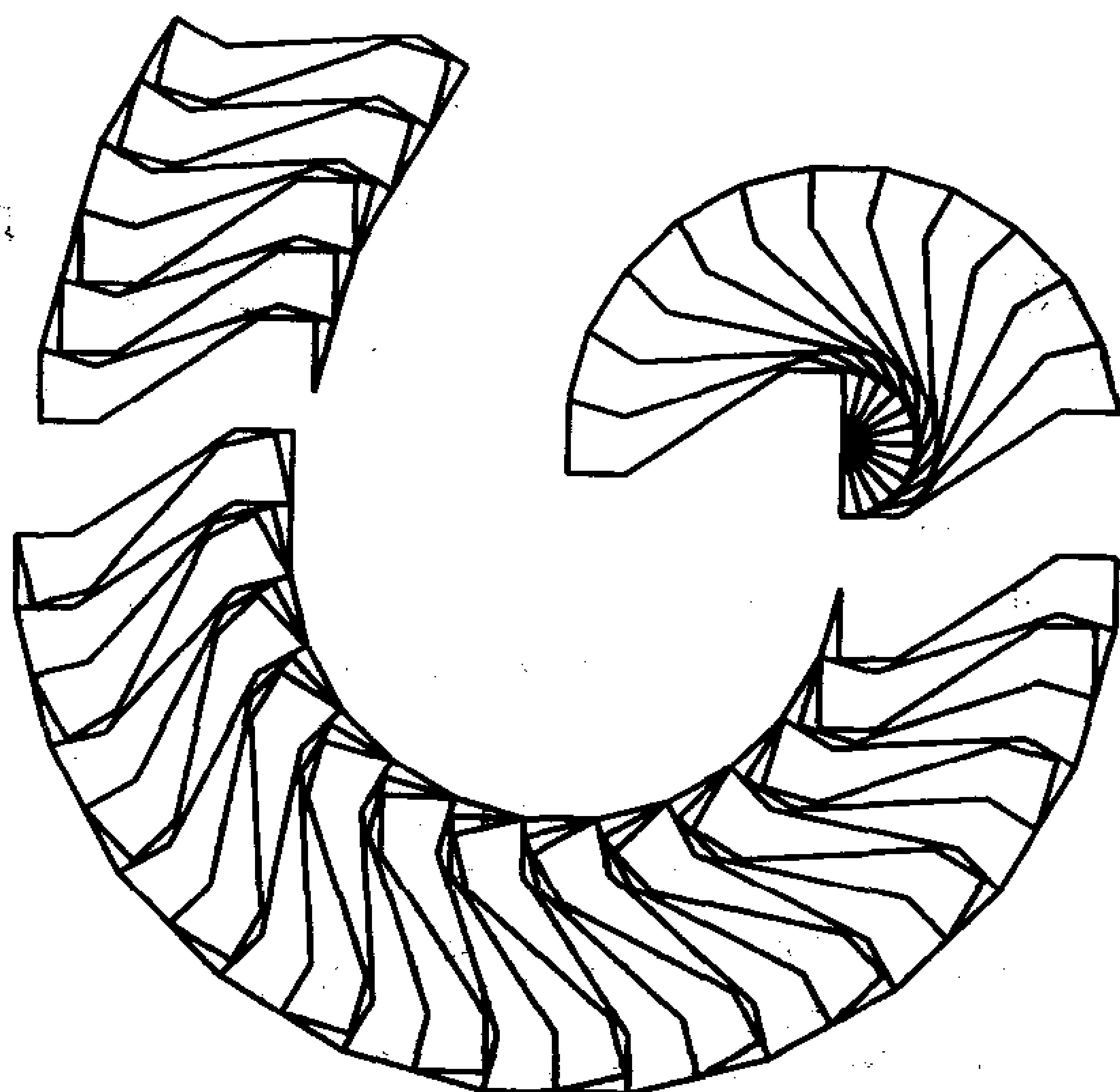


把这些同样的铺块靠紧,就形成一个无限的水平方向的带,再复制这样同样的带,并连起来将可覆盖整个平面. 这个无限的水平带是下面的具有两个"中心"的螺旋状镶嵌的基本组成部分:

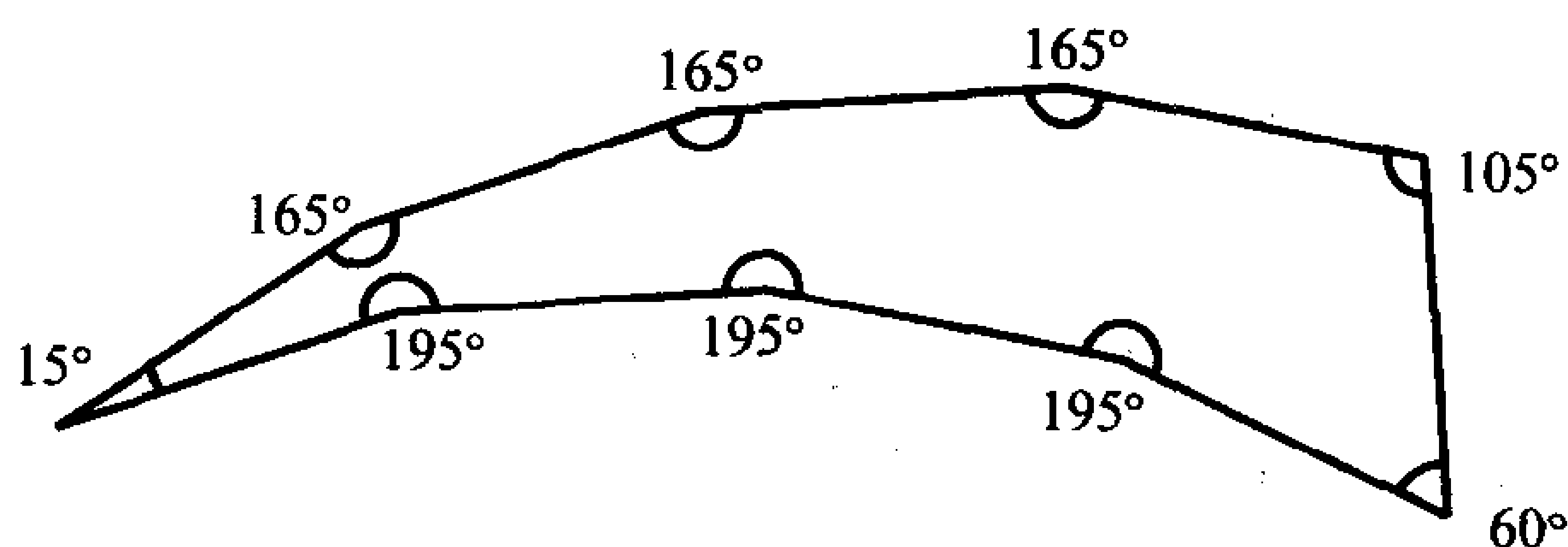


下面的图表示两个匹配的螺旋臂之一是怎样的构造的. 第一部分由12个单个的铺块组成,它们靠在右边的"中心"的半圆外. 第二部分由3×12=36个铺块组成,每3个铺块一组,其中

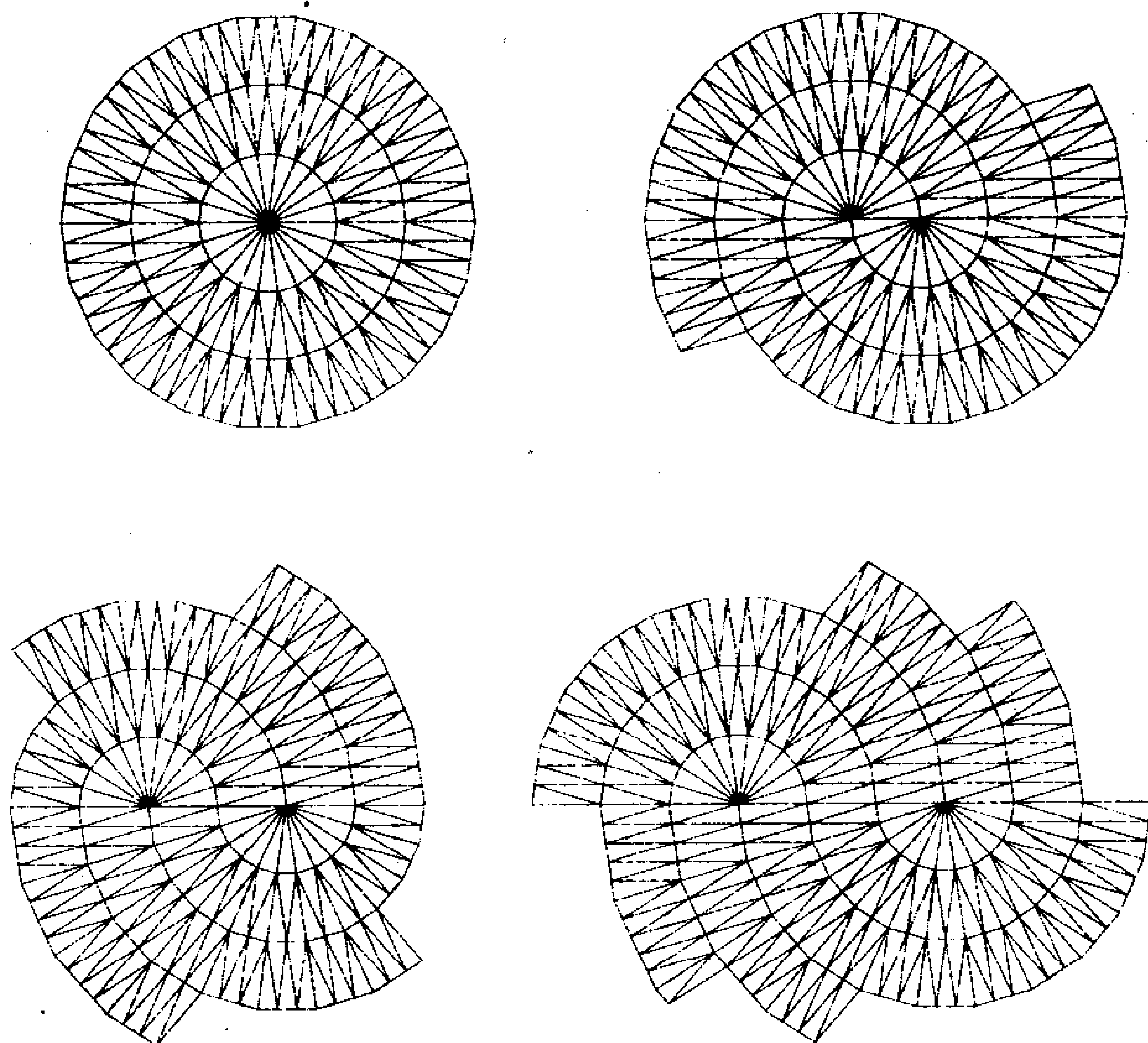
24 个“面向”外，12 个“面向”内，如果第三部分全部画出，那么它由 5×12＝60 个铺块组成，每 5 个铺块一组，其中 36 个面向外，24 个面向内. 每一个带有半个圆的螺旋臂依次以 3 个一组，5 个一组，7 个一组，……这个模式继续下去.



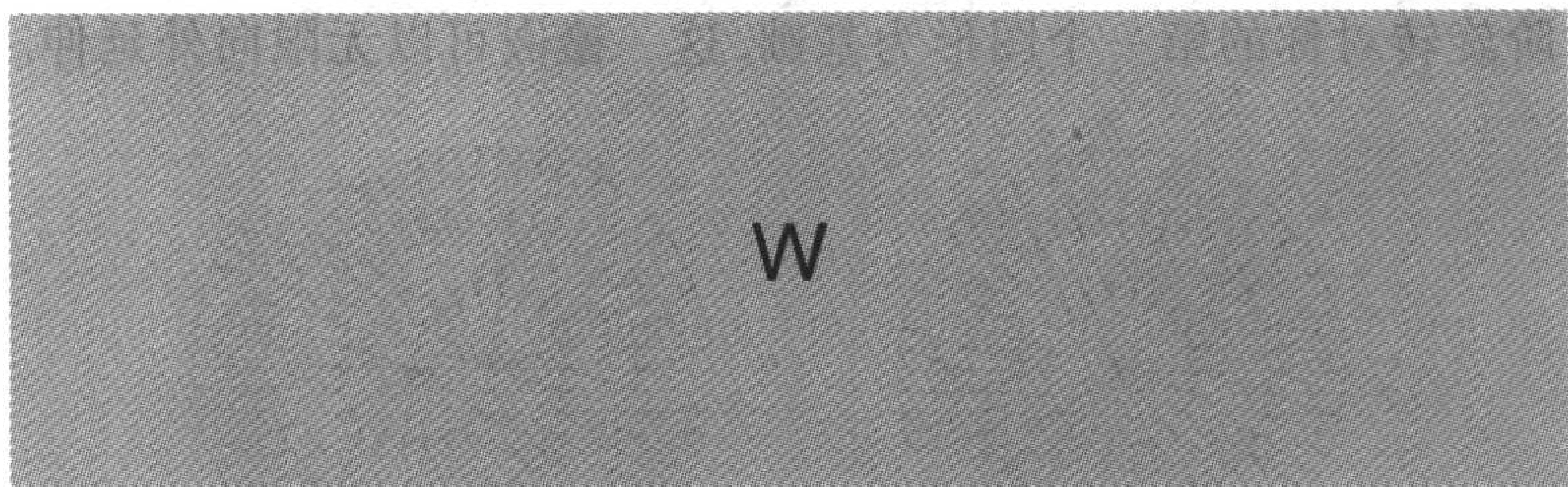
由于伏德伯格开创性的例子，许多具有类似性质的铺块随之被发现. 例如，布兰科·格伦堡姆(Branko Grünbaum)和 G·C·歇法特(G. C. Shephard)发现下面这种铺块，并称其为多变的，它也被用作构造具有 1 个，2 个，3 个，6 个中心的螺旋形铺砌和许多其他一些铺砌.



下面这些图形表示构造螺旋形镶嵌的一种方法，它以有十阶旋转对称的第一个图形为基础. 这一镶嵌可以无限向外延伸.

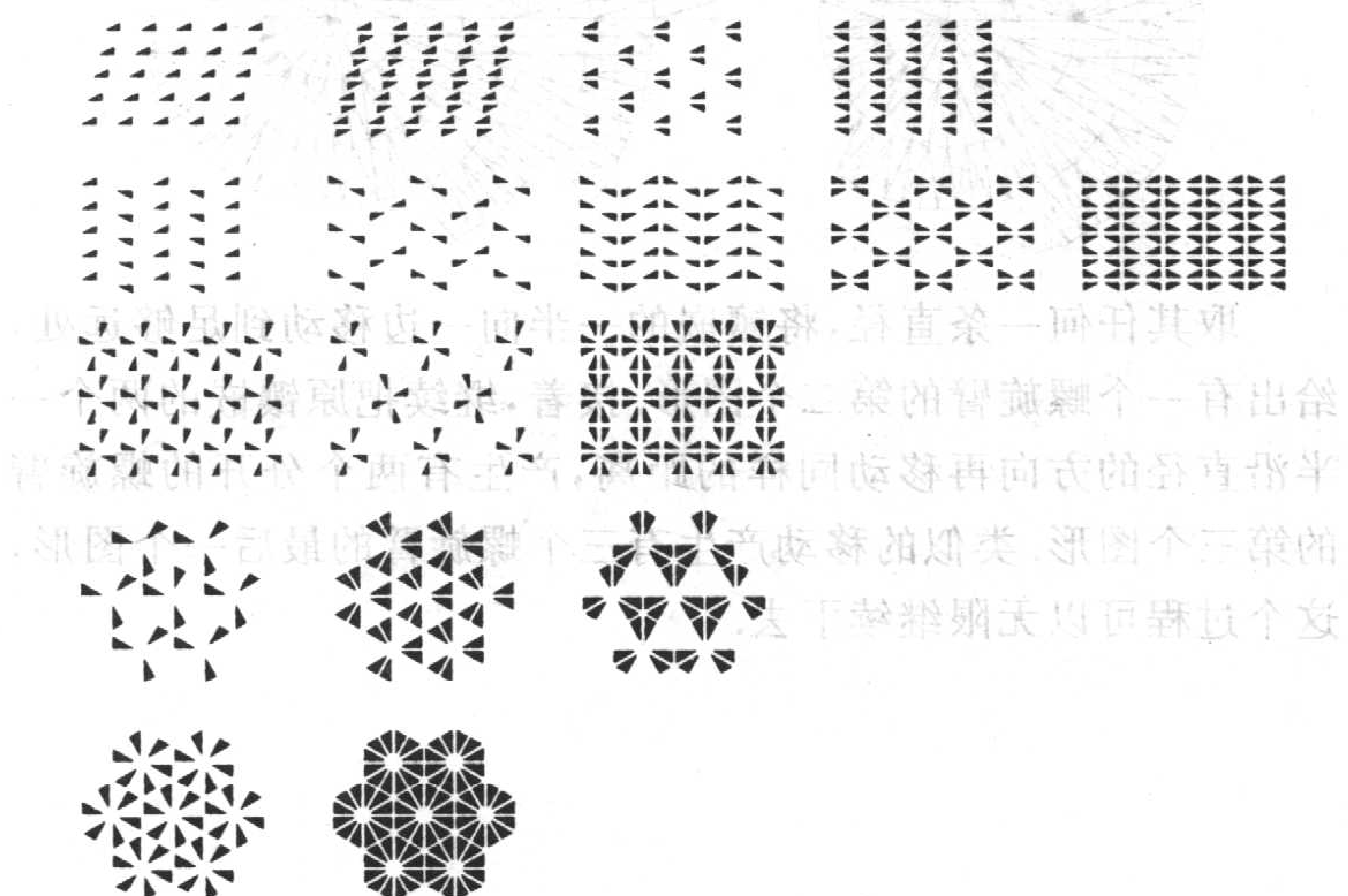


取其任何一条直径，将镶嵌的一半向一边移动到足够远处，给出有一个螺旋臂的第二个图形. 接着，继续把原镶嵌的两个一半沿直径的方向再移动同样的距离，产生有两个分开的螺旋臂的第三个图形. 类似的移动产生有三个螺旋臂的最后一个图形，这个过程可以无限继续下去.



wallpaper patterns　墙纸图案

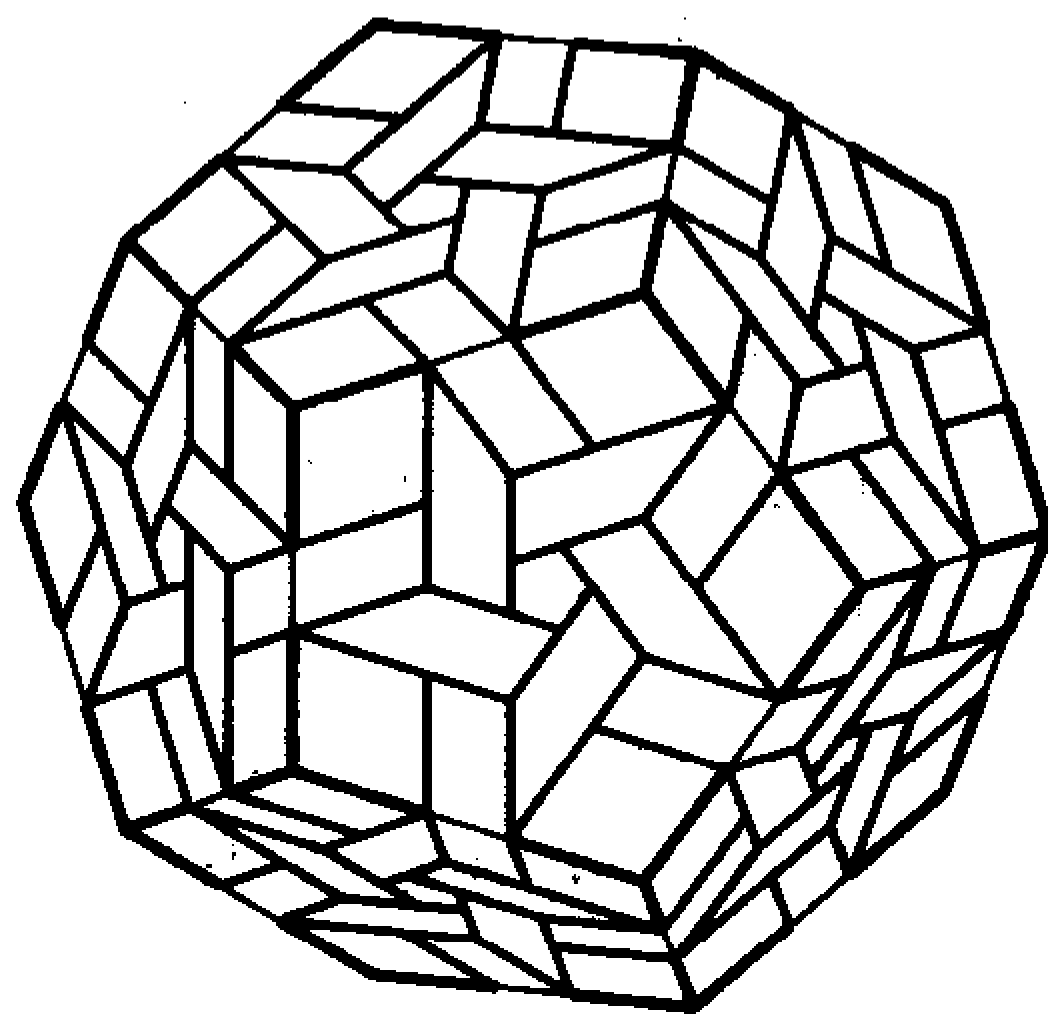
墙纸图案在规定的范围内在两种不同的方向上重复. 它的对称性取决于基础网络的对称性,也取决于重复的小图案是否有同样的对称性. 网络可以有下图中的五种形式.



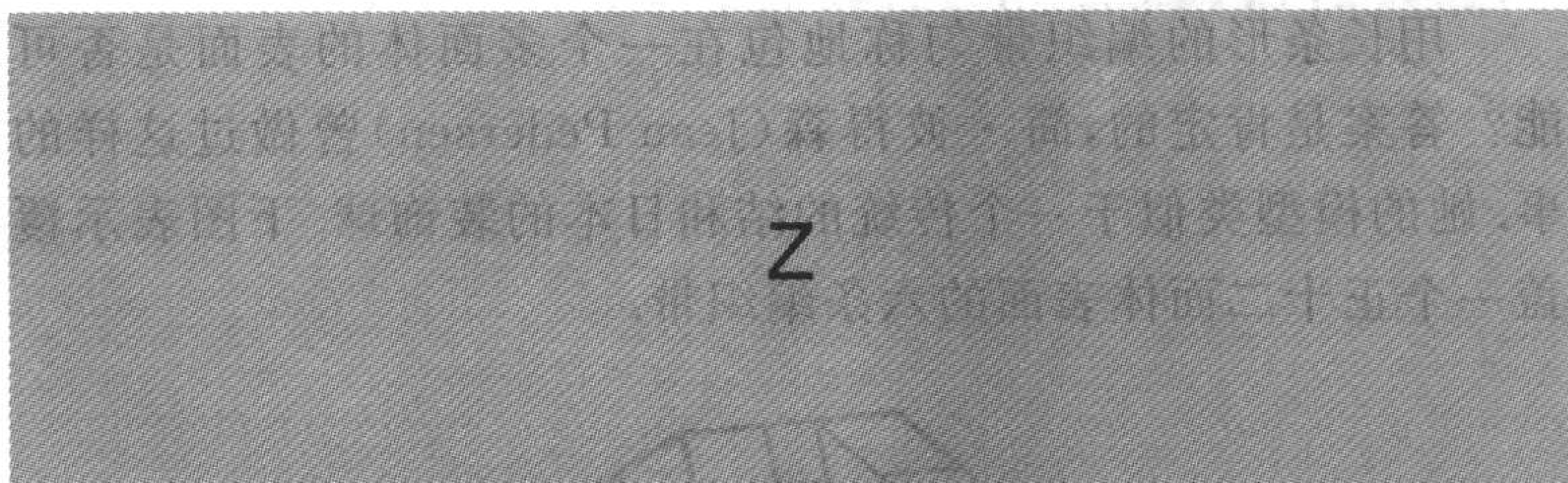
把可能的对称结合起来可产生 17 类墙纸图案,所有这些图案都可在西班牙的阿尔罕布拉宫中和摩尔人的建筑物的任何其他地方找到.

woven polyhedra　编织成的多面体

用长条形的编织带匀称地包在一个多面体的表面是否可能？答案是肯定的，简·彼得森(Jean Pedersen)曾做过这样的事.她的模型类似于一个传统的结和日本的装饰球.下图表示覆盖一个正十二面体表面的六条编织带.

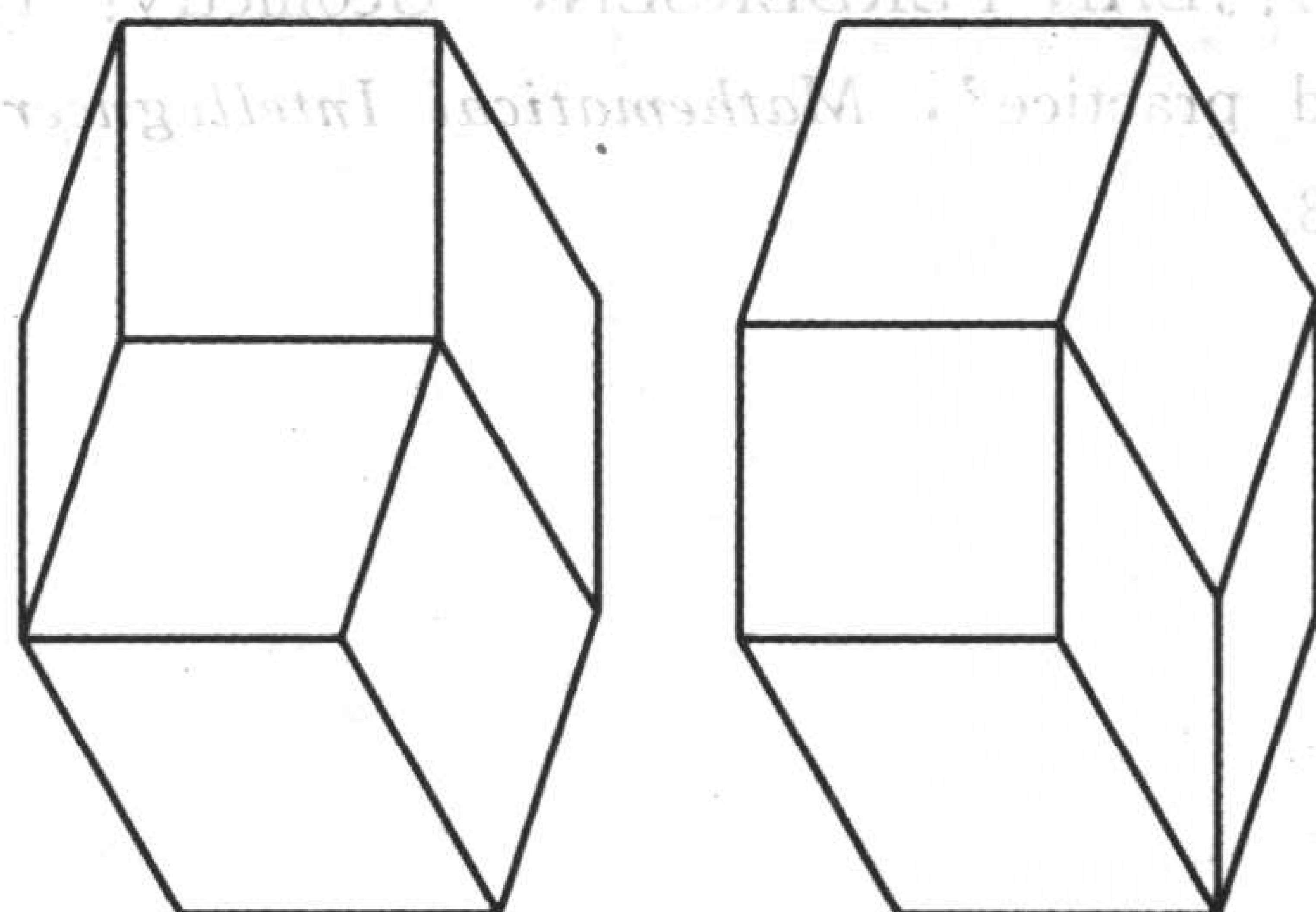


参考书：JEAN PERDERSEN，'Geometry：The unit of Theory and practice'，*Mathematical Intellegncer*，Vol，5，No，4，1983.



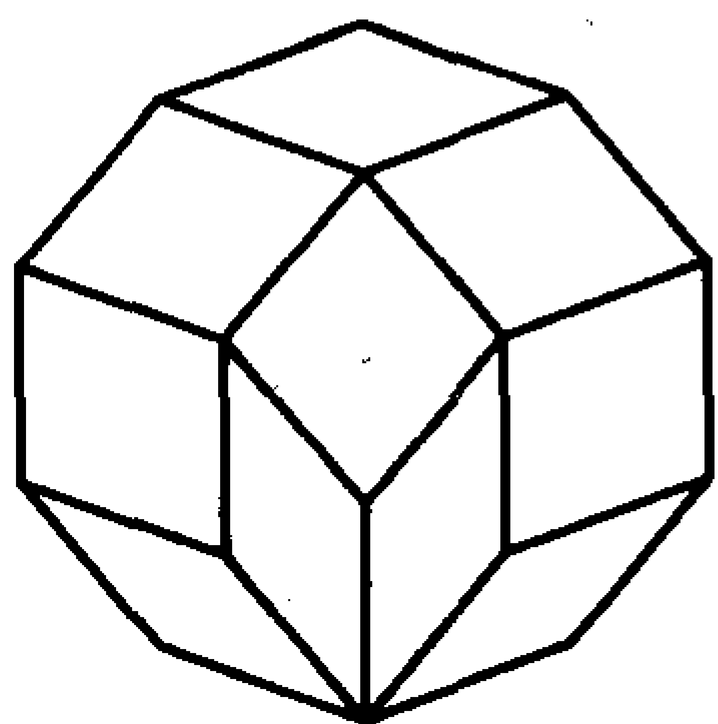
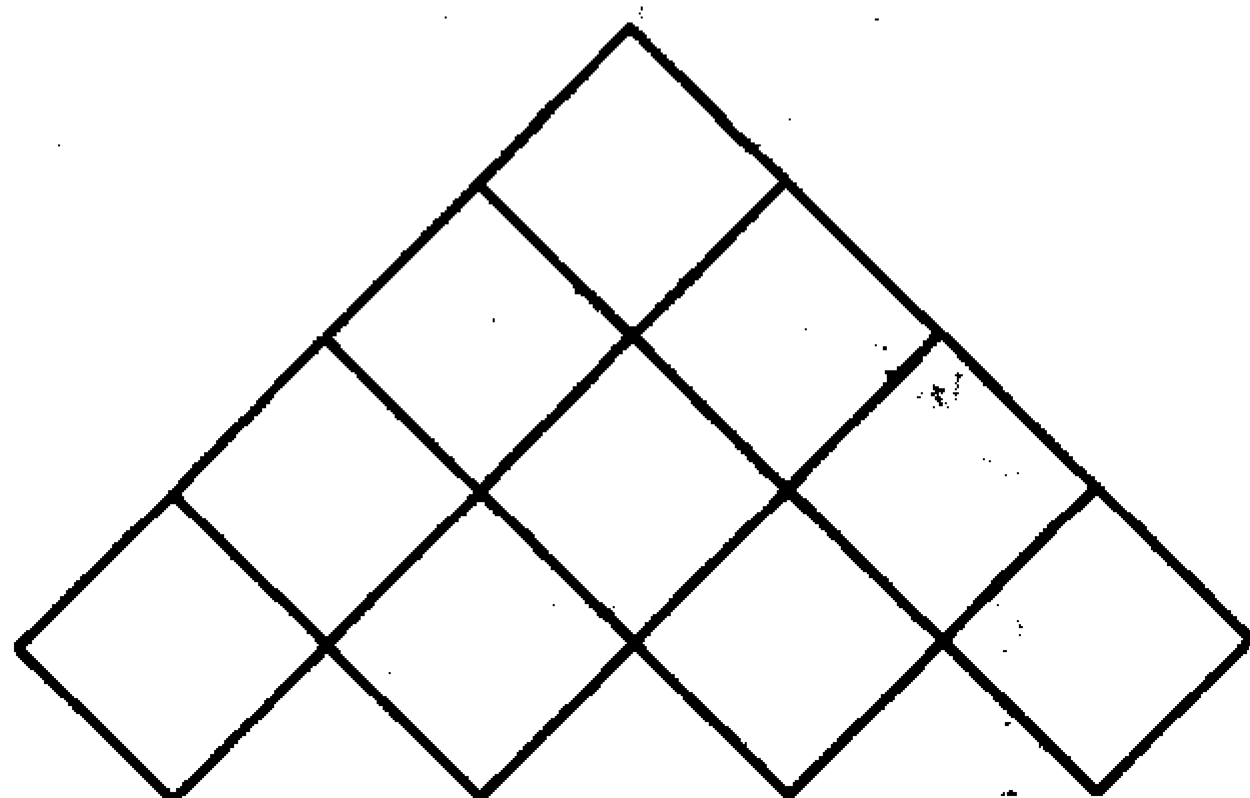
zonagons　带状多边形

如果一个多边形有偶数条边,所有的边的长都相等且对边平行,那么这样的多边形称为带状多边形.这种多边形可分割成菱形.正方形已经是菱形了,它是唯一没有其他分割方法的带状多边形.带状六边形有两种方法分割成菱形,带状八边形有 4 种方法,等等.



正偶数边形都是带状多边形,正奇数边形可以转变为带状多边形后分割为菱形,只要把各边的中点看作为是外加的顶点,每条边算两次.

分割成菱形对于分割问题是很有用的,例如下面的正十边的分割.

因为这些菱形的边都相等,所以可以把这种多边形装上铰链,如果把左图中底下的有四个菱形的顶点剖开,甚至可变为正方形镶嵌.

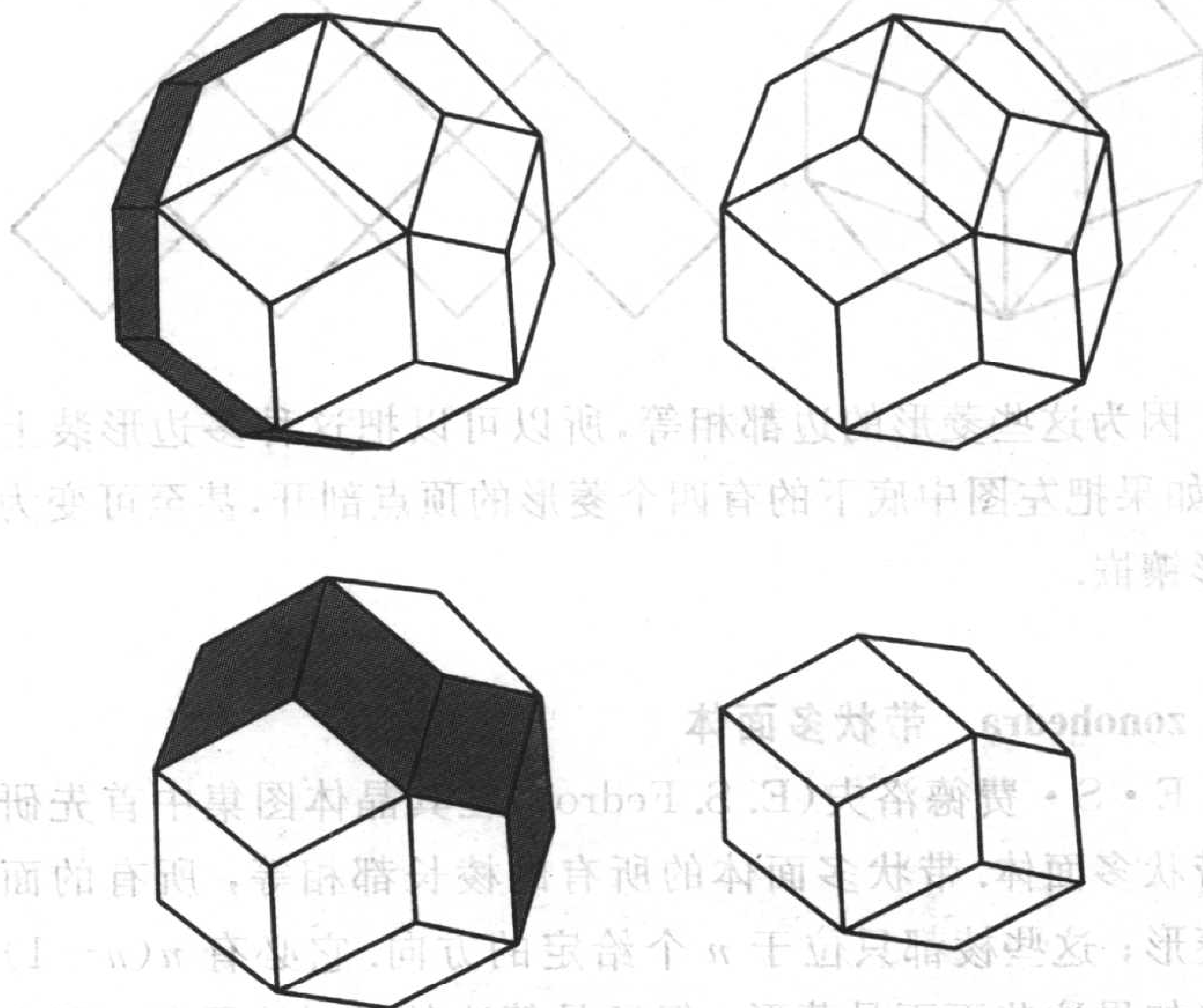
zonohedra　带状多面体

E・S・费德洛夫(E. S. Fedrov)在其晶体图集中首先研究了带状多面体.带状多面体的所有的棱长都相等,所有的面都是菱形;这些棱都只位于 n 个给定的方向.它必有 $n(n-1)$ 个面.(如果这些面不是菱形,但还是等边的且对边平行,那么得到的图形是平行六面体.)

最简单的带状多面体是棱只有三个方向的菱形柱体或菱形多面体.正方体是这种立体图形的特殊情况.一般的菱形十二面体的棱只有四个方向,因此有 $4\times3=12$ 个面.如果这些棱分别在正方体的四条对角线的方向上,那么它就是正菱形十二面体.

正二十面体的六条直径形成一个菱形三十面体,它有 30 个面,且与十二-二十面体对偶.若把该图形中的一个完整的菱形带去掉(换句话说,把包含一个特定方向上棱的所有菱形去掉),那么,就留下一个有 20 个面的菱形二十面体,再在这个图形中去掉一条菱形带就得到一个菱形十二面体(它不是与立方八面体对偶的菱形十二面体).

任何带状多面体都能分割成平行六面体，它又可分割为正方体．因此任何两个体积相同的带状多面体都可以互相分割．



数学家年表

下面列出的是本词典中出现的所有重要的数学家的姓名，再加上如 Leonardo 和 Galileo 这样一些科学家和其他一些人，但不包括一些健在的数学家.说也奇怪，物理学家、工程师等等，他们都不是数学家，也知道好多著名的数学家！

Thales of Milerus	公元前约 625—约 547	希腊
Pythagolas	公元前约 580—约 480	希腊
Hippocrates of Chios	公元前约 440	希腊
Plato	公元前约 427—347	希腊
Aristotle	公元前约 384—322	希腊
Euclid	公元前约 295	希腊
Philo	公元前约 250	希腊
Nicomedes	公元前约 240	希腊
Perseus	公元前约 3 世纪	希腊
Archimedes	公元前约 287—212	希腊
Diocles	公元前约 180	希腊
Apollonius of Alexadria	公元前约 225—约 175	希腊
Heron of Alexanderia	约 62	希腊
Menelaus of Alexadria	约 100	希腊
Ptolemy	约 85—约 165	希腊
Pappus of Alexadria	约 300—350	希腊

Abu' Wefa	940—998	波斯
Regiomontanus, Lohannes	1436—1476	德国
Pacioli, Luca	约 1445—1517	意大利
Leonado da Vinci	1452—1519	意大利
DürerAlbrecht	1471—1528	德国
Galileo(Galileo Galilei)	1564—1642	意大利
Kepler, Johann	1571—1630	德国
Mersenne, Marin	1588—1648	法国
Pascal, Etienne	1588—1651	法国
Desargues, Girad	1591—1661	法国
Descartes, Renedu Perron	1596—1650	法国
Fermat, Pierre de	1601—1665	法国
Roberval, GillesPersonne de	1602—1675	法国
Torricelli, Evangelista	1608—1647	意大利
Schooten, Frans Van	1615—1660	荷兰
Pascal, Laise	1623—1662	法国
Cassini, Giovanni Domenico	1625—1712	意大利
Huygens, Christiaan	1629—1695	荷兰
Wren, Christopher	1632—1723	英国
Mohr, Georg	1640—1697	丹麦
Newton, Isaac	1642—1727	英国
Leibniz, Gottfried Wihelm	1646—1716	德国
Ceva, Giovanni	1647/8—1734	意大利
Bernoulli, Jacob	1654—1705	瑞士
Simson, Robert	1687—1768	苏格兰
Euler, Leonhard	1700—1782	瑞士
Bernoulli, Daniel	1707—1783	瑞士
Malfatii, Gian francesco	1731—1807	意大利
Lagrange Joseph Louis	1736—1813	意大利

Watt, Jems	1736—1819	苏格兰
Haüy, René-Just	1743—1822	法国
Monge, Gspard	1746—1818	法国
Mascheroni Lorenzo	1750—1800	意大利
Carnot, Lazare Nicolas Marguerite	1753—1823	法国
Gergonne, Josaph Diez	1771—1859	法国
Bowditch, Nathaniel	1773—1838	美国
Gauss, Carl Friederich	1777—1855	德国
Poinsot, Louis	1777—1859	法国
Crelle, August Leopold	1780—1855	德国
Brianchon, Charles Julien	1783—1864	法国
Poncelet, Jean Victor	1788—1867	法国
Cauchy, Augustin Louis	1789—1857	法国
Möbius, Ferdinand	1790—1868	德国
Lobachevsky, Nikolai Ivanovich	1792—1856	俄国
Dandelin, germinal Pierre	1794—1847	比利时
Steiner, Jakob	1796—1863	瑞士
Feuerbach, Karl	1800—1834	德国
Plücker, Julius	1801—1868	德国
Plateau, Joseph Antoine Ferdinand	1801—1883	比利时
Bolyai, János	1802—1860	匈牙利
Verhurst, Pierre-Francois	1804—1849	比利时
Jacobi, Carl Gustav Jacob	1804—1851	德国
Kirkman, Thomas Penygton	1806—1895	英国
Schläfli, Ludwig	1814—1895	德国
Salmon, George	1819—1904	爱尔兰

Cayley, Arthur	1821—1895	英国
Lissajous, Lules	1822—1890	法国
Cremona, Antoine Luigi Gaudenzio, Giuseppen	1830—1903	意大利
Beltrami, Eugenio	1835—1899	意大利
Reye, Theodor	1838—1919	德国
Lemoine, Émile Michel Hyacinthe	1840—1912	法国
Neuberg, Joseph	1840—1926	比利时
Schwarz, Hermann Amandus	1843—1921	德国
Clifford, William Kingdom	1845—1879	英国
Brocard, Pierre Rene Jean-Baptiste, Henri	1845—1922	法国
Dudenny, Henry Ernest	1847—1930	英国
Klein, Christian Felix	1849—1925	德国
Poincaré, Lules Henri	1854—1912	法国
Föppl, August	1854—1924	德国
Morley, Frank	1860—1937	美国
Hirbert, David	1862—1943	德国
Kürschák, József	1864—1933	匈牙利
Koch, Helge von	1870—1924	瑞典
Fano, Gino	1871—1952	意大利
Lebesgue, Henri Léon	1875—1941	法国
Soddy, Frederick	1877—1956	英国
Fatou, Pierre Joseph Louis	1878—1929	法国
Sommerville, Duncan Mclaren Young	1879—1934	苏格兰
Sierpinski, Waclaw	1882—1969	波兰
Thebault, Victor	1882—1960	法国



Blashke, Willhelm Johann Eugen	1885—1962	奥地利
Julia, Gaston	1893—1978	法国

参考文献

以下书目仅限于完全涉及几何的书籍.对于包括某些几何素材的许多书籍,我将只提及马丁·加德纳的一系列出类拔萃的书籍,这些书籍是以《科学美国人》这一杂志的娱乐数学专栏为根据的.其中有许多书已有企鹅版,可在企鹅版书目中找到.

* 带有星号的条目是相当专门化的.

BOLD B. *Famous Problems of Geometry and How to Solve them*, DOVER, New York, 1964.

COXETER H. S. M. *Introduction to Geometry*, Wiley, New York, 1961.

* COXETER H. S. M. *Twelve Geometric Essays*, Southern Illinois University Press, 1968.

CUNDY H. M. and ROLLETT A. P. *Mathematical Models*, Tarquin Publications, 1987.

* DAVIS C. GRUNBAUM B. and SCHERK F. A., *The Geometric Vein*, Springer, New York, 1981.

EVES H. *A Suvey of Geometry*, vols 1 & 2, Allyn and Bacon, Boston, 1963—5.

* FRANCIS G. K. *A Topological Picture Book*, Springer, New York, 1987.

GRUNBAUM B. and SHEPHERD G. C., *Tilings Patterns*,

W. H. Freeman, San Francisco, 1987.

* HEATH T. L. *The Works of Archimedes*, Dover, New York, n. d.

* HILBERT D. and COHN-VOSSEN S., *Geometry and The Imagination*, Chelsea Publishing Company, New York, 1952.

HILDEBRANDT S. and TROMBA A., *Mathematics and Optimal Form*, Scientific American Library, W. H. Freeman, New York, 1985.

HUNTLY H. E. *The Divine Proportion*, Dover, New York, 1970.

IVINS W. M. *Art and Geometry*, Dover, New York, 1964.

LINGREN H. *Recreational Problems in Geometric Dissections and How to Solve them*, DOVER, New York, 1972.

LOCKWOOD E. H. *A Book of Curves*, Cambridge University Press, 1967.

* MANDELBROT B. *The Fractal Geometry of Nature*, W. H. Freeman, San Francisco, 1982.

OGILVY C. S. *Excursions in Geometry*, Oxford University Press, New York, 1969.

PEDOE D. *Geometry and Liberal Arts*, Penquin, 1976.

STEINHAUS H. *Mathematical Snapshots*, Oxford University Press, New York, 1969.

WENNINGER M. *Polyhedron Models*, Cambridge University Press, 1971.

WEYL H. *Symmetry*, Princeton University Press, 1962.

索　引

注:条目的名称不列入索引,各条目后的数表示书中的页码

---

* 一种利用图形以产生错视觉的现代艺术。